Obsah

Kapitola 1

Prekalkulus

1.1 Reálná čísla

- Přirozená čísla: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ Dospějeme k nim při počítání prvků nějaké množiny. Lze na nich definovat základní početní operace, uspořádání.
- Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ Doplnění množiny $\mathbb{N}$ tak, aby operace odčítání měla vždy výsledek.
- Racionální čísla: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Doplnění množiny $\mathbb{Z}$ tak, aby operace dělení měla vždy výsledek.
- Iracionální čísla: $\mathbb{I}$ Čísla, která není možno vyjádřit ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Iracionální čísla potřebujeme. Např. $\log_{10} 3 \in \mathbb{I}$.

D.: Sporem. Připusťme, že $\log_{10} 3 = \frac{m}{n}$. Pak

$$\begin{aligned} 10^{\frac{m}{n}} &= 3 \\ 10^m &= 3^n \\ 2^m 5^m &= 3^n \end{aligned}$$

Dostali jsme dva různé rozklady jednoho čísla na prvočinitele. To je spor. □

Nebo $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

D.: Sporem. Připusťme, že $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Pak

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

V rozkladu na prvočinitele čísla stojícího na levé straně rovnosti je 2 v liché mocnině, v rozkladu na prvočinitele čísla stojícího na pravé straně rovnosti (tedy téhož čísla) je 2 v sudé mocnině. To je spor. □

1.1.1 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$. (Uspořádání je binární relace, která je

(i) reflexivní: $(\forall a \in M)\,(a \leq a)$

(ii) antisymetrická: $(\forall a, b \in M)\,(a \leq b,\, b \leq a \Rightarrow a = b)$

(iii) transitivní: $(\forall a, b, c \in M)\,(a \leq b,\, b \leq c \Rightarrow a \leq c)$)

Buď $a \in M$, $A \subseteq M$. Řekneme, že a je *horní* (resp. *dolní*) *závora množiny A v množině M*, jestliže $x \leq a$ (resp. $a \leq x$) pro každé $x \in A$. Řekneme, že množina A je *ohraničená shora* (resp. *zdola*), jestliže existuje její horní (resp. dolní) závora. Řekneme, že množina A je *ohraničená*, je-li ohraničená shora i zdola.

1.1.2 Příklady

1. Množina $A = \{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, ...\}$ je ohraničená zdola (dolní závora je např. 1) a není ohraničená shora: Při označení $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ je

$$\begin{aligned} a_1 = &\quad 1 \\ a_4 = &\quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{2}{2} \\ a_8 = &\quad a_4 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{4}{8} = 1 + \tfrac{3}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

   Indukcí lze dokázat, že $a_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ a číslo $1 + \frac{n}{2}$ může být libovolně velké.

2. Množina $B = \{1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, ...\}$ je ohraničená shora, $b \leq \frac{\pi^2}{6}$ pro každé $b \in B$. (Bude dokázáno později.)

1.1.3 Definice

Buď $A \subseteq M$, kde M je množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$. Řekneme, že $a \in A$ je *maximum* nebo *největší prvek* (*minimum* nebo *nejmenší prvek*) a píšeme $a = \max A$ ($a = \min A$), jestliže pro každé $x \in A$ platí $x \leq a$ ($a \leq x$).

1.1.4 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$ a buď $A \subseteq M$. Řekneme, že $a \in M$ je *supremum* množiny A, jestliže je nejmenší horní závorou množiny A, t.j. jestliže platí

(s1) $(\forall x \in A)\,(x \leq a)$,

(s2) $((\forall x \in A)\,(x \leq b)) \Rightarrow a \leq b$.

Píšeme $a = \sup A$.

1.1.5 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$ a buď $A \subseteq M$. Řekneme, že $a \in M$ je *infimum* množiny A, jestliže je největší dolní závorou množiny A, t.j. jestliže platí

(i1) $(\forall x \in A)\,(a \leq x)$,

(i2) $((\forall x \in A)\,(b \leq x)) \Rightarrow b \leq a$.

Píšeme $a = \inf A$.

1.1.6 Poznámky

1. Podmínku (s2) v 1.1.4 lze nahradit podmínkou

   (s2*) $(p \in M,\, p < a) \Rightarrow (\exists x \in A)\,(p < x)$.

   ($p < a$ je definováno jako $p \leq a$ a současně $p \neq a$; v dalším budeme používat i symboly $\geq, >$.)

   D.: Nechť $a \in M$ splňuje (s2) a nechť $p \in M$, $p < a$. Pak p není horní závora množiny A (jinak by podle (s2) bylo $a \leq p$). Odtud plyne, že existuje $x \in A$ takové, že $x > p$, tedy platí (s2*).
   Nechť $a \in M$ splňuje (s2*) a buď $b \in M$ horní závora množiny A. Kdyby $b < a$, pak by existovalo $x \in A$ takové, že $b < x$ a tedy b by nebyla horní závora množiny A. Je tedy $a \leq b$. □

2. Analogicky lze dokázat, že podmínku (i2) v 1.1.5 lze nahradit podmínkou

   (i2*) $(p \in M,\, p > a) \Rightarrow (\exists x \in A)\,(p > x)$.

3. Libovolná $A \subseteq M$ má nejvýše jedno supremum a nejvýše jedno infimum.

D.: Nechť $a = \sup A$, $b = \sup A$. b je podle (s1) horní závora množiny A, tedy $a \leq b$ podle (s2). Analogicky a je horní závora A, tedy $b \leq a$. Z antisymetrie relace $\leq$ plyne $a = b$.

Analogicky se ukáže platnost tvrzení pro infimum. □

4. Jestliže existuje $\max A$ ($\min A$), pak existuje také $\sup A$ ($\inf A$) a platí $\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$).

D.: Nechť $a = \max A$.

a splňuje (s1) přímo podle definice maxima 1.1.3

Nechť b je horní závora množiny A. Pak $b \geq x$ pro každé $x \in A$, zejména tedy $b \geq a \in A$. Což znamená, že platí (s2).

Tvrzení pro infimum a minimum se dokáže analogicky. □

1.1.7 Definice

Množina reálných čísel je množina $\mathbb{R}$, na níž jsou definovány dvě binárním operace $+$ (sčítání), $\cdot$ (násobení) a jedna binární relace $<$ (menší než), které splňují podmínky

(R1) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a + b = b + a$ (komutativní zákon pro sčítání)

(R2) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativní zákon pro sčítání)

(R3) existuje prvek $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání)

(R4) ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje prvek $-a \in \mathbb{R}$ takový, že $a + (-a) = 0$ (existence opačného prvku)

(R5) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativní zákon pro násobení)

(R6) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativní zákon pro násobení)

(R7) existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 1 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem k násobení)

(R8) ke každému $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že $a \cdot a^{-1} = 1$ (existence inversního prvku)

(R9) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (distributivní zákon)

(R10) každé dva prvky z množiny $\mathbb{R}$ jsou srovnatelné, podrobněji: každá dvojice prvků $a, b \in \mathbb{R}$ splňuje právě jeden ze vztahů $a < b$, $a = b$, $b < a$ (zákon trichotomie)

(R11) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $b < c$, pak také $a < c$ (transitivita relace $<$)

(R12) jestliže pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $a + c < b + c$ (monotonie vzhledem ke sčítání)

(R13) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $0 < c$, pak $a \cdot c < b \cdot c$ (monotonie vzhledem k násobení)

(R14) je-li M neprázdná shora (zdola) ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$ ($\inf M \in \mathbb{R}$)

1.1.8 Poznámky

1. (R1) – (R4) a (R5) – (R8) jsou axiomy komutativní grupy

   (R1) – (R9) jsou axiomy pole

   (R1) – (R13) jsou axiomy uspořádaného pole

   (R1) – (R14) jsou axiomy spojitě uspořádaného pole

   Existuje jediné (až na isomorfismus) uspořádané pole. Axiom (R14) se nazývá axiom spojitosti.

2. Přímka, na níž je zvolen počátek (obraz reálného čísla 0), jednotková délka a orientace (obraz čísla 1) se nazývá *číselná osa*. Existuje prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny reálných čísel na číselnou osu.

3. Druhá část axiomu (R14) (existence infima) je důsledkem první části a ostatních axiomů.

D.: Nejdříve ukážeme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $-(-a) = a$. Vyjdeme z (R4):

$$\begin{array}{rcll} (-a) + (-(-a)) & = & 0 & /\ \text{přičteme } a \text{ zleva} \\ a + ((-a) + (-(-a))) & = & a + 0 & /\ \text{(R2), (R3)} \\ (a + (-a)) + (-(-a)) & = & a & /\ \text{(R4)} \\ 0 + (-(-a)) & = & a & /\ \text{(R1), (R3)} \\ -(-a) & = & a & \end{array}$$

Dále ukážeme, že jestliže $a < b$ pak $-b < -a$:

$$\begin{array}{rcll} a & < & b & /\ +(-a) \text{ zprava} \\ a + (-a) & < & b + (-a) & /\ \text{(R4)} \\ 0 & < & b + (-a) & /\ +(-b) \text{ zleva} \\ (-b) + 0 & < & (-b) + (b + (-a)) & /\ \text{(R3), (R2)} \\ -b & < & ((-b) + b) + (-a) & /\ \text{(R1), (R4)} \\ -b & < & 0 + (-a) & /\ \text{(R1), (R3)} \\ -b & < & -a & \end{array}$$

Nechť nyní je $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ zdola ohraničená, b její dolní závora. Položme $M' = \{-x : x \in M\}$. Pak pro každé $x \in M$ platí $b \leq x$ a tedy podle druhého kroku důkazu je $-x \leq -b$ pro každé $-x \in M'$. To znamená, že M' je shora ohraničená a podle první části (R14) existuje $\sup M' = s \in \mathbb{R}$. Podle (R4) je $-s \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že $-s = \inf M$:

Buď $x \in M$ libovolné. Pak podle (s1) je $-x \leq s$ a podle pomocných tvrzení na začátku důkazu je $-s \leq x$. Poněvadž x bylo libovolné, je podmínka (i1) splněna.

Buď $c \in \mathbb{R}$ takové, že $c \leq x$ pro každé $x \in M$. Pak $-x \leq -c$ pro každé $-x \in M'$ a podle (s2) je $s \leq -c$, tedy $-(-c) \leq -s$. Podle prvního kroku důkazu je $c \leq -s$, což znamená, že i podmínka (i2) je splněna. $\square$

1.1.9 Příklad

Nechť $M = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$. Ukažte, že $\sup M = 1$, $\inf M = 0$.

Ř.: Platnost podmínky (s1): $\frac{m}{n} \leq 1$ pro $m \leq n$.

Platnost podmínky (s2*): Buď $p \in M$, $p < 1$. Je-li $p \leq 0$, pak např. pro $\frac{1}{2} \in M$ platí $p < \frac{1}{2}$. Nechť tedy $p > 0$. Položme $n = 1 + [\frac{1}{1-p}]$. (Přitom $[x]$ označuje celou část z čísla x, t.j. celé číslo z takové, že $x \leq z < x + 1$. Např. $[\pi] = 3$, $[\frac{3}{2}] = 1$, $[-3.5] = -4$ a p.) Pak

$$\begin{array}{rcl} n & > & \frac{1}{1-p} \\ n - np & > & 1 \\ n - 1 & > & np \\ \frac{n-1}{n} & > & p \end{array}$$

a zřejmě $\frac{n-1}{n} \in M$.

Platnost podmínky (i1): $\frac{m}{n} > 0$ pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$.

Platnost podmínky (i2*): Buď $p \in M$, $p > 0$. Je-li $p \geq 1$, pak např. pro $\frac{1}{2} \in M$ platí $\frac{1}{2} < p$. Nechť tedy $p < 1$. Položme $n = 1 + [\frac{1}{p}]$. Pak $n > \frac{1}{p}$ a tedy $p > \frac{1}{n} \in M$. $\square$

1.1.10 Definice

Množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nazýváme *rozšířená množina reálných čísel*, symboly $-\infty$, ∞ nazýváme *nevlastní reálná čísla* (*nevlastní body číselné osy*). Klademe $-\infty < a < \infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Symboly $-\infty$, ∞ nejsou čísla, nedefinujeme pro ně početní operace.

1.1.11 Definice

Buďte a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Uzavřeným intervalem o krajních (koncových, hraničních) bodech* a, b rozumíme množinu

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

otevřeným intervalem množinu

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

polouzavřenými intervaly zprava (resp. zleva) množiny

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Nekonečné intervaly definujeme jako množiny

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Je-li J interval jakéhokoliv typu a $x_0 \in J$, x_0 není krajní, řekneme, že x_0 je vnitřní bod intervalu J.

1.1.12 Definice

Okolím (podrobněji (*symetrickým*) *δ-okolím*, $\delta > 0$) *bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Okolím bodu ∞ rozumíme interval (a, ∞), kde $a \in \mathbb{R}$.
Okolím bodu $-\infty$ rozumíme interval $(-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

δ-okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ budeme označovat symbolem $\mathcal{O}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{O}(x_0)$.

1.1.13 Věta

Okolí bodů z množiny $\mathbb{R}$ mají tyto vlastnosti:

(o1) Jsou-li $\mathcal{O}_1(x_0)$ a $\mathcal{O}_2(x_0)$ dvě okolí téhož bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak $\mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolím bodu x_0.

(o2) Jsou-li x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^*$, $x_1 \neq x_2$, pak existují $\mathcal{O}(x_1)$ a $\mathcal{O}(x_2)$ taková, že $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

D.:

1.
   - $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_1(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $\mathcal{O}_2(x_0) = (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolím bodu x_0.
   - $x_0 = \infty$, $\mathcal{O}_1(x_0) = (a_1, \infty)$, $\mathcal{O}_2(x_0) = (a_2, \infty)$. Položme $a = \max\{a_1, a_2\}$. Pak $\mathcal{O}(x_0) = (a, \infty) = \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolím bodu ∞.
   - $x_0 = -\infty$. Platnost tvrzení ukážeme analogicky jako v předchozím případě.
2. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x_1 < x_2$.
   - $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$. Položme $\delta = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$. Pak $\mathcal{O}(x_1) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $\mathcal{O}(x_2) = (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ jsou okolí bodů x_1, x_2 s požadovanou vlastností. (Volba $\delta = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$ samozřejmě není jediná možná. Stačí volit $\delta = r(x_2 - x_1)$, kde $r \leq \frac{1}{2}$.)
   - $-\infty < x_1 < x_2 = \infty$. Nechť $\delta > 0$ je libovolné a položme $a = x_1 + 2\delta$.
     Pak $\mathcal{O}(x_1) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $\mathcal{O}(x_2) = (a, \infty)$ mají požadovanou vlastnost.
   - Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech.

□

1.1.14 Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. *Ryzím okolím* bodu x_0 rozumíme množinu $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Okolí nevlastního bodu je vždy ryzí.
Ryzí okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{O}'(x_0)$.

1.1.15 Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. *Pravým* (resp. *levým*) *δ-okolím* bodu x_0 rozumíme interval $[x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0]$). *Ryzím pravým* (resp. *levým*) *δ-okolím* bodu x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0)$).

Pravé (resp. levé) δ-okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{P}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{P}(x_0)$ (resp. $\mathcal{L}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{L}(x_0)$).
Ryzí pravé (resp. levé) δ-okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{P}'_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{P}'(x_0)$ (resp. $\mathcal{L}'_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{L}'(x_0)$).

1.1.16 Poznámky

1. Také pravá a levá okolí, ryzí okolí mají vlastnosti (o1), (o2) z věty 1.1.13.

   D.: Snadnou modifikací důkazu 1.1.13. □

2. Buď $J \subseteq \mathbb{R}$ interval a buď x_0 vnitřní bod intervalu J. Pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq J$.

   D.: Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ jsou krajní body intervalu J.
   - Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, položíme $\delta = \frac{1}{2}\min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Pak $\delta > 0$ a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je požadované okolí.
   - Jsou-li $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, položíme $\delta = \frac{1}{2}(x_0 - a)$. Pak $\delta > 0$ a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je opět požadované okolí.
   - Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech.

   □

1.1.17 Věta

1. Mezi dvěma libovolnými reálnými čísly $x_1,\ x_2,\ x_1 < x_2$ leží racionální i iracionální číslo.
2. V libovolném okolí libovolného čísla $x_0 \in \mathbb{R}$ leží racionální i iracionální číslo.

(Stručně: Množina $\mathbb{Q}$ i množina $\mathbb{I}$ je hustá v množině $\mathbb{R}$.)

D.:

1. - Položme $n = [\frac{1}{x_2 - x_1}] + 1,\ m = [nx_1] + 1$. Pak $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a tedy $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dále platí

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} m & > & nx_1 & \quad & m & \leq & nx_1 + 1 & \quad & n & > & \frac{1}{x_2 - x_1} \\ x_1 & < & \frac{m}{n} & & & & & & nx_2 - nx_1 & > & 1 \\ & & & & & & & & nx_2 & > & nx_1 + 1 \end{array}$$

   Odtud $x_1 < \frac{m}{n} \leq \frac{nx_1 + 1}{n} < \frac{nx_2}{n} = x_2$, což znamená, že q je racionální číslo mezi čísly x_1 a x_2.
   - Položme $s = [\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1}] + 1,\ r = [\frac{s}{\sqrt{2}}x_1] + 1$. Pak $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ a $w = \frac{\sqrt{2}\ r}{s} \in \mathbb{I}$, neboť v opačném případě by $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, což by byl spor s tvrzením dokázaným v úvodu tohoto odstavce. Dále platí

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} r & > & \frac{s}{\sqrt{2}}x_1 & \quad & r & \leq & \frac{s}{\sqrt{2}}x_1 + 1 & \quad & s & > & \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \\ x_1 & < & \frac{\sqrt{2}\ r}{s} & & & & & & \frac{s}{\sqrt{2}}x_2 & > & \frac{s}{\sqrt{2}}x_1 + 1 \end{array}$$

   Odtud $x_1 < \frac{\sqrt{2}\ r}{s} \leq \dfrac{\sqrt{2}\ (\frac{s}{\sqrt{2}}x_1 + 1)}{s} < \dfrac{\sqrt{2}\ \frac{s}{\sqrt{2}}x_2}{s} = x_2$, což znamená, že w je iracionální číslo mezi čísly x_1 a x_2.
2. je důsledkem 1., neboť mezi čísly $x_0 - \delta$ a $x_0 + \delta$ leží racionální i iracionální číslo.

□

1.2 Funkce a jejich základní vlastnosti

1.2.1 Definice

Funkce f (podrobněji *reálná funkce jedné reálné proměnné*) je zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$.
Množina $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})((x,y) \in f)\}$ se nazývá *definiční obor funkce f.* (Domain)
Množina $\Im f = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})((x,y) \in f)\}$ se nazývá *obor hodnot funkce f.* (Image)

Je-li f funkce, pak zobrazení $f : \operatorname{Dom} f \to \Im f$ je surjekce (zobrazení na).

