Topologie reálné přímky a komplexní roviny

Pojmy a symbolika

$\mathbb{K}$ – množina $\mathbb{R}$ reálných nebo množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel

Vzdálenost čísel $x, y \in \mathbb{K}$ definujeme $\varrho(x, y) = |x - y|$

$\varrho : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ – *metrika* na $\mathbb{K}$

Vlastnosti metriky:

(i) $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ \varrho(x, y) \geq 0 \ \wedge\ \big(\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\big)$,

(ii) $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, (symetrie)

(iii) $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})\ \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$, (trojúhelníková nerovnost)

(Symetrické otevřené) δ-okolí bodu $x \in \mathbb{K}$ – $\mathcal{O}_\delta(x) = \{y \in \mathbb{K} :\ |x - y| < \delta\}$, přitom $\delta > 0$.

Topologie reálné přímky a komplexní roviny

Klasifikace bodů vzhledem k množině

$A \subseteq \mathbb{K}$, bod $x \in \mathbb{K}$ se nazývá

vnitřní bod množiny A: $(\exists\delta > 0)\, \mathcal{O}_\delta(x) \subseteq A$,

hraniční bod množiny A: $(\forall\delta > 0)\, \mathcal{O}_\delta(x) \cap A \neq \emptyset \neq \mathcal{O}_\delta(x) \cap (K \setminus A)$,

vnější bod množiny A: $(\forall\delta > 0)\, \mathcal{O}_\delta(x) \cap A = \emptyset$,

izolovaný bod množiny A: $(\exists\delta > 0)\, \mathcal{O}_\delta(x) \cap A = \{x\}$,

hromadný bod množiny A: $(\forall\delta > 0)\, \big(\mathcal{O}_\delta(x) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \emptyset$.

• Každý bod základní množiny $\mathbb{K}$ je buď vnitřní nebo hraniční nebo vnější vzhledem k libovolné množině A.

• Vnitřní bod množiny A je jejím prvkem, vnější bod množiny A není jejím prvkem, hraniční bod množiny A v této množině být může, ale nemusí.

• Izolovaný bod množiny A je jejím prvkem, hromadný bod množiny A v této množině být může, ale nemusí.

• V každém okolí hromadného bodu množiny A je nekonečně mnoho bodů této množiny.

Topologie reálné přímky a komplexní roviny

Klasifikace množin $A \subseteq \mathbb{K}$

vnitřek množiny A: $A^\circ = \{x \in \mathbb{K} : (\exists \delta > 0)\, \mathcal{O}_\delta(x) \subseteq A\}$,
tj. množina všech vnitřních bodů množiny A,

hranice množiny A: $\partial A = \{x \in \mathbb{K} : (\forall \delta > 0)\, \mathcal{O}_\delta(x) \cap A \neq \emptyset \neq \mathcal{O}_\delta(x) \cap (K \setminus A)\}$,
tj. množina všech hraničních bodů množiny A,

uzávěr množiny A: $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.

Množina $A \subseteq \mathbb{K}$ se nazývá

otevřená: $A = A^\circ$,

uzavřená: $\mathbb{K} \setminus A$ je otevřená, tj. $A = \overline{A}$,

obojetná: A není otevřená ani uzavřená,

hustá v $\mathbb{K}$: $\overline{A} = \mathbb{K}$,

ohraničená: $(\exists h > 0)\, A \subseteq \mathcal{O}_h(0)$,

kompaktní: A je ohraničená a uzavřená.

Pozor! Při vymezení kompaktní množiny výše uvedeným způsobem je podstatné, že se jedná o podmnožinu $\mathbb{K}$, podmnožinu konečnědimensionálního prostoru.

Topologie reálné přímky

$A \subseteq \mathbb{R}$

$h \in \mathbb{R}$ je *horní závora množiny A* – $(\forall x \in A)\, x \leq h$.

Množina A je *ohraničená shora* – $(\exists h)(\forall x \in A)\, x \leq h$.

Číslo $s \in \mathbb{R}$ se nazývá *supremum množiny A* pokud je splněna jedna z ekvivalentních podmínek:

- s je nejmenší horní závorou množiny A,
- $\big((\forall a \in A) s \geq a\big) \ \wedge \ \Big(\big((\exists b \in A) b < s\big) \Rightarrow \big((\exists c \in A) c > b\big)\Big)$.

$h \in \mathbb{R}$ je *dolní závora množiny A* – $(\forall x \in A)\, x \geq h$.

Množina A je *ohraničená zdola* – $(\exists h)(\forall x \in A)\, x \geq h$.

Číslo $s \in \mathbb{R}$ se nazývá *infimum množiny A* pokud je splněna jedna z ekvivalentních podmínek:

- s je největší dolní závorou množiny A,
- $\big((\forall a \in A) s \leq a\big) \ \wedge \ \Big(\big((\exists b \in A) b > s\big) \Rightarrow \big((\exists c \in A) c < b\big)\Big)$.

MASARYKOVA
UNIVERZITA