Je-li $(x,y) \in f$, píšeme $y = f(x),\ x \mapsto y,\ x \overset{f}{\mapsto} y$.

Prvky z $\operatorname{Dom} f$ se nazývají hodnoty nezávisle proměnné, argument.

Prvky z $\Im f$ se nazývají hodnoty závisle proměnné, funkční hodnota.

Pokud není explicitně uvedeno jinak, definičním oborem rozumíme největší (vzhledem k množinové inklusi) množinu, pro jejíž prvky lze funkční hodnotu vypočítat.

1.2.2 Definice

Grafem funkce f rozumíme množinu $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$, kde (x,y) značí orthogonální kartézské souřadnice bodu v rovině.

1.2.3 Příklad

1. $f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$, $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R},\ \Im f = [0, \infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \operatorname{Dom} f = (-1, 1)$, neboť musí platit

$$\begin{array}{rcl} 1 - x^2 & > & 0 \\ 1 & > & x^2 \\ 1 & > & |x| \end{array}$$

$\Im f = \mathbb{R}$, neboť pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{array}{rcl} r & = & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (1-x^2)r^2 & = & x^2 \\ r^2 & = & (1+r^2)x^2 \\ x_{1,2} & = & \pm\frac{|r|}{\sqrt{1+r^2}} \end{array}$$

Znaménko u x musí být stejné jako znaménko u r, tedy $x = \dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}$

3. $f(x) = [x]$, kde $[x]$ je celá část z čísla x, to jest celé číslo takové, že $[x] \le x < [x] + 1$.

   $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R},\ \Im f = \mathbb{Z}$.

4. Dirichletova funkce $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$.

   $\operatorname{Dom} \chi = \mathbb{R},\ \Im \chi = \{0, 1\}$.

1.2.4 Definice

Buďte f, g funkce, $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \neq \emptyset$. Pak definujeme
součet funkcí f, g předpisem: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$,
rozdíl funkcí f, g předpisem: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$,
součin funkcí f, g předpisem: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$,
podíl funkcí f, g předpisem: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap (\operatorname{Dom} g \setminus \{x \in \operatorname{Dom} g : g(x) = 0\})$,
absolutní hodnotu funkce f předpisem $|f|(x) = |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ pro $x \in \operatorname{Dom} f$.

1.2.5 Definice

Funkce f se nazývá *ohraničená* (*shora ohraničená, zdola ohraničená*), je-li množina $\Im f$ ohraničená (shora ohraničená, zdola ohraničená) podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Funkce f je ohraničená právě tehdy, když existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \leq f(x) \leq b$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} f$, což nastane právě tehdy, když existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq h$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} f$. Analogická tvrzení platí pro funkci ohraničenou shora nebo zdola.

1.2.6 Definice

Funkce f se nazývá *sudá*, jestliže $\quad x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f,\ f(-x) = f(x)$.
Funkce f se nazývá *lichá*, jestliže $\quad x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f,\ f(-x) = -f(x)$.

Příklady sudé funkce: x^{2n}, kde $n \in \mathbb{N}$, $|x|$, $\cos x$.
Příklady liché funkce: x^{2n+1}, kde $n \in \mathbb{N}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

Buď f sudá funkce, G její graf, $(x, y) \in G$. Pak $(-x, y) \in G$. Body (x, y) a $(-x, y)$ jsou symetrické podle osy y, graf sudé funkce je symetrický podle osy y.
Buď f lichá funkce, G její graf, $(x, y) \in G$. Pak $(-x, -y) \in G$. Body (x, y) a $(-x, -y)$ jsou symetrické podle počátku souřadného systému, graf liché funkce je symetrický podle počátku souřadného systému.

1.2.7 Věta

Má-li funkce f vlastnost: $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$, pak ji lze vyjádřit jako součet funkce sudé a liché.

D.: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$; $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$; $\quad g(x)$ je sudá,
$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$; $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x)$; $\quad h(x)$ je lichá. $\square$

1.2.8 Definice

Buď $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Řekneme, že funkce f je *periodická s periodou* p, jestliže
$x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x + p \in \operatorname{Dom} f,\ f(x + p) = f(x)$.

Příklady: $\sin x$, $\cos x$ — perioda 2π,
$\operatorname{tg} x$ — perioda π,
$\sin \frac{x}{2\pi}$ — perioda 1,
konstatntní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ — periodou je jakékoliv $p \in (0, \infty)$.

Buď f funkce periodická s periodou $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak f je periodická s periodou np.

D.: $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x + p \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x + p + p = x + 2p \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow \cdots \Rightarrow x + np \in \operatorname{Dom} f$.
$f(x+np) = f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) = f(x+(n-2)p+p) = f(x+(n-2)p) = \cdots = f(x)$. $\square$

Množina period periodické funkce f je nekonečná, tedy neprázdná a zdola ohraničená nulou. Podle 1.1.7 (R14) existuje $p_0 = \inf\{p : p \text{ je perioda funkce } f\}$. Pokud p_0 je periodou funkce f, nazýváme ji *nejmenší* nebo *základní* periodou funkce f. Periodická funkce nemusí mít nejmenší periodu. Např. periodou Dirichletovy funkce je každé kladné racionální číslo.

1.2.9 Definice

Funkce f se nazývá *rostoucí v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$ a platí

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) < f(x_0) \\ x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) > f(x_0), \end{aligned}$$

stručně: jestliže pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) > 0$.
Funkce f se nazývá *neklesající v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$ a platí

$$\begin{array}{lcl} x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0 & \Rightarrow & f(x) \leq f(x_0) \\ x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0 & \Rightarrow & f(x) \geq f(x_0), \end{array}$$

stručně: jestliže pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) \geq 0$.
Analogicky definujeme funkci *klesající* a *nerostoucí v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$.
Funkce, která je v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ nerostoucí nebo neklesající, se nazývá *monotonní v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$.
Funkce, která je v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$.

Funkce rostoucí v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ nemusí být rostoucí v žádném jiném bodě z $\operatorname{Dom} f$.

1.2.10 Definice

Řekneme, že funkce je *rostoucí* na intervalu J, jestliže $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Řekneme, že funkce je *neklesající* na intervalu J, jestliže $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
Analogicky definujeme funkci *klesající* a *nerostoucí* na intervalu J.
Funkce rostoucí nebo klesající na intervalu se nazývá *ryze monotonní na intervalu*, funkce nerostoucí nebo neklesající na intervalu se nazývá *monotonní na intervalu.*

Monotonie v bodě — *lokální vlastnost*
Monotonie na intervalu — *globální vlastnost*

Slova „interval J“ v předchozí definici lze nahradit slovy „množina $M \subseteq \operatorname{Dom} f$“.

1.2.11 Věta

Funkce f je rostoucí na otevřeném intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť f je rostoucí na J a nechť $x_0 \in J$. J je otevřený $\Rightarrow$ x_0 je vnitřní bod $\Rightarrow$(podle 1.1.16.2) existuje $\mathcal{O}(x_0) \subseteq J$. Tedy $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0$, je $f(x) < f(x_0)$; je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0$, je $f(x) > f(x_0)$. Tedy f je rostoucí v bodě x_0.

„$\Leftarrow$“ Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu J. Připusťme, že f není rostoucí na J. Existují tedy $x_1, x_2 \in J$, že $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$. Označme $M = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) > f(x_1)\}$. Platí

a) $M \neq \emptyset$, neboť f rostoucí v $x_1 \Rightarrow$ ex. $\mathcal{O}(x_1)$, že pro každé $x > x_1$ je $f(x) > f(x_1)$.
b) M je shora ohraničená, neboť x_2 je horní závora M.

Podle 1.1.7 (R14) existuje $x_0 = \sup M \leq x_2$.

– Předpokládejme $x_0 = x_2$. f je rostoucí v bodě $x_2 \Rightarrow$ existuje $\mathcal{O}(x_2) = (x_2 - \delta, x_2 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$, že pro $x \in \mathcal{O}(x_2)$, $x < x_2$ platí $f(x) < f(x_2)$.
Podle 1.1.6(s2*) existuje $x \in M$, $x > x_2 - \delta$. Poněvadž $x \in M$, je $x \leq x_2$. Jest $x \in \mathcal{O}(x_2)$. Pokud $x < x_2$, pak $f(x) < f(x_2)$, pokud $x = x_2$, pak $f(x) = f(x_2)$. Tedy $f(x) \leq f(x_2)$.
Současně $x \in M$ a tedy $f(x) > f(x_1) \geq f(x_2)$. Odtud $f(x) > f(x_2)$ — spor.
– Musí tedy být $x_0 < x_2$. Poněvadž f je rostoucí v x_0, existuje $\mathcal{O}(x_0)$, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) > 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [x_1, x_2]$. Podle 1.1.6(s2*) existuje $x \in M$, $x > x_0 - \delta$ takové, že $x \leq x_0$. $x \in \mathcal{O}(x_0)$ a tedy $f(x) \leq f(x_0)$. Současně $f(x) > f(x_1)$, neboť $x \in M$. Odtud plyne

$$f(x_1) < f(x_0).$$

Zvolme $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$. Pak $f(x) > f(x_0)$. Přitom $x \notin M$, neboť $x > x_0 = \sup M$. Tedy $f(x) \leq f(x_1)$. Odtud plyne

$$f(x_1) > f(x_0).$$

To je spor. □

1.2.12 Poznámky

1. Analogická věta platí pro neklesající, klesající a nerostoucí funkci.
2. Pro uzavřený interval věta neplatí:
   Např. $f(x) = \sin(x)$, $J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. f je rostoucí na celém J, ale není rostoucí v krajních bodech.
3. Ve druhé části důkazu jsme nevyužili předpoklad, že interval J je otevřený. Platí tedy: Je-li funkce f rostoucí v každém bodě libovolného intervalu J, pak je rostoucí na celém intervalu J.

1.2.13 Definice

Buďte f, φ funkce a nechť platí $\Im\varphi \subseteq \operatorname{Dom} f$. Pak

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\exists u \in \mathbb{R})((x,u) \in \varphi,\ (u,y) \in f)\}$$

se nazývá *složená funkce*.
Funkce φ se nazývá *vnitřní složka* funkce F, funkce f se nazývá *vnější složka* funkce F.

$$x \mapsto \varphi(x) = u \mapsto f(u) = f(\varphi(x))$$

Podmínka $\Im\varphi \subseteq \operatorname{Dom} f$ je nutná a dostatečná pro existenci složené funkce. Není-li tato podmínka splněna, lze jí někdy dosáhnout vhodným zúžením $\operatorname{Dom}\varphi$.

1.2.14 Příklady

1. $\varphi(x) = x^2$, $\Im\varphi = [0, \infty)$
   $f(u) = \sin(u)$, $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$. Tedy $\Im\varphi \subseteq \operatorname{Dom} f$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sin x^2$
2. $\varphi(x) = 1 - x^2$, definujeme $\operatorname{Dom} f = [-1, 1]$. Pak $\Im\varphi = [0, 1]$.
   $f(u) = \sqrt{u}$, $\operatorname{Dom} f = [0, \infty)$. $[0, 1] \subseteq [0, \infty)$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\varphi(x) = -x^2$, $\Im\varphi = (-\infty, 0]$
   $f(x) = \log u$, $\operatorname{Dom} f = (0, \infty)$. Složená funkce neexistuje.

Proces skládání funkcí lze opakovat a vytvářet funkce vícenásobně složené. Např.:
$y = \log^2\sqrt{\sin x}$: $\quad y = u^2$
$u = \log v$
$v = \sqrt{w}$
$w = \sin x$

1.2.15 Definice

Nechť f je funkce, která je bijekcí. Pak

$$f^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in f\}$$

se nazývá *inversní funkce* k funkci f.

Z definice plyne: $\operatorname{Dom} f = \Im f^{-1}$, $\Im f = \operatorname{Dom} f^{-1}$, $\quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.
Zobrazení $f : \operatorname{Dom} f \to \Im f$ je surjekce. Aby toto zobrazení bylo bijekcí, musí být injekcí (prostým zobrazením), t.j. $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

1.2.16 Poznámky

1. Graf inversní funkce f^{-1} je symetrický s grafem funkce f podle osy prvního a třetího kvadrantu.
2. Je-li funkce f ryze monotonní, pak je prostá.

   D.: Nechť pro určitost je f rostoucí a buďte $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$, $x_1 \neq x_2$. Pokud $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$, pokud $x_1 > x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$ a tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\square$

1.2.17 Věta

Nechť funkce f je rostoucí (resp. klesající) na množině $\operatorname{Dom} f$. Pak funkce f^{-1} je rostoucí (resp. klesající) na množině $\Im f$.

D.: Nechť f je rostoucí na $\operatorname{Dom} f$ a buďte $y_1, y_2 \in \Im f,\ y_1 < y_2$.
Označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, t.j. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.
Jest $x_1 \neq x_2$ podle 1.2.16.2. Kdyby $x_1 > x_2$, pak by $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, což by byl spor. Platí tedy $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}y_2 = x_2$. □

1.3 Posloupnosti

1.3.1 Definice

Posloupnost je funkce f, pro niž $\operatorname{Dom} f = \mathbb{N}$. (t.j. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

Označení: $f_n = f(n)$, častěji $a_n,\ b_n, \dots$
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, stručně $\{a_n\}$ — posloupnost
a_n — *člen posloupnosti*

Posloupnosti mohou mít vlastnosti: ohraničenost, monotonie, periodicita (s periodou $p \in \mathbb{N}$) zavedené v 1.2. Naopak pojmy inversní nebo složená posloupnost nemají smysl.

Platí: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$
a podobně.

1.3.2 Definice

Řekneme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu* a a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, nebo stručněji $\lim a_n = a,\ a_n \to a$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Posloupnost, která má limitu, se nazývá *konvergentní*.

1.3.3 Věta (o jednoznačnosti limity)

Libovolná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

D.: Připusťme, že pro $\{a_n\}$ platí $\lim a_n = a,\ \lim a_n = b,\ a \neq b$.
Nechť pro určitost $a < b$. Položme $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$.
Tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$
Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,\ b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$,
tedy $b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ a poněvadž $b - \varepsilon = b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2}$

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

platí $\dfrac{b+a}{2} < \dfrac{b+a}{2}$, což je spor. □

1.3.4 Věta

Konvergentní posloupnost je ohraničená.

D.: Nechť $\lim a_n = a$ a buď $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
Buď $h = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a + \varepsilon\}$, $d = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - \varepsilon\}$.
Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $d \leq a_n \leq h$. □

1.3.5 Poznámky

1. Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$, pak $a \leq b$.

   D.: Připusťme $a > b$ a položme $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$ a existují
   $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,
   $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ je $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$.
   Pro $n > n_3 = \max\{n_1, n_2, n_0\}$ nyní je $a - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} < a_n < b_n < b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$ — spor. □

   Tvrzení zůstane v platnosti i za předpokladu $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$.

2. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *skorostacionární*, jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $a_n = a$.
   Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *stacionární*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a$.
   (Skoro)stacionární posloupnost je konvergentní a platí $\lim a_n = a$.

3. Buď $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ buď ohraničená posloupnost. Pak $\lim a_n b_n = 0$.

   D.: $\{b_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow$ existuje $h \in \mathbb{R}$, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{h} > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| = |a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{h}$.
   Pro $n \geq n_0$ platí $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \dfrac{\varepsilon}{h} h = \varepsilon$, tedy $\lim a_n b_n = 0$. □

4. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ je monotonní a neohraničená, pak $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

   D.: Buď $\{a_n\}$ neklesající a $\varepsilon > 0$ libovolné.
   Poněvadž je $\{a_n\}$ neohraničená, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n_0} > \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$.
   Odtud plyne, že pro $n \geq n_0$ platí $\left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = \dfrac{1}{a_n} < \varepsilon$, tedy $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.
   Pro nerostoucí posloupnost se důkaz provede analogicky. □

1.3.6 Věta

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak

1. existuje $\lim |a_n|$ a platí $\lim |a_n| = |a|$,
2. existuje $\lim(a_n + b_n)$ a platí $\lim(a_n + b_n) = a + b$,
3. existuje $\lim a_n b_n$ a platí $\lim a_n b_n = ab$,
4. existuje $\lim(a_n - b_n)$ a platí $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
5. pokud $b \neq 0$, pak existuje $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

D.:

1. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.
   Pro $n \geq n_0$ tedy platí $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim |a_n| = a$.
2. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ a tedy $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

3. Je-li $a = 0$, plyne tvrzení z 1.3.4 a z 1.3.5.3.
   Nechť $a \neq 0$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.3.4 existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   K $\dfrac{\varepsilon}{2h} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2h}$.
   K $\dfrac{\varepsilon}{2|a|} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$.
   Pro $n \geq n_0 \max\{n_1, n_2\}$ platí obě nerovnosti současně, tedy
   $$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| <$$
   $$< \frac{\varepsilon}{2h} h + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4. Plyne z 2., 3. a 1.3.5.2.

5. Podle 1. je $\lim |b_n| = |b|$ a podle předpokladu $|b| > 0$. Tedy k $\dfrac{|b|}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $||b_n| - |b|| < \dfrac{|b|}{2}$, neboli $|b_n| > |b| - \dfrac{|b|}{2} = \dfrac{|b|}{2}$. Odtud plyne, že pro $n \geq n_1$ je $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{2}{|b|}$.
   Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{b^2\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \dfrac{b^2\varepsilon}{2}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ je $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \dfrac{b^2\varepsilon}{2} \dfrac{1}{|b|} \dfrac{2}{|b|} = \varepsilon$ a tedy $\lim \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$.
   Podle 3. je $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim a_n \lim \dfrac{1}{b_n} = a\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$.

□

Poznamenejme, že z 1.3.6.3 a z 1.3.5.2 plyne: Jsou-li $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost s $\lim a_n = a$, pak existuje $\lim(ca_n) = c \lim a_n = ca$.

1.3.7 Věta (o třech posloupnostech, o sevření)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ posloupnosti takové, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$. Jestliže $\lim a_n = \lim c_n = a$, pak také $\lim b_n = a$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, neboli $a_n > a - \varepsilon$.
Dále existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ je $|c_n - a| < \varepsilon$, neboli $c_n < a + \varepsilon$.
Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, neboli $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, což znamená $\lim b_n = a$.□

1.3.8 Příklad

Pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ je $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

D.:

- Pro $a = 1$ plyne tvrzení z 1.3.5.2.
- Buď $a > 1$. Pak $\sqrt[n]{a} \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, kde $\alpha_n \geq 0$.
  Dále $a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \alpha_n^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \alpha_n^{n-1} + \alpha_n^n \geq 1 + n\alpha_n$.
  Odtud $\alpha_n \leq \dfrac{a-1}{n}$. Celkem $0 \leq \alpha_n \leq \dfrac{a-1}{n}$. Podle 1.3.5.4 je $\lim \dfrac{a-1}{n} = a \lim \dfrac{1}{n} - \lim \dfrac{1}{n} = 0$ a tedy podle 1.3.7 a 1.3.5.2 je $\lim \alpha_n = 0$. Podle 1.3.5.2 a 1.3.6.2 je $\lim \sqrt[n]{a} = 1 + \lim \alpha_n = 1$.
- Buď $0 < a < 1$. Pak $b = \dfrac{1}{a} > 1$ a tedy $\lim \sqrt[n]{b} = 1$. Avšak podle 1.3.6.5 je $1 = \lim \sqrt[n]{b} = \dfrac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{a}} = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{a}}$, z čehož plyne $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

□

1.3.9 Věta (o monotonních posloupnostech)

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora ohraničená, pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a zdola ohraničená, pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Je-li monotonní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, pak je konvergentní.

D.: Buď $\{a_n\}$ neklesající a shora ohraničená posloupnost. Podle 1.1.7(R14) existuje $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $a-\varepsilon < a$ a podle 1.1.6(s2*) existuje $a_{n_0} \in \{a_n\}$ takové, že $a_{n_0} > a-\varepsilon$. Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, je $a_n > a-\varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a-\varepsilon < a_n \leq a < a+\varepsilon$, neboli $\lim a_n = a$.
Druhé tvrzení se dokáže analogicky, třetí je důsledkem prvního a druhého. □

1.3.10 Příklad

Posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a konvergentní.
(Značíme $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, jest $\mathrm{e} = 2.71828182846\cdots$.)

D.: S využitím binomické věty a vztahu $\frac{l}{n+1} < \frac{l}{n}$, neboli $1-\frac{l}{n+1} > 1-\frac{l}{n}$ pro všechna $n, l \in \mathbb{N}$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} > \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!}\frac{1}{(n+1)^k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!}\frac{1}{(n+1)^{k-1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n-k+2}{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) > \\
&> \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^{k-1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

Položme $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Pak $a_n \geq 0$ a s využitím nerovnosti $(1+x)^m \geq 1+mx$ pro $x \geq 0,\ m \in \mathbb{N}$ (viz. 1.3.8) dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} = \\
&= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Tedy $a_n \geq a_{n+1}$, posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí, zdola ohraničená nulou. Podle 1.3.9 je konvergentní. Dále podle 1.3.6.2 a 1.3.5.4 platí $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ a tedy podle 1.3.6.5 existuje

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \ \square$$

1.3.11 Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* ∞ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (stručněji $\lim a_n = \infty$, $a_n \to \infty$) jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > h$.
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (stručněji $\lim a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$) jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < h$.
Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, řekneme, že je *určitě divergentní*.
Nemá-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu ani nevlastní limitu, řekneme, že je *oscilující*.

Nahradíme-li v tvrzeních 1.3.3, 1.3.5.1, 1.3.7 slovo „limita“ slovem „nevlastní limita“, zůstanou tato tvrzení v platnosti.

1.3.12 Poznámky

1. Buď $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, $\lim a_n = 0$. Jestliže existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_1$ je $a_n > 0$ (resp. $a_n < 0$, resp. $a_n \neq 0$), pak $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ (resp. $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$, resp. $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$).

   D.: Buď $h > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim a_n = 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_2$ je $|a_n| < \frac{1}{h}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > h$, a tedy $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$.
   Druhé tvrzení se dokáže analogicky, třetí je jejich důsledkem. $\square$

2. Nechť $\lim a_n = \infty$, (resp. $\lim a_n = -\infty$) a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim(a_n + b_n) = \infty$ (resp. $\lim(a_n + b_n) = -\infty$).

   D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $b_n > k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné.
   Poněvadž $\lim a_n = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n > h - k$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a_n + b_n > h - k + k = h$, což znamená $\lim(a_n + b_n) = \infty$.
   Druhé tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

3. Nechť $\lim a_n = \infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = \infty$ (resp. $\lim a_n b_n = -\infty$).
   Nechť $\lim a_n = -\infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = -\infty$ (resp. $\lim a_n b_n = \infty$).

   D.: Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $a_n > \frac{h}{\delta}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n b_n > \frac{h}{\delta}\delta = h$, což znamená $\lim a_n b_n = \infty$.
   Zbývající tvrzení se dokáží analogicky. $\square$

   Předpoklad $b_n > \delta$ pro $n \geq n_1$ nelze zeslabit na $b_n > 0$ pro $n \geq n_1$. Například pro $\{a_n\} = \{n\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ je podle 1.3.5.4 $\lim a_n b_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

4. Nechť $\lim |a_n| = \infty$ a $\{b_n\}$ je ohraničená posloupnost. Pak $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tedy $\left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = \dfrac{1}{|a_n|} < \varepsilon$.
Druhé tvrzení nyní plyne z 1.3.5.3. $\square$

5. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (resp. nerostoucí) a není ohraničená shora (resp. zdola), pak je určitě divergentní a $\lim a_n = \infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$).

   D.: Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné.
   Poněvadž $\{a_n\}$ není ohraničená shora, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > h$.
   Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, pro $n \geq n_0$ je $a_n \geq a_{n_0} > h$, tedy $\lim a_n = \infty$.
   Druhé tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

1.3.13 Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Například $\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$, $\{a_{n^2}\} = \{a_1, a_4, a_9, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=m}^{\infty} = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ jsou posloupnosti vybrané z $\{a_n\}$.

Poznámka: Snadno ověříme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ohraničená shora, ohraničená zdola, ohraničená, stacionární právě tehdy, když každá posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má stejnou vlastnost.

1.3.14 Věta

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $a \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Poněvadž $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_0} \geq n_0$ a $n_k \geq n_{k_0}$ pro každé $k \geq k_0$. Tedy pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Pro $a = \infty$ nebo $a = -\infty$ dokážeme tvrzení analogicky.

„$\Leftarrow$“ je triviální. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ pro každou $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, platí to zejména pro $n_k = k$.

$\square$

1.3.15 Definice

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme *hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \geq n_0$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$.

a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje nekonečně mnoho indexů $m \in \mathbb{N}$ takových, že $|a_m - a| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Například posloupnost $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ má dva hromadné body -1 a 1.

1.3.16 Věta

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k číslu a.

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.
K $\varepsilon_1 = 1$, $n_0 = 1$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$ takové, že $|a_{n_1} - a| < 1$.
K $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ a k $n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ takové, že $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.
K $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ a k $n_2 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ takové, že $|a_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$.
Tímto způsobem postupujeme dále. Výsledkem konstrukce je rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takových, že $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.
Poněvadž $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\frac{1}{k} - 0| = \frac{1}{k} < \varepsilon$ pro každé $k \geq k_0$.
Tedy pro $k \geq k_0$ platí $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon$, což znamená $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

„$\Leftarrow$“ Jestliže existuje $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ — tedy pro nekonečně mnoho indexů k — platí $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená, že a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. $\square$

Z 1.3.14 plyne: Je-li $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak a je jediným hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.

1.3.17 Lemma

Buď $\{a_n\}$ posloupnost a M množina hromadných bodů této posloupnosti. Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li M shora (resp. zdola) ohraničená, pak existuje $\max M$ (resp. $\min M$).

D.: Podle 1.1.7(R14) existuje $a = \sup M$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $a - \varepsilon < a$ a podle 1.1.6(s2*) existuje hromadný bod $m \in M$ takový, že $m > a - \varepsilon$. Tedy $\varepsilon_1 = m - a + \varepsilon > 0$.
Dále $m - \varepsilon_1 = m - (m - a + \varepsilon) = a - \varepsilon$, $m + \varepsilon_1 = m + (m - a + \varepsilon) \leq a + a - a + \varepsilon = a + \varepsilon$, neboť $a = \sup M \geq m$. Odtud plyne, že $(m - \varepsilon_1, m + \varepsilon_1) \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
Podle definice hromadného bodu leží v $(m - \varepsilon_1, m + \varepsilon_1)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tedy i v $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, což znamená, že a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, $a \in M$ a tedy podle 1.1.6.4 $a = \max M$.
Druhá část tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

1.3.18 Věta (Bolzano [1781 – 1848], Weierstrass [1815 – 1897])

Každá ohraničená posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.

D.: Buď $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost, $h \leq a_n \leq H$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Položme $M_k = \{a_n : n > k\}$. $M_k \neq \emptyset$, M_k je shora ohraničená (H je její horní závora). Existuje tedy $b_k = \sup M_k$. Zřejmě $b_k \geq h$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a poněvadž $M_k \supseteq M_{k+1}$, platí $b_k \geq b_{k+1}$. Tedy posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí a zdola ohraničená. Podle 1.3.9 je $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$.
Ukážeme, že b je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $k \geq k_0$ jest $|b_k - b| < \varepsilon$, neboli $b_k < b + \varepsilon$. Pro $k \geq k_0$ je také $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \geq a_k$. Celkem $a_k \leq b_k < b + \varepsilon$.
Připusťme, že b není hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$. Pak v intervalu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ leží pouze konečný počet členů této posloupnosti. To vzhledem k poslední nerovnosti znamená, že existuje $n_0 \geq k_0$ takové, že pro $k \geq n_0$ je $a_k \leq b - \varepsilon$. Tedy i $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \leq b - \varepsilon$.
Podle 1.3.5.1 je $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k \leq b - \varepsilon$, což je spor. $\square$

1.3.19 Důsledky

1. Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.

   D.: plyne z 1.3.16. $\square$

2. Je-li množina hromadných bodů posloupnosti prázdná, je posloupnost neohraničená.

1.3.20 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a M množina jejích hromadných bodů.

- Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \max M$, je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \min M$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \infty$, není-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf a_n = -\infty$.
- Nechť $M = \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$, je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = \infty$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora ani zdola, klademe $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

Číslo $\limsup a_n$ se nazývá *limes superior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, číslo $\liminf a_n$ se nazývá *limes inferior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Stručně: $\limsup a_n$ je největší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená shora,
$\liminf a_n$ je nejmenší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená zdola.

1.3.17 ukazuje, že definice je korektní.

Analogickou úvahou jako v důkazu věty 1.3.18 lze ukázat, že

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} &= \lim_{k\to\infty} \left(\sup\{a_n : n > k\}\right), \\ \liminf_{n\to\infty} &= \lim_{k\to\infty} \left(\inf\{a_n : n > k\}\right). \end{aligned}$$

Zřejmě platí: $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. $\liminf a_n = \limsup a_n$ právě tehdy, když existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim a_n$.

1.3.21 Definice

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

1.3.22 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium konvergence)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní, $\lim a_n = a$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ a pro $m \geq n_0$ je $|a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tedy pro $n \geq n_0$ a $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská. K číslu 1 existuje $\tilde{n}$ takové, že pro $n \geq \tilde{n}$ platí $|a_n - a_{\tilde{n}}| < 1$, tedy $a_{\tilde{n}} - 1 < a_n < a_{\tilde{n}} + 1$.
Položme $h = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}} - 1\}$, $H = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}} + 1\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $h \leq a_n \leq H$, tedy $\{a_n\}$ je ohraničená a podle 1.3.19.1 existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{2}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Současně existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Buď $n \geq n_0$ libovolné. Zvolme $k_1 \geq k_0$ takové, že $n_{k_1} \geq n_0$. Pak
$|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_1}} + a_{n_{k_1}} - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
tedy $\lim a_n = a$.

□

1.4 Diferenční a sumační počet

1.4.1 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Posloupnost $\{\Delta a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy jsou dány vztahem $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ nazýváme *(první) diference (vpřed)* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zřejmě platí: Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí (klesající) právě tehdy, když všechny členy posloupnosti $\{\Delta a_n\}$ jsou kladné (záporné).

1.4.2 Definice

Řekneme, že $k \in \mathbb{N}$ je *uzel posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže $a_k = 0$ nebo $a_k a_{k-1} < 0$.

1.4.3 Věta

Buď $\{a_n\}$ posloupnost, $k \in \mathbb{N}$. Jestliže $a_k > a_{k-1}$ a $a_k \geq a_{k+1}$, pak k je uzel posloupnosti $\{\Delta a_n\}$; jestliže $a_k < a_{k-1}$ a $a_k \leq a_{k+1}$, pak k je uzel posloupnosti $\{\Delta a_n\}$.

D.: Nechť $a_k > a_{k-1},\ a_k > a_{k+1}$. Pak $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k < 0$, $\Delta a_{k-1} = a_k - a_{k-1} > 0$, tedy $(\Delta a_k)(\Delta a_{k-1}) < 0$.
Nechť $a_k > a_{k-1},\ a_k = a_{k+1}$. Pak $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = 0$.
Analogicky lze ukázat platnost druhého tvrzení. □

1.4.4 Věta

Buďte $\{a_n\}, \{b_n\}$ posloupnosti, $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. $\Delta(ca_n) = c\Delta a_n$,
2. $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$,
3. $\Delta(a_n - b_n) = \Delta a_n - \Delta b_n$,
4. $\Delta(a_n b_n) = (\Delta a_n)b_{n+1} + a_n(\Delta b_n) = (\Delta a_n)b_n + a_{n+1}(\Delta b_n)$,
5. Pokud $b_n b_{n+1} \neq 0$, pak $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}$.

D.:

1. $\Delta(ca_n) = ca_{n+1} - ca_n = c(a_{n+1} - a_n) = c\Delta a_n$.
2. $\Delta(a_n + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$.
3. Plyne z 1. a 2.
4. Platí

$$\begin{aligned} \Delta(a_n b_n) &= a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_{n+1} + a_n b_{n+1} - a_n b_n = \\ &= (a_{n+1} - a_n)b_{n+1} + a_n(b_{n+1} - b_n) = (\Delta a_n)b_n + a_{n+1}(\Delta b_n)\,, \end{aligned}$$

takže první vztah platí. Druhý plyne z prvního a z komutativity násobení.

5. $\Delta\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = \dfrac{1}{b_{n+1}} - \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} = -\dfrac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}}$.
Podle 4. nyní je $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\Delta a_n}{b_{n+1}} + a_n\Delta\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = \dfrac{\Delta a_n}{b_{n+1}} - a_n\dfrac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}} = \dfrac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}$.

□

1.4.5 Definice

Buďte $\{a_n\}$ posloupnost, $m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. *Sumu členů posloupnosti* $\{a_n\}$ *v mezích od* m *do* k definujeme vztahem

$$\sum_{i=m}^{k} a_i \;=\; a_m + a_{m+1} + \cdots + a_k\,.$$

1.4.6 Věta

Buďte $\{a_n\},\ \{b_n\}$ posloupnosti, $c \in \mathbb{R},\ m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. Pak

$$\sum_{i=m}^{k} c a_i \;=\; c \sum_{i=m}^{k} a_i\,,$$
$$\sum_{i=m}^{k} (a_i \pm b_i) \;=\; \sum_{i=m}^{k} a_i \pm \sum_{i=m}^{k} b_i\,.$$

D.: Plyne přímo z distributivního a asociativního zákona. □

1.4.7 Věta

Buďte $\{a_n\}$ posloupnost, $m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. Označme $[a_n]_{n=m}^{k} = a_k - a_m$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^{k} \Delta a_i \;=\; [a_i]_{i=m}^{k+1}\,.$$

D.: $\sum\limits_{i=m}^{k} \Delta a_n = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) = a_{k+1} - a_m$. □

Věta ukazuje, že diference a sumace jsou v jistém smyslu inversní operátory.

1.4.8 Věta (Sumace "per partes")

Buďte $\{a_n\},\ \{b_n\}$ posloupnosti, $m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^{k} a_i \Delta b_i \;=\; [a_n b_n]_{n=m}^{k+1} - \sum_{i=m}^{k} (\Delta a_i) b_{i+1}\,.$$

D.: Podle 1.4.7 a 1.4.4.4 platí

$$[a_n b_n]_{n=m}^{k+1} \;=\; \sum_{i=m}^{k} \Delta(a_i b_i) \;=\; \sum_{i=m}^{k} ((\Delta a_i) b_{i+1} + a_i \Delta b_i) \;=\; \sum_{i=m}^{k} (\Delta a_i) b_{i+1} + \sum_{i=m}^{k} a_i \Delta b_i\,.$$

□

Příklad: Najděte součet $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$.

Ř.:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 \;&=\; \sum_{i=1}^{n} i^2((i+1) - i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^2 \Delta i \;=\; \left[i^3\right]_{i=1}^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta i^2\right)(i+1) \;= \\
&=\; (n+1)^3 - 1 - \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^2 - i^2\right)(i+1) \;=\; n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^{n} (2i+1)(i+1) \;= \\
&=\; n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^{n} (2i^2 + 3i + 1) \;=\; n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^{n} 1 - 3\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \;= \\
&=\; n^3 + 3n^2 + 3n - n - 3\frac{n(n+1)}{2} - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \;=\; \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} - 2\sum_{i=1}^{n} i^2\,.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

1.4.9 Věta (Sztolz [1842 – 1903])

1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ryze monotonní posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = c \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{b_n\}$ je neohraničená rostoucí posloupnost. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = c \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

D.: 1. Nechť pro určitost je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

- $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0$ platí

$$c - \varepsilon < \frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}} < c + \varepsilon,$$

a poněvadž $b_{k+1} < b_k$, platí

$$(c-\varepsilon)(b_k - b_{k+1}) < a_k - a_{k+1} < (c+\varepsilon)(b_k - b_{k+1}).$$

Tato nerovnost platí pro každé $k \geq n_0$, tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N},\ m > n > n_0$ platí:

$$\begin{array}{rcccl} (c-\varepsilon)(b_n - b_{n+1}) & < & a_n - a_{n+1} & < & (c+\varepsilon)(b_n - b_{n+1}) \\ (c-\varepsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) & < & a_{n+1} - a_{n+2} & < & (c+\varepsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) \\ & \vdots & & \vdots & \\ (c-\varepsilon)(b_{m-1} - b_m) & < & a_{m-1} - a_m & < & (c+\varepsilon)(b_{m-1} - b_m). \end{array}$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$(c-\varepsilon)(b_n - b_m) < a_n - a_m < (c+\varepsilon)(b_n - b_m).$$

Podle 1.3.5.2 a 1.3.6 je $\lim_{m\to\infty}(c-\varepsilon)(b_n - b_m) = (c-\varepsilon)(b_n - \lim_{m\to\infty} b_m) = (c-\varepsilon)b_n$. Podobně $\lim_{m\to\infty}(c+\varepsilon)(b_n - b_m) = (c+\varepsilon)b_n$, $\lim_{m\to\infty}(a_n - a_m) = a_n$. Tedy podle 1.3.5.1 je

$$(c-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (c+\varepsilon)b_n\ .$$

Poněvadž $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, je $b_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy

$$c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon\ .$$

Tato nerovnost platí pro každé $n > n_0$, což znamená, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

- $c = \infty$. Buď $K \in \mathbb{R}$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0$ platí

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}} > K\ .$$

Odtud pro každé $m, n \in \mathbb{N},\ m > n > n_0$ dostaneme:

$$\begin{array}{rcll} a_k - a_{k+1} & > & K(b_k - b_{k+1}) & \quad / \quad \sum_{k=n}^{m-1} \\ a_n - a_m & > & K(b_n - b_m) & \quad / \quad \lim_{m\to\infty} \\ a_n & \geq & K b_n & \quad / \quad \frac{1}{b_n} \\ \frac{a_n}{b_n} & \geq & K\ , & \end{array}$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

- $c = -\infty$. Analogicky jako předchozí případ.

Je-li $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, provedeme důkaz analogicky.

2. - Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ reálná čísla a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ kladná reálná čísla, $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí $m < \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} < M$, pak

$$m < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k} < M\,.$$

Důkaz provedem úplnou indukcí vzhledem ke k.
$m < \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} < M$ je splněno triviálně.
Z indukčního předpokladu $m < \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1}} < M$, neboli

$$m(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1}) < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} < M(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1})$$

a z předpokladu tvrzení

$$m\beta_k < \alpha_k < M\beta_k$$

dostaneme sečtením dokazovanou nerovnost.

- $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ platí

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < c + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poněvadž $\{b_n\}$ je podle předpokladu neohraničená a rostoucí, lze bez újmy na obecnosti předpokládat $b_{n_1} \geq 0$.
Položme $\alpha_1 = a_{n_1+1} - a_{n_1},\ \alpha_1 = a_{n_1+2} - a_{n_1+1}, \dots, \alpha_k = a_n - a_{n-1}$,
$\beta_1 = b_{n_1+1} - b_{n_1},\ \beta_1 = b_{n_1+2} - b_{n_1+1}, \dots, \beta_k = b_n - b_{n-1}\,.$
Podle pomocného tvrzení je $c - \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} < c + \dfrac{\varepsilon}{2}$, neboli

$$\left|\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| &= \left|\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n} + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c\right| = \left|\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}}\frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c\right| = \\
&= \left|\left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right)\frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n}c + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c\right| = \\
&= \left|\left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right)\frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{(b_n - b_{n_1})c + a_{n_1} - cb_n}{b_n}\right| = \\
&= \left|\left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n}\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c\right|\left|1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right| + \left|\frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n}\right|\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž podle 1.3.12.5 a 1.3.12.4 je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n_1}}{b_n} = 0$ a pro $n > n_1$ je $\dfrac{b_{n_1}}{b_n} \geq 0$, tak existuje $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že pro $n \geq n_2$ platí $0 \leq 1 - \dfrac{b_{n_1}}{b_n} \leq 1$, neboli

$$\left|1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right| \leq 1\,.$$

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} = 0$, existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ platí

$$\left| \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Tedy pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,,$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$.

- $c = \infty$. Buďte $h \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolná čísla.
  Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \infty$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq n_1$ je

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} > 2(h + \varepsilon) \,,$$

neboli vzhledem k tomu, že $b_{k+1} - b_k > 0$

$$a_{k+1} - a_k > 2(h + \varepsilon)(b_{k+1} - b_k) \,.$$

Sečtením těchto nerovnic pro k od n_1 do $n - 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_n - a_{n_1} &> 2(h+\varepsilon)(b_n - b_{n_1}) \\ \frac{a_n}{b_n} > 2(h+\varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) &+ \frac{a_{n_1}}{b_n} \,. \end{aligned}$$

Poněvadž podle 1.3.12.5 a 1.3.12.4 je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n_1}}{b_n} = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n_1}}{b_n} = 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ platí

$$\left| \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{neboli} \quad 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} > \frac{1}{2}$$

a existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_3$ platí

$$\frac{a_{n_1}}{b_n} > -\varepsilon \,.$$

Tedy pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > 2(h+\varepsilon)\frac{1}{2} - \varepsilon = h \,,$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

- $c = -\infty$. Analogicky jako předchozí případ.

$\square$

Poznámky:

• Předpoklad o ryzí monotonii posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ v první části věty obecně nelze vynechat.
Je-li například $a_n = \dfrac{1}{n}$ a $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n - n - 1}{n + n + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = 0$ podle 1.3.12.4, avšak
$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n$ a posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ je oscilující.

• Jestliže neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ a ostatní předpoklady Sztolzovy věty jsou splněny, nelze nic tvrdit o existenci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.
Je-li například $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Přitom

$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}} = \frac{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}{\dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)}} = (-1)^n \frac{2n^2+2n+1}{n^2+n}$$

a posloupnost $\left\{(-1)^n \dfrac{2n^2+2n+1}{n^2+n}\right\} = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{13}{6}, -\frac{25}{12}, \frac{41}{20}, -\frac{61}{30}, \frac{85}{42}, \dots\right\}$ nemá limitu. Ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\,.$$

Příklad: Rozhodněte, zda posloupnost $\left\{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}$ je konvergentní a pokud ano, určete její limitu.

Ř.: Označme $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \ge 0$ a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8(n+\frac{1}{2})} \le$$
$$\le \frac{1}{4} + \frac{1}{8(1+\frac{1}{2})} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} < 1\,,$$

neboli $a_{n+1} < a_n$. To znamená, že $\{a_n\}$ je klesající, zdola ohraničená posloupnost a tedy podle 1.3.9 existuje $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.
Posloupnost $\{(2n)!\}$ je rostoucí a neohraničená, tedy

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2-(n!)^2}{(2n+2)!-(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2((n+1)^2-1)}{((2n)!)^2((2n+2)(2n+1)-1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{4n^2+6n+1} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}} = a\frac{1}{4}\,,$$

neboli $a = \frac{1}{4}a$. Odtud $a = 0$. □

1.5 Elementární funkce

A. Polynomy

1.5.1 Definice

Buďte $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Polynom* (*racionální funkce celistvá*) je funkce tvaru $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
Číslo n se nazývá *stupeň polynomu*, značíme $n = \operatorname{st} P$.
Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ se nazývají *koeficienty polynomu.*
Je-li $\operatorname{st} P = 1$, polynom se nazývá *lineární.*
Je-li $\operatorname{st} P = 2$, polynom se nazývá *kvadratický.*
Je-li $\operatorname{st} P = 3$, polynom se nazývá *kubický.*

Je-li $\operatorname{st} P = 4$, polynom se nazývá *bikvadratický*.
Číslo 0 nazveme *nulovým polynomem*. Nepřiřazujeme mu stupeň.

$$\operatorname{Dom} P = \mathbb{R},\ \Im P = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \operatorname{st} P \text{ je lichý} \\ [a, \infty), & \operatorname{st} P \text{ je sudý},\ a_n > 0 \\ (-\infty, a], & \operatorname{st} P \text{ je sudý},\ a_n < 0 \end{cases}.$$

Komplexní čísla: $\mathbb{C} = \{a + ib :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, kde $i^2 = -1$
$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2)$
Je-li $\alpha = a + ib \in \mathbb{C},\ \beta \in \mathbb{C}$ pak
$\bar{\alpha} = a - ib$ — číslo komplexně sdružené (konjugované)
$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ — absolutní hodnota (modul) komplexního čísla
$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$
$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$
$\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$
$\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \alpha = \bar{\alpha}$

Množina komplexních čísel s operacemi $+$, $\cdot$ splňuje (R1) – (R9) z 1.1.7. Tvoří tedy pole. Toto pole nelze uspořádat.

1.5.2 Definice

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen* (*nulový bod*) polynomu P, jestliže platí $P(\alpha) = 0$.
Je-li α kořenem polynomu P, pak lineární polynom $x - \alpha$ nazveme *kořenovým faktorem* polynomu P.

1.5.3 Základní věta algebry

Každý polynom stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty má komplexní kořen.

Tato věta je známá od 17. století. První (chybný) pokus o důkaz publikoval d'Alembert roku 1746, větu dokázal Gauss roku 1799.

1.5.4 Věta

Buď $P(x)$ polynom, $\operatorname{st} P = n \geq 1$. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu P právě tehdy, když existuje polynom Q, $\operatorname{st} Q = n - 1$ takový, že $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, α je kořenem P. Pak

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(\alpha) = \\ &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 - (a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) = \\ &= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha) + a_0(1 - 1). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $(x^k - \alpha^k) : (x - \alpha) = x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + x^{k-3}\alpha^2 + \cdots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}$. Tedy $P(x) = a_n(x-\alpha)(x^{n-1}+x^{n-2}\alpha+\cdots+\alpha^{n-1})+a_{n-1}(x-\alpha)(x^{n-2}+x^{n-3}\alpha+\cdots+\alpha^{n-2})+\cdots+a_1(x-\alpha)$.
Označíme $Q(x) = a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1$ a dostaneme tvrzení.

„$\Leftarrow$“ je zřejmé.

□

$P(x)$, $\operatorname{st} P = n \geq 1$. Podle 1.5.3 má P kořen α_1, a tedy $P(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x)$.
Je-li $\operatorname{st} Q_1 \geq 1$, pak $Q_1(x) = (x - \alpha_2)Q_2(x)$, tedy $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_2(x)$.
Analogicky pokračujeme a po n krocích dostaneme $P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$.
Může se stát, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k,\ k \leq n$. Pak $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k) = (x - \alpha_1)^k$. Celkem $P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\cdots(x - \alpha_m)^{k_m}$, přičemž $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N},\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

1.5.5 Definice

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *k-násobný kořen* polynomu $P(x)$, jestliže $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom nemající kořen α.
(1-násobný kořen se nazývá *jednoduchý*.)

1.5.6 Věta (o rozkladu polynomu na kořenové faktory)

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom, $\operatorname{st} P = n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jsou všechny jeho navzájem různé kořeny, přičemž α_1 je k_1-násobný, α_2 je k_2-násobný,$\ldots$, α_m je k_m-násobný. Pak

$$\begin{aligned} &P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m},\\ &k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N},\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\,. \end{aligned}$$

Důsledek: Polynom stupně n má právě n kořenů, jestliže k-násobný kořen počítáme k krát.

1.5.7 Příklad

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^3(x^2+x+1) - (x^2+x+1) = (x^3-1)(x^2+x+1) = \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) = (x-1)\left(x - \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(x - \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

1.5.8 Věta

Nechť polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ má reálné koeficienty a komplexní kořen α. Pak má také komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha}$ a násobnosti kořenů α a $\bar{\alpha}$ jsou stejné.

D.: Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\bar{x} = x$ a tedy $\overline{P(x)} = \bar{a}_n \bar{x}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = P(x)$.
Podle 1.5.6 je $P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$ a tedy
$\overline{P(x)} = a_n(x-\bar{\alpha}_1)^{k_1}(x-\bar{\alpha}_2)^{k_2}\cdots(x-\bar{\alpha}_m)^{k_m}$. Z rovnosti $\overline{P(x)} = P(x)$ plyne tvrzení. $\square$

Polynom s reálnými koeficienty se nazývá *reálný polynom*.

1.5.9 Věta (o rozkladu reálného polynomu v reálném oboru na ireducibilní polynomy)

Buď $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ reálný polynom, $\operatorname{st} P = n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jsou všechny jeho reálné kořeny, přičemž α_1 je k_1-násobný, $\ldots$, α_m je k_m-násobný. Nechť $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \ldots, a_r \pm ib_r$ jsou všechny jeho imaginární kořeny, přičemž $a_1 \pm ib_1$ je l_1-násobný, $\ldots$, $a_r \pm ib_r$ je l_r násobný. Pak je

$$\begin{aligned} &P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}[(x-a_1)^2+b_1^2]^{l_1}[(x-a_2)^2+b_2^2]^{l_2}\cdots[(x-a_r)^2+b_2^r]^{l_r}\,,\\ &k_1 + k_2 + \cdots + k_m + 2l_1 + 2l_2 + \cdots + 2l_r = n\,. \end{aligned}$$

D.: Podle 1.5.6 a 1.5.8 v rozkladu polynomy $P(x)$ vystupuje součin faktorů
$(x-(a_j+ib_j))^{l_j}(x-(a_j-ib_j))^{l_j} = (x^2 - (a_j+ib_j)x - (a_j-ib_j)x + (a_j+ib_j)(a_j-ib_j))^{l_j} =$
$= (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2 + i(a_j b_j - a_j b_j))^{l_j} = (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{l_j} = [(x-a_j)^2 + b_j^2]^{l_j}$. $\square$

Faktory $(x-a_j)^2+b_j^2$ se někdy nahrazují kvadratickým polynomem $x^2+p_j x+q_j$ se záporným diskriminantem $p_j^2 - 4q_j$.

1.5.10 Příklad

Viz též 1.5.7.
$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(x - \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = (x-1)\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right)^2$
nebo $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2+x+1)^2$.

B. Racionální funkce

1.5.11 Definice

Buďte $P(x)$, $Q(x)$ nenulové polynomy. Funkce $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá *racionální lomená funkce.*
Je-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, funkce R se nazývá *ryze lomená*; je-li $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$, funkce R se nazývá *neryze lomená.*

$\operatorname{Dom} R = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jsou všechny reálné kořeny polynomu $Q(x)$.

Je-li $R(x)$ neryze lomená, lze provést naznačené dělení. Výsledkem je polynom $S(x)$ a zbytek — polynom $T(x)$, který je buď nulový nebo $\operatorname{st} T < \operatorname{st} Q$. Tedy $R(x) = S(x)$ nebo $R(x) = S(x) + \dfrac{T(x)}{Q(x)}$. Odtud plyne, že platí

1.5.12 Poznámka

Neryze lomená funkce je buď polynomem nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

1.5.13 Lemma

Buď $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce a nechť α je reálný k-násobný kořen polynomu $Q(x)$, tj. $Q(x) = (x-\alpha)^k Q_1(x)$, $Q_1(\alpha) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$ taková, že pro všechna $x \in \operatorname{Dom} R$ platí

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde $P_1(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\operatorname{st} P_1 < \operatorname{st} Q_1$.

D.: Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \dfrac{a}{(x-\alpha)^k} + \dfrac{P(x) - aQ_1(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)}$.
Položme $a = a_k = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Pak $P(\alpha) - a_k Q_1(\alpha) = 0$.
Je-li $P(x) - a_k Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí.
Nechť $P(x) - a_k Q_1(x)$ není nulový. Pak α je jeho kořen a podle 1.5.4 je $P(x) - \alpha_k Q_1(x) = (x-\alpha) P_k(x)$,
$\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \dfrac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \dfrac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$.
Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\dfrac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$ a po k krocích dostaneme tvrzení. $\square$

1.5.14 Lemma

Buď $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce a nechť $\alpha = a + ib$ je imaginární r-násobný kořen polynomu $Q(x)$, tj. $Q(x) = [(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)$, $Q_1(a+ib) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_r, n_r$, taková, že pro všechna $x \in \operatorname{Dom} R$ platí

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)} = \\ &= \frac{m_r x + n_r}{[(x-a)^2 + b^2]^r} + \frac{m_{r-1} x + n_{r-1}}{[(x-a)^2 + b^2]^{r-1}} + \cdots + \frac{m_2 x + n_2}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \frac{m_1 x + n_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \end{aligned}$$

kde $P_1(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\operatorname{st} P_1 < \operatorname{st} Q_1$.

D.: Pro každá dvě $m, n \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \dfrac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \dfrac{P(x)-(mx+n)Q_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)}$.

Nechť $\dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \dfrac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)} = p+iq$. Položme $m = m_r = \dfrac{q}{b}$, $n = n_r = \dfrac{pb-qa}{b}$. Pak je

$$\begin{aligned} P(\alpha)-(m_r\alpha+n_r)Q_1(\alpha) &= P(\alpha) - \left(\frac{q}{b}a + i\frac{q}{b}b + p - \frac{qa}{b}\right)Q_1(\alpha) = P(\alpha)-(p+iq)Q_1(\alpha) = \\ &= P(\alpha) - \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}Q_1(\alpha) = 0\,. \end{aligned}$$

Je-li $P(x)-(m_r x+n_r)Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí.
Nechť $P(x)-(m_r x+n_r)Q_1(x)$ není nulový. Pak je číslo α jeho kořenem. Podle 1.5.8 je také $\bar{\alpha}$ jeho kořenem a $P(x)-(m_r x+n_r)Q_1(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})P_r(x) = [(x-a)^2+b^2]P_r(x)$,

$\dfrac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \dfrac{m_r x+n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \dfrac{P_r(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}}$.

Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\dfrac{P_r(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}}$ a po r krocích obdržíme tvrzení. $\square$

Zlomky tvaru $\dfrac{a}{(x-\alpha)^k}$, $\dfrac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^r-1}$ nazýváme *parciální zlomky.*

Z 1.5.13 a 1.5.14 plyne

1.5.15 Věta (o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky)

Každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Každému reálnému k-násobnému kořenu α jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha}$$

a každému imaginárnímu r-násobnému kořenu $a+ib$ jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{m_r x+n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{m_{r-1}x+n_{r-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}} + \cdots + \frac{m_2 x+n_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \frac{m_1 x+n_1}{(x-a)^2+b^2}\,.$$

1.5.16 Poznámka

Koeficienty v rozkladu racionální funkce lze vypočítat postupem naznačeným v důkazech pomocných vět 1.5.13 a 1.5.14. V praxi se však používá *metoda neurčitých koeficientů*:

Napíšeme formální tvar rozkladu se zatím neurčenými konstantami. Celou rovnost vynásobíme polynomem $Q(x)$. Tím obdržíme rovnost mezi polynomy platnou pro všechna x s výjimkou kořenů $Q(x)$. Porovnáním určitých koeficientů na levé straně a neurčitých koeficientů na pravé straně obdržíme rovnice pro neznámé konstanty.

Do zmíněné rovnosti mezi polynomy lze též dosazovat konkrétní reálná nebo komplexní čísla. Výhodné je například dosazování reálných kořenů jmenovatele $Q(x)$.

Příklad: Rozložte na parciální zlomky funkci $\dfrac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}$.

Ř.: Rozklad jmenovatele: $x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2)+x-2 = (x^2+1)(x-2)$

Formální tvar rozkladu:
$$\begin{aligned} \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ 3x^2-5x+8 &= A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2) \\ 3x^2-5x+8 &= (A+B)x^2+(C-2B)x+(A-2C) \end{aligned}$$

Dosadíme $x=2$: $12-10+8 = A\cdot 5 \quad \to \quad A = 2$

Koeficient u x^0: $8 = A-2C \quad \to \quad C = \dfrac{A-8}{2} = -3$

Koeficient u x^2: $3 = A+B \quad \to \quad B = 3-A = 1$.

Celkem: $\dfrac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} = \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$. $\square$

C. Funkce exponenciální a logaritmická

Jde o zavedení obecné mocniny a^x pro $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

$x = n \in \mathbb{N}\ :\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ krát}}$

$x = 0\ :\ a^0 = 1;$

$x = -n \in \mathbb{Z}\ :\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$x = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Q}\ :\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ je číslo splňující $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a;$

$x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\ :\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Pro všechna $x, y \in \mathbb{Q},\ a > 0$ platí:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a > 1,\ x < y \Rightarrow a^x < a^y \qquad 0 < a < 1,\ x < y \Rightarrow a^x > a^y$$

Poznamenejme, že podle 1.1.17 ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost racionálních čísel $\{x_n\}$ s $\lim x_n = x$.

1.5.17 Lemma

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel taková, že $\lim x_n = x$, pak existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R}$. Při tom je $\alpha > 0$ a α nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$.

D:

- Nechť $a > 1$. Buď $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x.
  Z $x_1 \le x_2 \le x_3 \cdots$ plyne $a^{x_1} \le a^{x_2} \le a^{x_3} \cdots$ a tedy $\{a^{x_n}\}$ je neklesající.
  Buď $t \in \mathbb{Q},\ t \ge x$. Pak $t \ge x_n$ pro každé n a tedy $a^t \ge a^{x_n}$ pro každé n, což znamená, že $\{a^{x_n}\}$ je shora ohraničená a tedy podle 1.3.4 existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \ge a^{x_n} > 0$.
  Buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x.
  Položíme $z_n = y_n - x_n$. Pak $y_n = z_n + x_n$ a podle 1.3.6 je $\lim z_n = \lim y_n - \lim x_n = x - x = 0$, $a^{y_n} = a^{z_n + x_n} = a^{z_n} a^{x_n}$. Ukážeme, že $\lim a^{z_n} = 1$:
  Podle 1.3.8 je $\lim \sqrt[n]{a} = \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Tedy $\lim a^{-\frac{1}{n}} = \lim \dfrac{1}{a^n} = 1$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_1$ je $1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_2$ je $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.
  Tedy pro $m = \max\{n_1, n_2\}$ platí $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$.
  Poněvadž $\lim z_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ je $-\frac{1}{m} < z_n < \frac{1}{m}$ a tedy $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < a^{z_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$, což znamená, že $\lim a^{z_n} = 1$.

- Nechť $a = 1$. Tvrzení je triviální, neboť $1^{x_n} = 1$ pro každé $x_n \in \mathbb{Q}$.

- Nechť $0 < a < 1$. Pak $b = \frac{1}{a} > 1$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x, pak podle první části důkazu existuje $\beta = \lim b^{x_n}$, přičemž $\beta > 0$ a β nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$. Podle 1.3.6.5 existuje $\lim a^{x_n} = \lim \dfrac{1}{b^{x_n}} = \dfrac{1}{\beta}$. $\square$

1.5.18 Definice

Buď $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. *Exponenciální funkce* $f(x) = a^x$ je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $a^x = \lim a^{x_n}$, kde $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x.

1.5.19 Věta

Nechť $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$. Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má vlastnosti:

1. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R},\ \Im f \subseteq (0, \infty)$.

2. Pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ platí: $a^x a^y = a^{x+y}$,

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

3. Pro $a > 1$ je rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající.

D: 1. Plyne přímo z definice a z 1.5.17.

2. Tvrzení platí pro $x, y \in \mathbb{Q}$. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ takové, že $x_n \to x,\ y_n \to y$.
$a^x a^y = \lim a^{x_n} \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$, neboť $\lim(x_n + y_n) = x + y$.
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ analogicky.
$y = n \in \mathbb{N}$: $(a^x)^y = (a^x)^n = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \dots \cdot a^x}_{n \text{ krát}} = a^{x+x+\dots+x} = a^{nx}$
$y = -n \in \mathbb{Z}$: $(a^x)^y = (a^x)^{-n} = \dfrac{1}{(a^x)^n} = \dfrac{1}{a^{nx}} = a^{-nx} = a^{xy}$
$y = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: $(a^x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{xm}}$
současně $(a^{xy})^n = \left(a^{x\frac{m}{n}}\right) = a^{xm} \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a^{xm}} = a^{xy}$,
takže $a^{xy} = (a^x)^{\frac{m}{n}} = (a^x)^y$.
$y \in \mathbb{I}$: zvolme $\{y_n\} \subseteq \mathbb{Q},\ y_n \to y$. Pak $(a^x)^y = \lim (a^x)^{y_n} = \lim a^{xy_n} = a^{xy}$
podle 1.5.20 (tuto poznámku totiž můžeme považovat v této chvíli již za dokázanou, neboť v jejím důkazu je využit pouze první vztah z části 2., který je již dokázán), neboť $\lim xy_n = x \lim y_n = xy$.

3. Nechť $a > 1,\ x, y \in \mathbb{R},\ x < y$. Zvolme $u, v \in \mathbb{Q},\ x \le u < v \le y$. Platí $a^u < a^v$.
Buď $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x a buď $\{y_n\}$ nerostoucí posloupnost racionálních čísel s limitou y. Pak
$x_n \le x \le u$, což znamená, že $a^{x_n} \le a^u$ a tedy $\lim a^{x_n} = a^x \le u$.
$v \le y \le y_n$, což znamená, že $a^{y_n} \ge a^v$ a tedy $\lim a^{y_n} = a^y \ge v$.
Z nerovnosti $a^u < a^v$ plyne $a^x < a^y$.
Případ $0 < a < 1$ analogicky. □

Později (1.7.17) bude dokázáno, že $\Im f = (0, \infty)$.

1.5.20 Poznámky

1. Je-li $x = \dfrac{m}{p} \in \mathbb{Q}$, definice 1.5.18 souhlasí s definicí $a^{\frac{m}{p}}$. (Stačí volit $x_n = \dfrac{m}{p}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.)

2. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost reálných čísel s $\lim x_n = x$, pak $\lim a^{x_n} = a^x$.

   D.: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $y_n \in \mathbb{Q}$ tak, aby $x_n - \frac{1}{n} < y_n \le x_n$ (to lze podle 1.1.17).
   Podle 1.3.7 je $\lim y_n = x$. Tedy $\lim a^{y_n} = a^x$ a dále
   $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n + x_n - y_n} = \lim a^{y_n} \lim a^{x_n - y_n} = a^x \lim a^{x_n - y_n}$
   a analogicky jako v důkazu 1.5.17 ukážeme, že $\lim a^{x_n - y_n} = 1$. □

Z exponenciálních funkcí má největší význam funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, kde $\mathrm{e} = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Někdy se označuje $\mathrm{e}^x = \exp x$. Tuto funkci nazýváme *přirozená exponenciální funkce*.

1.5.21 Definice

Buď $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$. Inversní funkce k funkci $f(x) = a^x$ se nazývá *logaritmická funkce*. Značíme ji $\log_a x$.

1.5.22 Věta

Buď $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$. Funkce $f(x) = \log_a x$ má vlastnosti:

1. $\operatorname{Dom} f = (0, \infty),\ \Im f = (-\infty, \infty)$.
2. Pro každá dvě $x, y \in (0, \infty)$ platí: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$
pro $x \in (0, \infty)$ a $y \in \mathbb{R}$ platí: $\log_a x^y = y \log_a x$.
3. Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

D: 1., 3. Plyne z 1.5.19 a obecných vlastností inversních funkcí.

2. Označme $\log_a x = u,\ \log_a y = v$. Pak $a^u = x,\ a^v = y$ a
$xy = a^u a^v = a^{u+v}$, tedy $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$,
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, tedy $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = u - v = \log_a x - \log_a y$,
$x^y = (a^u)^y = a^{uy}$, tedy $\log_a x^y = uy = y \log_a x$. $\square$

1.5.23 Poznámka

Buďte $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1 \neq b$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

D.: $y = \log_b x$. Pak $b^y = x$ a tedy $y \log_a b = \log_a b^y = \log_a x$. Odtud $y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$. $\square$

Podobně jako u exponenciální funkce má největší význam logaritmická funkce $\log_{\mathrm{e}} x$. Značí se $\ln x$ a nazývá *přirozená* nebo *přirozený logaritmus*.

Libovolný logaritmus lze převést na přirozený: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
Také obecnou exponenciální funkci lze převést na přirozenou, neboť pro $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^{x \ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = a^x\,.$$

D. Mocninná funkce

1.5.24 Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = x^a$ definovaná vztahem $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$ se nazývá *obecná mocninná funkce*.

1.5.25 Věta

Buď $a \in \mathbb{R}$. Mocninná funkce $f(x) = x^a$ má vlastnosti:

1. $\operatorname{Dom} f = (0, \infty),\ \Im f = (0, \infty)$.
2. Pro každá dvě $x, y \in (0, \infty)$ platí: $(xy)^a = x^a y^a,\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$.
3. Je rostoucí pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$.

D: 1. Plyne z 1.5.19.1 a z 1.5.22.1.

2. $(xy)^a = \mathrm{e}^{a \ln xy} = \mathrm{e}^{a(\ln x + \ln y)} = \mathrm{e}^{a \ln x} \mathrm{e}^{a \ln y} = x^a y^a$.
   Druhý vztah analogicky.

3. Buď $a > 0, 0 < x < y$. Pak podle 1.5.22.3 je $\ln x < \ln y$ a tedy $a \ln x < a \ln y$. Podle 1.5.19.3 je také $\mathrm{e}^{a \ln x} < e^{a \ln y}$, tj. $x^a < y^a$.
   Pro $a < 0$ analogicky. $\square$

1.5.26 Poznámka

Mocninná funkce $f(x) = x^a$ má v některých speciálních případech definiční obor širší než $(0, \infty)$. Zejména:
Je-li $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$.
Je-li $a \in \mathbb{Z},\ a < 0$, pak $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Je-li $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ m, n$ nesoudělná a n liché, pak pro
  $a \geq 0$ je $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$,
  $a < 0$ je $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

E. Funkce goniometrické a cyklometrické

Na jednotkovou kružnici se středem v počátku naneseme od bodu $A = (1, 0)$ oblouk délky $|x|$ v kladném smyslu pro $x \geq 0$ a v záporném smyslu pro $x < 0$. Obdržíme bod B, jehož první souřadnici označíme $\cos x$ a druhou $\sin x$. Dále klademe $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Tento popis není definicí, neboť se používá vágní pojem „délka oblouku“, který nebyl přesně zaveden. *Goniometrické funkce* sin, cos, tg, cotg tedy nejsou zatím přesně definovány. Poněvadž jsou ale velice užitečné, budeme je používat již před jejich přesným definováním.

Vlastnosti goniometrických funkcí:

1. $\operatorname{Dom} \sin = \operatorname{Dom} \cos = \mathbb{R}$,
   $\Im \sin = \Im \cos = [-1, 1]$,
   $\operatorname{Dom} \operatorname{tg} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Dom} \operatorname{cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$,
   $\Im \operatorname{tg} = \Im \operatorname{cotg} = \mathbb{R}$.

2. sin, cos jsou periodické se základní periodou 2π,
   tg, cotg jsou periodické se základní periodou π.

3. sin je rostoucí na $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, klesající na $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
   cos je rostoucí na $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, klesající na $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
   tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   cotg je klesající na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. sin, cos, tg, cotg jsou liché, cos je sudá funkce

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1,\ \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x),\ \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
   pro všechna přípustná x.

6. Součtové vzorce:
$$\begin{aligned}
&\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, && \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x,\\
&\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, && \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,\\
&\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, && \\
&\sin 2x = 2 \sin x \cos x, && \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\\
&|\sin \tfrac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, && |\cos \tfrac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},\\
&\sin x + \sin y = 2 \sin \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2}, && \sin x - \sin y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2},\\
&\cos x + \cos y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2}, && \cos x - \cos y = -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2},\\
&\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)), && \\
&\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), && \sin x \sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).
\end{aligned}$$

7. Jsou-li $A, B \in \mathbb{R},\ A \neq 0$ pak $A\sin x + B\cos x = P\sin(x+q)$, kde $P = \sqrt{A^2+B^2},\ \operatorname{tg} q = \dfrac{B}{A}$.

   D.:

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{B}{A} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}},$$

$$-1 < \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1 \quad , \quad -1 < \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1,$$

$$\cos q = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad \sin q = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\begin{aligned} A\sin x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right) = \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos q \sin x + \sin q \cos x) = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+q). \end{aligned}$$

   $\square$

Funkce cyklometrické jsou funkce inversní k funkcím goniometrickým.

Ve všech případech je nutno zúžit definiční obor příslušné goniometrické funkce tak, aby funkce byla ryze monotonní (tedy prostá). Je přirozené tento interval vzít „co nejblíže počátku“.

Pro	sin	vezmeme interval	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
	cos		$[0, \pi]$
	tg		$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
	cotg		$(0, \pi)$.

Funkce cyklometrické se nazývají *arcus* a značí se arcsin, arccos, arctg, arccotg.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

1. $\operatorname{Dom}\arcsin = \operatorname{Dom}\arccos = [-1,1],\ \Im\arcsin = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \Im\arccos = [0,\pi]$
   $\operatorname{Dom}\operatorname{arctg} = \operatorname{Dom}\operatorname{arccotg} = \mathbb{R},\ \Im\operatorname{arctg} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \Im\operatorname{arccotg} = (0,\pi)$.

2. Pro každé $x \in [-1,1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

   D.: $y = \arcsin x,\ x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - y;\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y \in [0,\pi]$. $\square$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

   D.: $x \in \mathbb{R},\ y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - y)} = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - y$. $\square$

F. Dodatek

- **Polární souřadnice** $r,\ \varphi$.

  Transformace kartézských souřadnic na polární:

  $r = \sqrt{x^2+y^2}$

  φ je řešením soustavy rovnic $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\text{tj. } \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi, & x = 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0 \end{cases}$$

  Transformace polárních souřadnic na kartézské: $x = r\cos\varphi$
  $y = r\sin\varphi$

- **Parametrické vyjádření**
  Buďte $\varphi,\ \psi$ funkce, $J \subseteq \operatorname{Dom}\varphi \cap \operatorname{Dom}\psi$ interval.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in J \end{aligned}$$

  je tzv. parametrické vyjádření nějaké podmnožiny $\mathbb{R}^2$.

1.6 Limita funkce

1.6.1 Definice

Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu* $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ čísla a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ čísla x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Definice dostane konkrétní tvar podle toho, zda $x_0 \in \mathbb{R}$ nebo $x_0 = \pm\infty$ a $a \in \mathbb{R}$ nebo $a = \pm\infty$:

1. Vlastní limita ve vlastním bodě
   - $x_0 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
2. Nevlastní limita ve vlastním bodě
   - $x_0 \in \mathbb{R},\ a = \infty: \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
   - $x_0 \in \mathbb{R},\ a = -\infty: \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < h)$
3. Vlastní limita v nevlastním bodě
   - $x_0 = \infty,\ a \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x)(x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
   - $x_0 = -\infty,\ a \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x)(x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
4. Nevlastní limita v nevlastním bodě
   - $x_0 = \infty,\ a = \infty: \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x > k \Rightarrow f(x) > h)$
   - $x_0 = -\infty,\ a = \infty: \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x < k \Rightarrow f(x) > h)$
   - $x_0 = \infty,\ a = -\infty: \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x > k \Rightarrow f(x) < h)$
   - $x_0 = -\infty,\ a = -\infty: \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x < k \Rightarrow f(x) < h)$

1.6.2 Poznámky

1. V definici 1.6.1 se nevyskytuje žádný požadavek na $f(x_0)$. Existence a hodnota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nezávisí na tom, zda $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, a pokud ano, tak nezávisí na hodnotě $f(x_0)$.
   Existuje-li však $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, musí být funkce f definována v nějakém ryzím okolí bodu x_0.
2. Buďte f, g funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) = g(x)$, pak existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.
3. Logickou negací definice 1.6.1 obdržíme výrok „neplatí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$“: Existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že v každém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 existuje číslo x takové, že $f(x) \notin \mathcal{O}(a)$.
   Jestliže neplatí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, pak buď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \neq a$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje.
4. Existence a hodnota limity funkce f v bodě x_0 je lokální vlastností této funkce.

1.6.3 Příklady

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

   D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Je-li $0 < |x-0| = |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak $|x^2 - 0| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$. $\square$

2. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ pro $g = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

   D.: Stejně jako v 1. $\square$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje.

   D.: Připusťme, že $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x) = a \in \mathbb{R}$.

   Nechť $a \neq 0$. Položme $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné a $x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{I}$. Pak $\chi(x) = 0 \notin \left(a - \dfrac{|a|}{2}, a + \dfrac{|a|}{2}\right)$.
   Je tedy $a = 0$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné a $x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}$. Pak $\chi(x) = 1 \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   Nemůže tedy být $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x) = a \in \mathbb{R}$.
   Připusťme, že $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x) = \infty$. Avšak pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $\chi(x) \in \{0, 1\}$, tedy pro $h > 1$ nemůže být $\chi(x) > h$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$.
   Z podobných důvodů nemůže být $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x) = -\infty$. $\square$

1.6.4 Věta (Heineova podmínka [1821 – 1881])

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \operatorname{Dom} f$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $x_n \neq x_0$ pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\{x_n\}$ je posloupnost splňující předpoklady.
Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné. Pak existuje ryzí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Poněvadž $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ jest $x_n \in \mathcal{O}(x_0)$ a tedy $f(x_n) \in \mathcal{O}(a)$, což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

„$\Leftarrow$“ Nechť platí tvrzení věty.
Zvolme libovolnou $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a \in \mathbb{R}^*$. Ukážeme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.
Připusťme, že existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že v každém ryzím okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 existuje x takové, že $f(x) \notin \mathcal{O}(a)$.

Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ položíme $\mathcal{O}_n(x_0) = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$
Je-li $x_0 = \infty$ položíme $\mathcal{O}_n(x_0) = (n, \infty)$
Je-li $x_0 = -\infty$ položíme $\mathcal{O}_n(x_0) = (-\infty, -n)$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in \mathcal{O}_n(x_0)$ takové, že $f(y_n) \notin \mathcal{O}(a)$. Z konstrukce $\mathcal{O}_n(x_0)$ plyne, že $y_n \to x_0$, $y_n \neq x_0$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$. To ovšem není možné, neboť $f(y_n) \notin \mathcal{O}(a)$.

$\square$

1.6.5 Poznámka

Nechť $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = f(n)$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

D.: Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné. Pak existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro $x > k$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Volme $n_0 = [k] + 1$. Pak pro $n \geq n_0$ je $a_n = f(n) \in \mathcal{O}(a)$ a tedy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. $\square$

Heineova podmínka umožňuje převádět vlastnosti limity a nevlastní limity posloupnosti na vlastnosti limity funkce:

1.6.6 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium pro existenci vlastní limity)

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

D.: 1.3.22 a 1.6.4 □

1.6.7 Věta (vlastnosti limity)

1. Každá funkce má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.
   (viz 1.3.3)

2. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce f ohraničená.
   (viz 1.3.4)
   Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a < 0$), pak existuje ryzí okolí $\mathcal{O}'(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}'(x_0)$ je $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).

   D.: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ a buď $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. Existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, zejména tedy $f(x) > a - \varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. Platnost druhého tvrzení ukážeme analogicky. □

3. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce g ohraničená. Pak je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
   (viz 1.3.5.3)

4. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pak

   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$,
   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = a - b$,
   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$,
   - pokud $b \neq 0$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

   (viz 1.3.6)

5. Nechť f, g, h jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.
   (viz 1.3.7)

6. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $f(x) \neq 0$ (resp. $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$).
   (viz 1.3.12.1)

7. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
   (viz 1.3.12.4)

8. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce g zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$).
(viz 1.3.12.2)

9. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $g(x) \geq \delta > 0$ (resp. $g(x) \leq \delta < 0$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$).
Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $g(x) \geq \delta > 0$ (resp. $g(x) \leq \delta < 0$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$).
(viz 1.3.12.3)

10. Funkce *signum* (znaménko) je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována předpisem $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $g(x) \neq 0$ a $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ (resp. $\operatorname{sgn} f(x) = -\operatorname{sgn} g(x)$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$).
(viz 1.3.12.1 a předchozí tvrzení)

11. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $f(x) < g(x)$. Pak $a \leq b$.
(viz 1.3.5.1)

1.6.8 Věta (o limitě složené funkce)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{y\to\alpha} f(y) = a \in \mathbb{R}^*$. Nechť existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž platí $\varphi(x) \neq \alpha$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$. (Tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} f(y) = a$.)

D.: Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné okolí bodu a. K němu existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ takové, že pro $y \in \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ je $f(y) \in \mathcal{O}(a)$.
K $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$.
Položme $\mathcal{O}(x_0) = (\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap (\mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\})$. Pak pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$ a $\varphi(x) \neq \alpha$, tj. $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Tedy $f(\varphi(x)) \in \mathcal{O}(a)$, neboli $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$. □

1.6.9 Příklady

1. Nechť $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^*$ jest $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

   D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ libovolné ryzí okolí x_0. Pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. □

2. Nechť $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ a dále $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

   D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ je $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.
   Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné a $k = h$. Pak pro $x > k$ je $f(x) = x > k = h$ a pro $x < k$ je $f(x) = x < k = h$. □

3. Buď $P(x)$ polynom. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

   D.: S využitím předchozího výsledku a 1.6.7.4 jest

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} x^n &= \lim_{x\to x_0} x x^{n-1} = \lim_{x\to x_0} x \lim_{x\to x_0} x^{n-1} = x_0 \lim_{x\to x_0} x^{n-1} = x_0 \lim_{x\to x_0} x \lim_{x\to x_0} x^{n-2} = \\ &= x_0 x_0 \lim_{x\to x_0} x^{n-2} = \ldots = x_0^{n-1} \lim_{x\to x_0} x = x_0^n\,. \end{aligned}$$

Tvrzení nyní plyne z 1.6.7.4. $\square$

4. Buď $R(x)$ racionální lomená funkce a $x_0 \in \operatorname{Dom} R$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$.

   D.: plyne z 3. a 1.6.7.4. $\square$

5. $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

   Pro $x \neq 1$ platí $\dfrac{x^4-1}{x^3-1} = \dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ a tedy podle 1.6.2.4 a předchozího výsledku je $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$.

6. Buď $a > 0,\ f(x) = a^x$. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

   D.: plyne z 1.5.20.2 a 1.6.4. $\square$

7. Buď $a > 0,\ f(x) = x^a,\ x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} x^a = x_0^a$.

   D.: plyne z 1.5.24, předchozího tvrzení a 1.6.8. $\square$

8. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0,\ \lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.
   Plyne z geometrického názoru. (Funkce sin a cos nebyly přesně definovány.)

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

   D.: Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí: $0 < \sin x$. Plocha kruhové výseče OAC je $P_0 = \frac{1}{2}x$, plocha trojúhelníka OAC je $P_1 = \frac{1}{2}\sin x$ a plocha trojúhelníka OAB je $P_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Jest $P_1 < P_0 < P_2$, neboli

   $$\begin{array}{ccccc} \sin x & < & x & < & \operatorname{tg} x \\[2ex] 1 & < & \dfrac{x}{\sin x} & < & \dfrac{1}{\cos x} \\[2ex] \cos x & < & \dfrac{\sin x}{x} & < & 1 \end{array}$$

   Všechny funkce v poslední nerovnosti jsou sudé, to znamená, že tato nerovnost platí i pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Dále podle předchozího $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Tvrzení nyní plyne z 1.6.7.5. $\square$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\dfrac{1}{1+\cos x} = 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1.6.10 Poznámka

Předpoklad o existenci ryzího okolí $\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 nelze v 1.6.8 obecně vynechat.
Např. pro $\varphi(x) = 0,\ f(y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$ platí
$f(\varphi(x)) = 1$ a tedy podle 1.6.9.1 pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = 1$,
avšak $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0,\ \lim\limits_{y\to 0} f(y) = 0$.

1.6.11 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu zprava* (resp. *zleva*) rovnou $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a$), jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a existuje pravé (resp. levé) ryzí okolí $(x_0, x_0+\delta)$ (resp. $(x_0-\delta, x_0)$) takové, že pro každé $x \in (x_0, x_0+\delta)$ (resp. $x \in (x_0-\delta, x_0)$) platí $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Limita zprava a limita zleva se souhrnně nazývají *jednostranné limity*.

- $a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
- $a = \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
- $a = -\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < h)$
$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < h)$

1.6.12 Věta

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v tomto bodě limitu zprava i zleva a platí $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a$.

D.: plyne přímo z definic limity a jednostranných limit a z faktu $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. $\square$

1.6.13 Poznámka

I pro jednostranné limity platí analogie Heineovy podmínky 1.6.4:
$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a \;\Leftrightarrow\;$ pro každou $\{x_n\}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\; x_n > x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$,
$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a \;\Leftrightarrow\;$ pro každou $\{x_n\}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\; x_n < x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

V důsledku toho i pro jednostranné limity platí 1.6.6, 1.6.7 a 1.6.8.

1.6.14 Příklad

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$

Ř.:

- Podle 1.3.10 posloupnost $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí a její limita je e, takže podle 1.3.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}\,.$$
- Vyšetříme $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$:
Buďte $x \in (0, \frac{1}{2})$, $n = \left[\dfrac{1}{x}\right]$, tedy $\dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n}$.
Podle 1.3.10 a prvního kroku řešení je
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$
a tedy podle 1.5.19.3 je $\mathrm{e}^x \le \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 1 + \dfrac{1}{n-1}$, $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} > 1 + \dfrac{1}{n+1}$.
Poněvadž $n \le \dfrac{1}{x}$, jest $n + 1 \le \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1+x}{x}$, tedy $\dfrac{x}{1+x} \le \dfrac{1}{n+1}$.
Poněvadž $n + 1 > \dfrac{1}{x}$, jest $n - 1 > \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1-2x}{x}$, tedy $\dfrac{x}{1-2x} > \dfrac{1}{n-1}$.
Celkem
$$\begin{array}{ccccc} 1 + \dfrac{x}{1+x} & < & \mathrm{e}^x & < & 1 + \dfrac{x}{1-2x} \\ \dfrac{x}{1+x} & < & \mathrm{e}^x - 1 & < & \dfrac{x}{1-2x} \\ \dfrac{1}{1+x} & < & \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & < & \dfrac{1}{1-2x} \end{array}$$

a podle 1.6.7.5 je $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Vyšetříme $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x - 1}{x}$:
  Buď $x \in (-\dfrac{1}{2}, 0)$ Položíme $y = -x$. Pak $y \in (0, \frac{1}{2})$ a s využitím předchozího kroku dostaneme

$$
\begin{array}{ccccc}
1 + \dfrac{y}{1+y} & < & e^y & < & 1 + \dfrac{y}{1-2y} \\
\dfrac{1+2y}{1+y} & < & e^y & < & \dfrac{1-y}{1-2y} \\
\dfrac{1-2y}{1-y} & < & e^{-y} & < & \dfrac{1+y}{1+2y} \\
\dfrac{1+2x}{1+x} & < & e^x & < & \dfrac{1-x}{1-2x} \\
\dfrac{x}{1+x} & < & e^x - 1 & < & \dfrac{x}{1-2x} \\
\dfrac{1}{1+x} & > & \dfrac{e^x - 1}{x} & > & \dfrac{1}{1-2x}
\end{array}
$$

  a podle 1.6.7.5 je $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Nyní $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ podle 1.6.12. $\square$

1.6.15 Věta

Nechť funkce f je monotonní v nějakém levém (resp. pravém) ryzím okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$).
Podrobněji:

1. Nechť funkce f je neklesající v nějakém levém ryzím okolí $\mathcal{L}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Je-li f shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, není-li f shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \infty$.

2. Nechť funkce f je nerostoucí v nějakém levém ryzím okolí $\mathcal{L}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Je-li f zdola ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, není-li f zdola ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\infty$.

3. Nechť funkce f je neklesající v nějakém pravém ryzím okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Je-li f zdola ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0)\}$, není-li f zdola ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$.

4. Nechť funkce f je nerostoucí v nějakém pravém ryzím okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Je-li f shora ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0)\}$, není-li f shora ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty$.

D.: Provedeme pouze pro tvrzení 1. Důkazy ostatních lze provést analogicky.

- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (x_0 - \alpha, x_0)$.
  Množina $\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$ je neprázdná a shora ohraničená, tedy podle 1.1.7 (R14) existuje $\sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\} = a \in \mathbb{R}$.
  Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.1.6 (s2*) existuje $x_1 \in \mathcal{L}(x_0)$ takové, že $f(x_1) > a - \varepsilon$. Položíme

$\delta = x_0 - x_1$. Pak je $(x_1, x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \subseteq \mathcal{L}(x_0)$.
Poněvadž f je na $\mathcal{L}(x_0)$ neklesající, pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_1) > a - \varepsilon$.
Poněvadž $a = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \leq a$.
Celkem pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $a - \varepsilon < f(x) \leq a$, což znamená $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$.

- Nechť $x_0 = \infty$ a f je shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (\alpha, \infty)$. Zopakujeme úvahy z předchozího kroku s tím rozdílem, že nedefinujeme δ. Dojdeme k tomu, že pro $x \in (x_1, \infty)$ je $a - \varepsilon < f(x) \leq a$.
- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f není shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (x_0 - \alpha, x_0)$.
  Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Poněvadž f není shora ohraničená, v $(x_0 - \alpha, x_0)$, existuje $x_1 \in (x_0 - \alpha, x_0)$ takové, že $f(x_1) > h$. Položíme $\delta = x_0 - x_1$.
  Poněvadž f je neklesající na $(x_0 - \alpha, x_0)$, pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_1) > h$, což znamená $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \infty$.
- Nechť $x_0 = \infty$ a f není shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (\alpha, \infty)$. Zopakujeme úvahy z předchozího kroku s tím rozdílem, že nedefinujeme δ. Pak pro $x \in (x_1, \infty)$ je $f(x) > h$.

□

Poznámka: (Oboustranná) limita nemusí existovat.

1.6.16 Definice

Řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je *limitní bod* funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže existuje posloupnost$\{x_n\}$ taková, že $x_n \neq x_0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.
Označme $\Omega(f, x_0)$ množinu limitních bodů funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
Je-li funkce f ohraničená shora v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) \neq \emptyset$, klademe
$\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \sup \Omega(f, x_0)$.
Je-li funkce f ohraničená shora v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) = \emptyset$, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
Není-li funkce f ohraničená shora v každém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
Je-li funkce f ohraničená zdola v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) \neq \emptyset$, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \inf \Omega(f, x_0)$.
Je-li funkce f ohraničená zdola v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) = \emptyset$, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
Není-li funkce f ohraničená zdola v každém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Snadno ověříme, že
$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\sup\{f(\xi) : 0 < |x_0 - \xi| < |x_0 - x|\})$$
$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\inf\{f(\xi) : 0 < |x_0 - \xi| < |x_0 - x|\}).$$

Jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak a je limitním bodem funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Zřejmým způsobem lze zavést pravé a levé limitní body a $\limsup\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\limsup\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Přímo z definice plyne

1.6.17 Věta

$\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$. Rovnost nastane právě tehdy, když existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

1.7 Spojité funkce

1.7.1 Definice

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$).

1.7.2 Poznámky

1. Z definice 1.7.1 bezprostředně plyne:
   Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak je v nějakém okolí tohoto bodu ohraničená.

3. Spojitost je definována pouze v bodech z $\mathbb{R}$. Nelze definovat spojitost v nevlastním bodě.

4. Spojitost funkce je lokální vlastností této funkce.

1.7.3 Terminologická poznámka

Není-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a je při tom definovaná na nějakém okolí (případně ryzím okolí) bodu x_0, mohou nastat možnosti:

A) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje

A1) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ existují a jsou reálné různé — *bod nespojitosti 1. druhu*
(Např.: $f(x) = [x]$, $x_0 = 1$)

A2) Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje — *bod nespojitosti 2. druhu*
(Např.: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$; $\chi(x)$, x_0 libovolné)

A3) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ existují, jsou různé a alespoň jedna z nich je nevlastní
(Např.: $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$)

B) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq f(x_0)$

B1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ je nevlastní
(Např.: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$)

B2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $f(x_0) \neq a$ nebo $x_0 \notin \operatorname{Dom} f$ — *bod odstranitelné nespojitosti*
Nespojitost lze odstranit změnou $f(x_0)$ nebo dodefinováním $f(x_0)$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}.$$

(Např.: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, $\quad g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$
Nespojitost odstraníme definováním $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{g}(1) = \frac{1}{2}$)

1.7.4 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

D.: plyne z 1.6.12. □

1.7.5 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava (resp. zleva) právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \geq x_0$ (resp. $x_n \leq x_0$) a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

D.: plyne z 1.6.4 a 1.6.13. □

1.7.6 Věta

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak jsou také funkce $|f|,\ f+g,\ f-g,\ fg$ spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $\dfrac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.

D.: plyne z 1.6.7.4 $\square$

1.7.7 Věta

Nechť funkce φ je spojitá v bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě $\varphi(x_0)$. Pak je také funkce $x \mapsto f(\varphi(x))$ spojitá v bodě x_0.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $\eta > 0$ takové, že pro $y \in (\varphi(x_0) - \eta, \varphi(x_0) + \eta)$ platí $|f(y) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$.
K $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \eta$.
Tedy pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$, což znamená $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. $\square$

Tato věta není důledkem 1.6.8, neboť má jiné předpoklady.

1.7.8 Definice

Řekneme, že funkce f je ***spojitá na intervalu*** $I \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže platí

(i) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I.

(ii) Patří-li levý (resp. pravý) krajní bod intervalu I do tohoto intervalu, pak je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Zejména: Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) právě tehdy, když je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když je spojitá v každém bodě intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost na intervalu je globální vlastnost.

1.7.9 Věta

Nechť funkce f je spojitá a ryze monotonní na intervalu I_1 a zobrazuje tento interval na interval I_2. Pak funkce inversní f^{-1} je spojitá na intervalu I_2.

D.: Nechť f je rostoucí na I_1, $y_0 \in I_2$, y_0 není levý koncový bod I_2. Ukážeme, že f^{-1} je spojitá zleva v bodě $y_0 = f(x_0)$:
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné takové, že $x_0 - \varepsilon \in I_1$. Pak $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0)$. Označme $\delta = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$.
Buď $y \in (y_0 - \delta, y_0]$ libovolný. Poněvadž podle 1.2.17 je f^{-1} rostoucí, je $f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y)$.
$f^{-1}(y_0 - \delta) = f^{-1}(f(x_0) - f(x_0) + f(x_0 - \varepsilon)) = x_0 - \varepsilon$, tedy $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y)$, neboli $f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon$.
Ostatní možnosti rozebereme analogicky. $\square$

Z této věty, z 1.7.6, 1.7.7 a z 1.6.9 bezprostředně plyne

1.7.10 Důsledek

Elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru.

1.7.11 Věta (1. Weierstrassova [1815 – 1897])

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

D.: Sporem. Připusťme, že funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ není ohraničená shora. Pak ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in [a, b]$ takové, že $f(x_n) > n$. Takto definovaná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená ($a \le x_n \le b$) a tedy podle 1.3.19.1 existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z ní vybraná a taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.
Poněvadž $a \le x_{n_k} \le b$, podle 1.3.5.1 je $a \le x_0 \le b$, neboli $x_0 \in [a, b]$.
Poněvadž f je spojitá (případně jednostranně spojitá), podle 1.7.5 je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in \mathbb{R}$.
Současně ale $f(x_{n_k}) > n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, a tedy podle 1.3.5.1 a poznámky za 1.3.11 je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. To je spor.
Analogicky vyloučíme možnost, že by funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nebyla ohraničená zdola. □

Poznámka: Oba předpoklady jsou podstatné.

1.7.12 Věta (2. Weierstrassova [1815 – 1897])

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu své největší i nejmenší hodnoty.

D.: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Podle 1.7.11 je na tomto intervalu ohraničená a tedy existuje $m = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Ukážeme, že existuje $x_1 \in [a, b]$, že $f(x_1) = m$.
Připusťme, že $f(x) < m$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak $m - f(x) > 0$ a tedy podle 1.7.6 je funkce $x \mapsto \dfrac{1}{m - f(x)}$ spojitá. Podle 1.7.11 existuje $K \in \mathbb{R}$, že $\dfrac{1}{m - f(x)} < K$ pro každé $x \in [a, b]$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $K > 0$. Tedy $f(x) < m - \dfrac{1}{K}$. Podle 1.1.6 (s2*) existuje $x_0 \in [a, b]$, že $f(x_0) \ge m - \dfrac{1}{K}$, neboli $m - f(x_0) \le \dfrac{1}{K}$, $K \le \dfrac{1}{m - f(x_0)}$, což je spor.
Analogicky ukážeme, že existuje $x_2 \in [a, b]$, že $x_2 = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. □

1.7.13 Věta (1. Bolzanova [1781 – 1848])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť platí $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f(c) = 0$.

D.: Položme $d = \dfrac{b - a}{2}$. Pak $d \in (a, b)$. Pokud $f(d) = 0$, je $c = d$.
Nechť $f(d) \ne 0$. Jestliže $f(a)f(d) < 0$, položme $a_1 = a$, $b_1 = d$; jestliže $f(a)f(d) > 0$, položme $a_1 = d$, $b_1 = b$.
Jest $b_1 - a_1 = \dfrac{b - a}{2}$, $f(a)f(b_1) < 0, f(a_1)f(b) < 0$, $a_1 \ge a$, $b_1 \le b$.
Dále položme $d_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. Pak $d_1 \in (a_1, b_1) \subseteq (a, b)$. Pokud $f(d_1) = 0$, je $c = d_1$.
Nechť $f(d_1) \ne 0$. Jestliže $f(a_1)f(d_1) < 0$, položme $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$; jestliže $f(a_1)f(d_1) > 0$, položme $a_2 = d_1$, $b_2 = b_1$.
Jest $b_2 - a_2 = \dfrac{b - a}{2^2}$, $f(a)f(b_2) < 0, f(a_2)f(b) < 0$, $a_2 \ge a_1$, $b_2 \le b_1$.
Analogicky postupujeme dále. Buď po konečném počtu kroků nalezneme d_k takové, že $f(d_k) = 0$, nebo dostaneme dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové, že $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$, $f(a)f(b_n) < 0$, $f(a_n)f(b) < 0$.
V prvním případě je $c = d_k$. Nechť nastane druhý případ.
$\{a_n\}$ je neklesající, ohraničená shora číslem b a tedy podle 1.3.9 existuje $c_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le b$. $\{b_n\}$ je nerostoucí, ohraničená zdola číslem a a tedy existuje $c_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \ge a$.
Platí $c_1 - c_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - b}{2^n} = 0$, tedy $c_1 = c_2 = c \in [a, b]$.

Kdyby $f(a)f(c) < 0$ a $f(c)f(b) < 0$, pak by $f(a)f(c)f(c)f(b) > 0$, neboli $f(a)f(b) > 0$, což by byl spor.
Pokud $f(a)f(c) \geq 0$, pak podle 1.3.5.1 je $0 \leq f(a) \lim f(b_n) = \lim f(a)f(b_n) \leq 0$, tedy $f(a)f(c) = 0$, což je možné jen tak, že $f(c) = 0$.
Pokud $f(c)f(b) \geq 0$, pak $0 \leq (\lim f(a_n))f(b) = \lim f(a_n)f(b) \leq 0$, tedy $f(c)f(b) = 0$, což je možné jen tak, že $f(c) = 0$. $\square$

1.7.14 Důsledek (Speciální případ Brouwerovy [1881 – 1966] věty o pevném bodě)

Buď f spojitá funkce zobrazující uzavřený interval $[a, b]$ do sebe. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $f(c) = c$.

D.: Platí $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$. Pokud $f(a) = a$, položíme $c = a$, pokud $f(b) = b$, položíme $c = b$.
Nechť $f(a) > a,\ f(b) < b$. Definujme funkci g předpisem $g(x) = x - f(x)$.
Funkce g je spojitá na $[a, b],\ g(a) < 0,\ g(b) > 0$, takže podle 1.7.13 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = c - f(c) = 0$. $\square$

1.7.15 Věta (2. Bolzanova [1781 – 1848])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

D.: Buďte $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},\ m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\},\ p \in \mathbb{R}$ takové, že $m < p < M$.
Podle 1.7.12 existují $x_1 \in [a, b],\ x_2 \in [a, b]$ takové, že $f(x_1) = M,\ f(x_2) = n$.
$f(x_1) - p > 0,\ f(x_2) - p < 0$, tedy $(f(x_1) - p)(f(x_2) - p) < 0$. Podle 1.7.13 existuje v uzavřeném intervalu s krajními body x_1 a x_2 číslo c takové, že $0 = (f - p)(c) = f(c) - p$, tedy $f(c) = p$. $\square$

1.7.16 Důsledek

Spojitým obrazem uzavřeného intervalu je buď jednoprvková množina nebo uzavřený interval.

1.7.17 Poznámka

Nyní můžeme dokázat tvrzení uvedené za 1.5.19: Je-li $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) = a^x$, pak $\Im f = (0, \infty)$.

D.: Nechť $a > 1$. Vzhledem k 1.5.19.1 stačí ukázat, že $(0, \infty) \subseteq \Im f$. Buď tedy $y_0 \in (0, \infty)$ libovolné.
Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, že $a^{-n_1} < y_0 < a^{n_2}$.
Funkce $f(x) = a^x$ je podle 1.7.10 spojitá na $(-\infty, \infty)$, je tedy spojitá na uzavřeném intervalu $[-n_1, n_2]$.
Podle 1.5.19.3 je

$$f(-n_1) = a^{-n_1} < y_0 < a^{n_2} = f(n_2)$$

a tedy podle 1.7.15 existuje $x_0 \in [-n_1, n_2]$ takové, že $f(x_0) = y_0$. To znamená, že $y_0 \in \Im f$.
Platnost tvrzení dokážeme analogicky i v případě $0 < a < 1$. $\square$

1.7.18 Definice

Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá na intervalu* $I \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě $x_1, x_2 \in I$ taková, že $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

1.7.19 Poznámky

1. Stejnoměrně spojitá funkce na intervalu je na tomto intervalu spojitá.
   Spojitá funkce na intervalu nemusí být na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.

2. Stejnoměrná spojitost je globální vlastnost.

3. Nechť funkce f je stejnoměrně spojitá na otevřeném intervalu (a,b).
   Podle 1.6.6 existují $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) \in \mathbb{R}$. Funkce $\tilde{f}$ zadaná předpisem

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f(x), & x = a \\ f(x), & x \in (a,b) \\ \lim\limits_{x\to b-} f(x), & x = b \end{cases}$$

   je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$.
   (Funkci stejnoměrně spojitou na otevřeném intervalu lze spojitě prodloužit na krajní body tohoto intervalu.)

4. Funkce stejnoměrně spojitá na libovolném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

   D.: Plyne z předchozího tvrzení a 1.7.12. □

1.7.20 Věta (Heine [1821 – 1881] - Cantor [1845 – 1918])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Pak je na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.

D.: Sporem: Připusťme, že f je spojitá na $[a,b]$ nikoliv stejnoměrně. Existuje tedy $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existuje dvojice bodů $x, y \in [a,b]$, že $|x-y| < \delta$ a zároveň $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.
Zejména tedy pro $\delta = \dfrac{1}{n}$ existují $x_n, y_n \in [a,b]$, že $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
Posloupnost $\{x_n\}$ je ohraničená a tedy podle 1.3.19.2 existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]$.
Dále podle 1.3.5.1 $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{n_k} = 0$, tedy $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$, což znamená $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$.
Poněvadž f je spojitá v x_0, je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. To je spor s $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. □

1.8 Cvičení

Určete definiční obor funkcí
1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}}$, 2) $f(x) = \log \sin 2x$.
Rozhodněte, zda funkce je sudá nebo lichá
3) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$, 4) $f(x) = \sqrt{x}$.
Najděte nejmenší periodu funkcí
5) $f(x) = \sin \frac{1}{3}x$, 6) $f(x) = \operatorname{tg} ax$.
Najděte intervaly, na nichž jsou ryze monotonní funkce
7) $f(x) = x + |x|$, 8) $f(x) = 2^{1/x}$.
Najděte inversní funkci k funkci
9) $f(x) = 2^{3x-1}$, 10) $f(x) = x + [x]$.
Rozhodněte, zda je posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená
11) $a_n = 1 - \cos^n \frac{\pi}{n}$, 12) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
Rozhodněte, zda je posloupnost $\{a_n\}$ monotonní
13) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$, 14) $a_n = \log n - n$.
Vypočítejte limitu posloupnosti $\{a_n\}$
15) $a_n = \dfrac{2n^2-n+3}{3n^2+n-5}$ 16) $a_n = \dfrac{3^{n+1}+(-5)^{n-1}}{3^n+(-5)^n}$,
17) $a_n = \sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2-n+1}$, 18) $a_n = \dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}$,
19) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$, 20) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

21) Zjistěte, zda posloupnost $\{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\}$ je konvergentní.

22) Najděte limes superior a inferior posloupnosti $\left\{(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}+\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right)+\sqrt[n]{2}\right\}$.

Polynomy rozložte v reálném oboru

23) $x^4-x^3+2x^2-x+1$, 24) x^6+1.

Racionální funkce rozložte na parciální zlomky

25) $\dfrac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}$, 26) $\dfrac{x-1}{x^4+3x^2+2}$.

27) jaký je vztah mezi grafy funkcí $f(x)=a^x$ a $g(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, $a>0$?

Určete definiční obor funkce f, zjednodušte její vyjádření a znázorněte ji graficky

28) $f(x)=\log_x a$, 29) $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

Vypočítejte

30) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, 31) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$,

32) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, 33) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

34) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, 35) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$,

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$, 37) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)$,

38) $\lim\limits_{x\to1+}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{cotg}\pi x}$, 39) $\lim\limits_{x\to\pi+}\left(\sin^2 x\right)^{\operatorname{tg} x/2}$.

40) Vysvětlete význam podmínky $(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\forall x)(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon)$.

Najděte body nespojitosti následujících funkcí a určete jejich typ

41) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, 42) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$.

Výsledky: 1) $(-\infty,1)\cup[2,3]\cup(4,\infty)$ 2) $\{x\in\mathbb{R}: k\pi<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$ 3) sudá 4) ani sudá, ani lichá 5) 6π 6) $\frac{\pi}{a}$ 7) na $[0,\infty)$ rostoucí 8) na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ klesající 9) $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}(1+\log_2 y)$ 10) $f^{-1}(y)=y-k$ pro $y\in[2k,2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$ 11) ano, $0\le a_n\le 2$ 12) ohraničená zdola $a_n>0$ 13) rostoucí 14) klesající 15) $\frac{2}{3}$ 16) $-\frac{1}{5}$ 17) 2 18) $\frac{4}{3}$ 19) 0 20) ∞ 21) ano; je rostoucí a shora ohraničená 22) $2+\mathrm{e},\ -\mathrm{e}$ 23) $(x^2+1)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)$ 24) $(x^2-\sqrt{3}\,x+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2+1)$ 25) $1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x-2}$ 26) $\frac{x-1}{x^2+1}-\frac{x-1}{x^2+2}$ 27) souměrné kolem osy y 28) $\operatorname{Dom} f=(0,1)\cup(1,\infty),\ f(x)-\frac{\ln a}{\ln x}$ 29) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R},\ f$ je 2-π periodické rozšíření funkce $g(x)=\begin{cases}x, & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ \pi-x, & x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\end{cases}$ 30) $\frac{2}{3}$ 31) $\frac{m}{n}$ 32) $\frac{2}{3}$ 33) $\frac{2}{3}$ 34) $\frac{a}{b}$ 35) $\frac{3}{4}$ 36) $\frac{5}{2}$ 37) $-\infty$ 38) 0 39) ∞ 40) f je ohraničená v $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ 41) $x=1$ odstranitelná, $x=-1$ typu A3 42) $x=0$ druhého druhu

Kapitola 2

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

2.1 Derivace

2.1.1 Definice

Nechť f je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme ji *derivace funkce f v bodě x_0* a označujeme ji $f'(x_0)$.
Je-li tato limita nevlastní, řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci*.
Neexistuje-li tato limita, řekneme, že funkce f *nemá derivaci v bodě* x_0.

2.1.2 Poznámky

1. Má-li funkce f derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě a nějakém jeho okolí definována. (Existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$.) (Viz 1.6.2.1)

2. Funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ nejvýše jednu derivaci. (Viz 1.6.7.1)

3. Derivace je definována pouze v $x_0 \in \mathbb{R}$. Nelze definovat derivaci v ∞ nebo $-\infty$.

4. Existence a hodnota derivace $f'(x_0)$ je lokální vlastností funkce f v bodě x_0.

5. Označíme-li $x = x_0 + h$, lze v definici 2.1.1 psát $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ místo $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

6. Lze definovat i *jednostranné derivace* funkce f v bodě x_0:
   Derivace zleva $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$
   Derivace zprava $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
   Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když v něm má derivaci zprava a derivaci zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. (Viz 1.6.12)

7. Nechť $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ vyjadřuje křivku v rovině (s kartézskými souřadnicemi). Rovnice *tečny* k této křivce v bodě $(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$ je

   $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

   rovnice *normály* v témže bodě je

   $$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

2.1.3 Věta

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ derivaci, je v tomto bodě spojitá.

D.: Nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)+f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right) = \\ &= f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0) = f'(x_0)\cdot 0+f(x_0) = f(x_0)\,,\end{aligned}$$

a tvrzení plyne přímo z definice 1.7.1. $\square$

2.1.4 Poznámky

1. Opačné tvrzení neplatí. Funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci.
   Například pro $f(x)=|x|$ je $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|-|0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1\,,$
   $$f'_-(x_0)=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1\,.$$
2. Analogicky platí: Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ derivaci zprava (resp. zleva), pak je v tomto bodě spojitá zprava (resp. zleva).

2.1.5 Věta

Nechť funkce $f,\ g$ mají derivaci v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$. Pak platí:

1. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
2. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0),\ (f-g)'(x_0) = f'(x_0)-g'(x_0)$.
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0)\neq 0$, pak $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Analogická tvrzení platí i o jednostranných derivacích.

D.:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} = c\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = cf'(x_0)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\pm g(x)-(f(x_0)\pm g(x_0))}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)\pm(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} = f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$
   $= \lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
   (Poslední rovnost platí, poněvadž podle 2.1.3 je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.)
4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\dfrac{1}{g(x)g(x_0)} = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
   Dokazovaný vztah nyní plyne z předchozího.

$\square$

Tvrzení věty lze stručně zapsat:

$$(cu)'=cu',\ (u\pm v)'=u'\pm v',\ (uv)'=u'v+uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Matematickou indukcí lze tvrzení zobecnit:

$$\begin{aligned}(c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n)'(x_0) &= c_1f_1'(x_0)+c_2f_2'(x_0)+\cdots+c_nf_n'(x_0),\\ (f_1f_2f_3\cdots f_{n-1}f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n(x_0)+\\ &\quad +f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n(x_0)+\cdots+\\ &\quad +f_1(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n'(x_0).\end{aligned}$$

2.1.6 Věta (o derivaci složené funkce)

Nechť funkce f má derivaci v bodě $u_0\in\mathbb{R}$ a nechť funkce φ má derivaci v bodě $x_0\in\mathbb{R}$ takovém, že $\varphi(x_0)=u_0$. Pak složená funkce $F: x\mapsto f(\varphi(x))$ má derivaci v bodě x_0 a platí $F'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$.

D.: $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$.
Jestliže existuje ryzí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\varphi(x)\neq\varphi(x_0)$ pro každé $x\in\mathcal{O}(x_0)$, pak podle 1.6.8 je

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{u\to u_0}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)\,.$$

Nechť v každém ryzím $\mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\}$ existují body x takové, pro něž $\varphi(x)=\varphi(x_0)$. Ukážeme, že pak $\varphi'(x_0)=0$ a také $F'(x_0)=0$, tedy že platí dokazovaný vztah.
Buď $\{x_n\}$ taková, že $\varphi(x_n)=\varphi(x_0),\ x_n\neq x_0,\ x_n\to x_0$. Pak podle 1.6.4
$\varphi'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\varphi(x_n)-\varphi(x_0)}{x_n-x_0}=0.$
Buď nyní $\{x_n\}$ libovolná taková, že $x_n\neq x_0,\ x_n\to x_0$. Označme

$$A=\{n\in\mathbb{N}:\ \varphi(x_n)=\varphi(x_0)\}\,,\ B=\{n\in\mathbb{N}:\ \varphi(x_n)\neq\varphi(x_0)\}\,.$$

Pro $n\in A$ jest $\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0}=\dfrac{f(\varphi(x_n))-f(\varphi(x_0))}{x_n-x_0}=0.$
Je-li B konečná, existuje $n_0\in\mathbb{N}$, že pro $n\geq n_0$ je $n\in A$, tedy pro $n\geq n_0$ je $\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0}=0$, což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0}=0.$
Je-li B nekonečná, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subseteq B$. Dále

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{x_{n_k}-x_0}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(\varphi(x_{n_k}))-f(\varphi(x_0))}{\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_0)}\frac{\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_0)}{x_{n_k}-x_0}=$$
$$=f'(\varphi(x_0))\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_0)}{x_{n_k}-x_0}=0,$$

neboť $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{n_k})=\varphi(x_0)$, jelikož φ je spojitá v x_0. Z 1.6.4 plyne $F'(x_0)=0$. □

2.1.7 Věta (o derivaci inversní funkce)

Nechť funkce f je ryze monotonní a spojitá na intervalu J. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu J a nechť funkce f má v tomto bodě derivaci $f'(y_0)\neq0$. Pak funkce f^{-1} inversní k funkci f má derivaci v bodě $x_0=f(y_0)$ a platí $(f^{-1})'(x_0)=\dfrac{1}{f'(y_0)}$.

D.: Poněvadž f je ryze monotonní, pro $x\neq x_0$ platí $y=f^{-1}(x)\neq f^{-1}(x_0)=y_0$. Tedy podle 1.6.8 platí:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{x-x_0}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}}=$$
$$=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}}=\frac{1}{f'(y_0)}.$$

(Předposlední rovnost plyne ze spojitosti funkce f.) □

2.1.8 Definice

Buď $M \subseteq \operatorname{Dom} f$ množina bodů, v nichž má funkce f derivaci. Pak zobrazení $x_0 \mapsto f'(x_0)$ je funkcí s definičním oborem M. Tato funkce se nazývá *derivace funkce* f a označuje se f'.

2.1.9 Přehled vzorců pro derivaci

(1) pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $c' = 0$

(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$

(3) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

(4) $(a^x)' = a^x \ln a$

(5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(10) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(14) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(15) $(cu)' = cu'$

(16) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(17) $(uv)' = u'v + uv'$

(18) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

(19) $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$

(20) $(f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$

D.:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c-c}{x-x_0} = 0.$

(3) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x_0+h} - \mathrm{e}^{x_0}}{h} = \mathrm{e}^{x_0} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$ a vzorec plyne z 1.6.14.

(5) Podle 2.1.7 je $(\ln x)' = \dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}.$

(2) S využitím 2.1.6 dostaneme $(x^a)' = (\mathrm{e}^{a \ln x})' = \mathrm{e}^{a \ln x}(a \ln x)' = x^a \dfrac{a}{x} = ax^{a-1}.$

(4) $(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x (x)' \ln a = a^x \ln a.$

(6) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$

(7) S využitím 1.6.9.9 dostaneme

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$
$$= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x.$$

Dále $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{\cos h + 1} = 1 \cdot 0 = 0.$

(8) $(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin x.$

(9) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

(10) $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

(11) Podle 2.1.7 je $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) Podle 2.1.7 je $(\arccos x)' = \dfrac{1}{(\cos y)'} = -\dfrac{1}{\sin y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(13) Podle 2.1.7 je $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(14) Podle 2.1.7 je $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\frac{-\sin^2 y-\cos^2 y}{\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

(15)-(18) 2.1.5

(19) $(u^v)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = e^{v\ln u}\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$.

(20) 2.1.6

□

2.1.10 Příklady

1. $y = \arccos\sqrt{\dfrac{ax^2+1}{bx^2+1}},\ a,b\in\mathbb{R},\ 0<a<b.$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{ax^2+1}{bx^2+1}}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bx^2+1}{ax^2+1}}\,\frac{2ax(bx^2+1)-2bx(ax^2+1)}{(bx^2+1)^2} = \\ &= -\frac{(bx^2+1)(abx^3+ax-abx^3-bx)}{\sqrt{bx^2-ax^2}\sqrt{ax^2+1}\,(bx^2+1)^2} = -\frac{(a-b)x}{|x|\sqrt{b-a}\sqrt{ax^2+1}\,(bx^2+1)} = \\ &= \operatorname{sgn} x\,\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{ax^2+1}\,(bx^2+1)}\,. \end{aligned}$$

2. $y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$.
$y' = \sqrt[x]{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$

3. Napište rovnici tečny a normály k hyperbole $xy=1$ v bodě $A=(\frac{1}{2},2)$.
$y=\dfrac{1}{x},\ y'=-\dfrac{1}{x^2},\ y'(\frac{1}{2})=-4.$

tečna:
$$\begin{aligned} y-2 &= -4(x-\tfrac{1}{2}) \\ 2y-4 &= -8x+4 \\ 4x+y-4 &= 0 \end{aligned}$$

normála:
$$\begin{aligned} y-2 &= \tfrac{1}{4}(x-\tfrac{1}{2}) \\ 8y-16 &= 2x-1 \\ 2x-8y+15 &= 0 \end{aligned}$$

4. $y=\sqrt[3]{x},\ x_0=0.$
$y' = \frac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$, derivace v bodě 0 je nevlastní.

5. $y=\sqrt[3]{x^2},\ x_0=0.$
$$\begin{aligned} y' = \tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ y'_+(0) &= \lim_{x\to 0+}\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \\ y'_-(0) &= \lim_{x\to 0-}\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \end{aligned}$$
Funkce tedy nemá v bodě 0 derivaci ani nevlastní derivaci.

6. $y=\operatorname{sgn} x,\ x_0=0$
$(\operatorname{sgn} x)'_{x=0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sgn} x-\operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sgn} x}{x} = \infty$
Pro nevlastní derivaci neplatí tvrzení věty 2.1.3. (Proto také nevlastní derivaci nepovažujeme za derivaci.)

2.2 Derivace vyšších řádů, diferenciál

2.2.1 Definice

Buď f funkce, která má derivaci na množině $M_1 \subseteq \operatorname{Dom} f$ a buď $x_0 \in M_1$. Má-li funkce f' derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *druhou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f''(x_0)$.
Obecně: Buď f funkce, která má na množině $M_{n-1} \subseteq \operatorname{Dom} f$ $(n-1)$-tou derivaci $f^{(n-1)}$ a buď $x_0 \in M_{n-1}$. Má-li funkce $f^{(n-1)}$ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *n-tou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f^{(n)}(x_0)$.

2.2.2 Vzorce pro n-tou derivaci

(1) $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$ (2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$

(3) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$ (4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

(5) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (6) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

(7) $$(uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n} uv^{(n)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} \qquad \text{(Leibnizova formule)}$$

D.: Ve všech případech matematickou indukcí. První krok indukce vždy bezprostředně plyne z 2.1.9. Ukážeme indukční krok.

(1) $$(x^a)^{(n)} = \left((x^a)^{(n-1)}\right)' = \left(a(a-1)\cdots(a-n+2)x^{a-n+1}\right)' = a(a-1)\cdots(a-n+2)\left(x^{a-n+1}\right)' =$$
$$= a(a-1)\cdots(a-n+2)(a-n+1)x^{a-n}$$

(2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \left((\mathrm{e}^x)^{(n-1)}\right)' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

(3) $(a^x)^{(n)} = \left((a^x)^{(n-1)}\right)' = \left(a^x \ln^{n-1} a\right)' = (a^x)' \ln^{n-1} a = (a^x \ln a)\ln^{n-1} a = a^x \ln^n a$

(4) $$(\ln x)^{(n)} = \left((\ln x)^{(n-1)}\right)' = \left((-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\right)' = (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{(-n+1)}{x^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

(5) $(\sin x)^{(n)} = \left((\sin x)^{(n-1)}\right)' = \left(\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

(6) Analogicky jako (5)

(7) $$(uv)^{(n)} = \left((uv)^{(n-1)}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} u^{(n-1-i)}v^{(i)}\right)' =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(u^{(n-i)}v^{(i)} + u^{(n-1-i)}v^{(i+1)}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} u^{(n-i)}v^{(i)} =$$
$$= \binom{n-1}{0} u^{(n)}v + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] u^{(n-i)}v^{(i)} + \binom{n-1}{n-1} uv^{(n)} =$$
$$= u^{(n)}v + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} + uv^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} \qquad \square$$

2.2.3 Definice

Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že tato funkce je *diferencovatelná v bodě x_0*, jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$, a existuje funkce $\tau : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$

taková, že $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=0$ a existuje $a\in\mathbb{R}$ takové, že pro $h\in\mathbb{R},\ |h|<\delta$ je $f(x_0+h)-f(x_0)=ah+h\tau(h)$.
V tomto případě se lineární funkce $h\mapsto ah$ nazývá *diferenciál funkce f v bodě x_0* a značí se $\mathrm{d}f(x_0)$.

2.2.4 Poznámky

1. Vyjádření $f(x_0+h)-f(x_0)=ah+h\tau(h)$ je možné při libovolném $a\in\mathbb{R}$. Stačí položit
$$\tau(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h}.$$
Podstatné je však volit a tak, aby $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=0$.

2. Rozdíl $f(x_0+h)-f(x_0)$ se nazývá *přírůstek funkce f v bodě x_0 při přírůstku h nezávisle proměnné* a značí se $\Delta f(x_0)(h)$, stručně $\Delta f(x_0)$.
Pro diferencovatelnou funkci platí $\Delta f(x_0)(h)=\mathrm{d}f(x_0)(h)+h\tau(h)$.

2.2.5 Věta

Funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0\in\mathbb{R}$ právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci. V tomto případě $a=f'(x_0)$.

D.:

$\Rightarrow$: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(a+\tau(h))=a+\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=a.$

$\Leftarrow$: Nechť f má derivaci v bodě x_0. Položme $a=f'(x_0),\ \tau(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}$. Pak
$$\lim_{h\to 0}\tau(h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)=f'(x_0)-f'(x_0)=0.$$

□

Platí tedy $\mathrm{d}f(x_0)(h)=f'(x_0)\cdot h,\ \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)(h)}{h}=f'(x_0)$; stručně $\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

Z tohoto vyjádření plyne geometrická interpretace diferenciálu: Diferenciál je přírůstek funkce naměřený na tečně, tedy $\Delta f(x_0)\approx \mathrm{d}f(x_0)$. Toho lze využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Například: Výpočet $\sqrt{4.02}$. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4,\ h=0.02,\ f(x_0)=\sqrt{4}=2$
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4},\ \mathrm{d}f(4)=f'(4)\cdot h=\frac{0.02}{4}=0.005$
$f(x_0+h)=f(x_0)+\Delta f(x_0)\approx f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)=2+0.005=2.005$
(Přesná hodnota je 2.00499)

Je-li $f(x)=x$, pak $f'(x_0)=1$ pro každé $x_0\in\mathbb{R},\ \mathrm{d}f(x_0)(h)=h$, stručně $\mathrm{d}x=h$. Lze tedy psát $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\mathrm{d}x$, neboli $f'(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, stručně $f'=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Je-li $y=f(x)$, lze psát $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Za použití této symboliky dostanou názorný tvar vzorce pro

- derivaci složené funkce: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$.
- derivaci inversní funkce: $\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}$, neboli $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

2.2.6 Poznámka — zavedení diferenciálů vyšších řádů

Nechť funkce f má v bodě x_0 n-tou derivaci $f^{(n)}(x_0),\ n\geq 1$. *n-tý diferenciál (diferenciál n-tého řádu)* definujeme jako zobrazení $\mathrm{d}^n f(x_0):h\mapsto f^{(n)}(x_0)\cdot h^n$, symbolicky $\mathrm{d}^n f(x_0)=f^{(n)}(x_0)\mathrm{d}x^n$.

Za použití této symboliky lze n-tou derivaci zapsat $f^{(n)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}=\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

2.3 Obecné věty o derivaci

2.3.1 Věta (Rolle [1652 – 1719])

Nechť funkce f splňuje předpoklady:

(i) je spojitá na $[a, b]$,

(ii) v každém bodě intervalu (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci,

(iii) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = 0$.

D.: Je-li f konstantní, lze podle 2.1.9.1 za c vzít libovolný bod z (a, b).
Nechť f není konstantní. Podle 1.7.12 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.
Nechť nejprve $f(c) > f(a) = f(b)$.
Podle (ii) existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Připusťme $f'(c) > 0$, tedy $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.
Existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(c) \setminus \{c\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}(c) \setminus \{c\}$ je $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.
Zvolme $x_1 \in [a, b] \cap (\mathcal{O}(c) \setminus \{c\})$, $x_1 > c$. Pak $x_1 - c > 0$, $f(x_1) - f(c) \leq 0$, tedy $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, což je spor.
Analogicky vyloučíme možnost $f'(c) < 0$. Je tedy $f'(c) = 0$.
Pokud $f(a) = f(b) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, položíme $c = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a provedeme analogické úvahy. □

Z důkazu plyne, že za c lze volit bod, v němž nabývá funkce f své extrémní hodnoty. Neplyne z něho, že jiné body s vlastností $f'(c) = 0$ neexistují.

Všechny tři předpoklady věty jsou podstatné.

2.3.2 Důsledek

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má na tomto intervalu n-tou derivaci. Má-li f na J n kořenů (t.j. existují $x_0, x_1, \dots, x_n \in J$, že $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$), pak existuje $c \in J$ takové, že $f^{(n)}(c) = 0$.

D.: Volme označení tak, že $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.
Na intervalech $[x_i, x_{i+1}] \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ splňuje f předpoklady Rolleovy věty. Existují tedy $c_i^1 \in (x_i, x_{i+1}) \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ taková, že $f'(c_i^1) = 0$.
Na intervalech $[c_i^1, c_{i+1}^1] \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ splňuje f' předpoklady Rolleovy věty. Existují tedy $c_i^2 \in (c_i^1, c_{i+1}^1) \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ taková, že $f''(c_i^2) = 0$.
Analogicky postupujeme dále.
V $n-1$-ním kroku ukážeme, že existují $c_0^{n-1}, c_1^{n-1} \in J$ taková, že $f^{(n-1)}(c_0^{n-1}) = f^{(n-1)}(c_1^{n-1}) = 0$.
Na intervalu $[c_0^{n-1}, c_1^{n-1}]$ splňuje tedy $f^{(n-1)}$ předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje
$c \in (c_0^{n-1}, c_1^{n-1}) \subseteq J$ takové, že $f^{(n)}(c) = 0$. □

2.3.3 Věta (Lagrange [1736 – 1813], 1. věta o střední hodnotě, věta o přírůstku funkce)

Nechť funkce f splňuje předpoklady:

(i) je spojitá na $[a, b]$,

(ii) v každém bodě intervalu (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

D.: Položme $F(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$. Funkce F splňuje předpoklady 2.3.1:

(i): plyne z 1.7.6

(ii): plyne z 2.1.9(2) a 2.1.5.

(iii): $F(a) = (b-a)f(a) - (f(b) - f(a))a = f(a)(b-a+a) - f(b)a = bf(a) - af(b)$
$F(b) = (b-a)f(b) - (f(b) - f(a))b = f(b)(b-a-b) + f(a)b = bf(a) - af(b)$

Existuje tedy $c \in (a,b)$, že $F'(c) = 0$.

$F'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a))$, $0 = F'(c) = (b-a)f'(c) - (f(b) - f(a))$, z čehož $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.
□

2.3.4 Důsledky

1. Splňuje-li funkce f na intervalu $[a,b]$ předpoklady 2.3.3, pak pro libovolná $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$ existuje ξ mezi x_1 a x_2 tak, že platí $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, neboli $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.
$f(x_2) - f(x_1)$ — přírůstek funkce f mezi body x_1, x_2. Odtud je odvozen jeden z názvů věty.

2. Nechť funkce f je spojitá na $[a,b]$ a nechť pro každé $x \in (a,b)$ je $f'(x) = 0$. Pak je f konstatntní na $[a,b]$.

   D.: Buďte $x_1, x_2 \in [a,b]$ libovolné. Pak podle předchozího $f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1) + f(x_1) = f(x_1)$. □

3. Nechť funkce f, g jsou spojité na $[a,b]$. Mají-li f, g vlastní nebo nevlastní derivaci na $[a,b]$ a platí-li $f'(x) = g'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ taková konstanta, že $f(x) = g(x) + c$ identicky na $[a,b]$.

   D.: Položme $h(x) = f(x) - g(x)$. Pak $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ a podle předchozího $h(x) = c$. □

2.3.5 Věta (Cauchy [1789 – 1857], 2. věta o střední hodnotě, věta o podílu přírůstků funkce)

Nechť funkce f, g splňují předpoklady:

(i) jsou spojité na $[a,b]$,

(ii) v každém bodě intervalu (a,b) existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x)$ a vlastní derivace $g'(x) \neq 0$.

Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že platí $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

D.: g splňuje předpoklady 2.3.3, existuje tedy $d \in (a,b)$ takové, že $\dfrac{g(b) - g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0$, z čehož plyne $g(b) - g(a) \neq 0$, takže zlomek na levé straně tvrzení věty má smysl.
Položme $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$. Přímo ověříme, že tato funkce splňuje předpoklady 2.3.1. Existuje tedy $c \in (a,b)$ takové, že $F'(c) = 0$.
Tedy $0 = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$, z čehož plyne tvrzení. □

$$\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = f(t) \end{array} \quad t \in [a,b] \quad \text{— parametrické vyjádření nějaké křivky.}$$

$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ — směrnice sečny, vedené body $A = (g(a), f(a))$, $B = (g(b), f(b))$.

$y = f(g^{-1}(x))$, $y' = \dfrac{f'(g^{-1}(x))}{g'(t)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$, tedy $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ je směrnice tečny v bodě $C = (g(c), f(c))$.

Z důkazu Lagrangeovy věty je vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Rolleovy věty. Z důkazu Cauchyovy věty je vidět, že Cauchyova věta je důsledkem současně Rolleovy a Lagrangeovy věty. Bezprostředně je ale vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Cauchyovy věty a Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty. Všechny tři věty jsou tedy ekvivalentní.

2.3.6 Věta (Johann Bernoulli [1667 – 1748], de l'Hospitalovo pravidlo [1696])

Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$.
Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
Stejné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a funkce $\dfrac{f'}{g'}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, důkaz je snadný:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Důkazy de l'Hospitalova pravidla v ostatních případech lze nalézt v literatuře.

Poznámka: Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$ a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, nelze z toho usuzovat nic o existenci a hodnotě $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Například $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x-\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$, ale $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sin x)'}{(x-\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}$ neexistuje.

2.3.7 Zobecnění:

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť pro $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ platí $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g^{(k)}(x)| = \infty$.
Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, existuje i $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a obě limity jsou shodné.

Jinými slovy: de l'Hospitalovo pravidlo lze používat opakovaně

2.3.8 Poznámka o neurčitých výrazech

Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

1. $a = b = 0$, typ $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. $a = \pm\infty$, $b = \pm\infty$, typ $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. $a = 0$, $b = \pm\infty$, typ $0 \cdot \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, což je některý z předchozích typů.

4. $a = b = \pm\infty$, typ $\infty - \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$, což je typ $\frac{0}{0}$.

5. $a = b = 0$, typ 0^0: $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, což je typ $0 \cdot \infty$.

6. $a = \infty$, $b = 0$, typ ∞^0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, což je typ $0 \cdot \infty$.

7. $a = 1$, $b = \infty$, typ 1^∞: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, což je typ $\infty \cdot 0$.

2.4 Taylorův vzorec

2.4.1 Označení

Buďte f, g funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Symbol $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, stručněji $f = O(g), x \to x_0$ značí: existuje okolí $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ bodu x_0 a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $|f(x)| \le k\, |g(x)|$. Někdy se v takovém případě říká, že *funkce f je malá řádu g*.

Symbol $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, stručněji $f = o(g), x \to x_0$ značí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Někdy se v takovém případě říká, že *funkce f je nekonečně malá řádu g*.

2.4.2 Definice

Buďte f, g spojité funkce, $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Řekneme, že funkce f, g mají v bodě x_0 ***styk řádu alespoň n***, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Funkce f, g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n, pokud $f(x) - g(x) = o\left((x - x_0)^n\right), x \to x_0$.

Poznámka: Je-li rovinná křivka grafem funkce f, která má v $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ derivaci a funkce g je dána předpisem $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, pak funkce f a g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň 1. (Tečna ke grafu funkce má s grafem funkce styk řádu alespoň 1.)

D.: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \;\square$

2.4.3 Věta

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ spojitou n-tou derivaci. Funkce f a g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n právě tehdy, když platí

$$f(x_0) = g(x_0),\; f'(x_0) = g'(x_0),\; f''(x_0) = g''(x_0),\; \cdots,\; f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

D.: V obou částech důkazu budeme používat označení $F(x) = f(x) - g(x)$, $G_k(x) = (x - x_0)^k$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Poněvadž existuje $F^{(n)}(x_0)$, existují na jistém okolí bodu x_0 i $F^{(k)}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ a jsou to podle 2.1.3 funkce spojité v bodě x_0.
Podle 2.2.2.1 je $G_k^{(l)}(x) = k(k-1)\cdots(k-l+1)(x - x_0)^{k-l}$. Všechny funkce $G_k^{(l)}$ jsou v bodě x_0 spojité a platí $G_k^{(l)}(x_0) = \begin{cases} 0, & l \ne k \\ k!, & l = k \end{cases}$.

$\Leftarrow$: Nechť $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0$. Pak s využitím 2.3.7 platí

$$0 = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{G_n^{(n)}(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F^{(n)}(x)}{G_n^{(n)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G_n(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n}.$$

$\Rightarrow$: Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.
Kdyby existovalo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \cdots = F^{(k-1)}(x_0) = 0$ a $F^{(k)}(x_0) \ne 0$, pak by s využitím 2.3.7 platilo

$$\begin{aligned} 0 \;&\ne\; \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{F^{(k)}(x_0)}{G_k^{(k)}(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F^{(k)}(x)}{G_k^{(k)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G_k(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^k} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n}(x - x_0)^{n-k} = 0, \end{aligned}$$

což by byl spor.

$\square$

2.4.4 Definice

Buď f funkce, $a \in \operatorname{Dom} f$. Nechť funkce f má v bodě a derivace až do n-té včetně. Polynom

$$T_{n,f,a}(x) = T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se nazývá *Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě a (se středem a).*
Je-li $a = 0$, nazývá se tento polynom *Maclaurinův.*

2.4.5 Věta

Pro Taylorův polynom platí

$$T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad T_n''(a) = f''(a), \quad \cdots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\ .$$

D.: $T_n(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^n = f(a)$
$T_n'(x) = \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1};\ T_n'(a) = f'(a)$
$T_n''(x) = \frac{f''(a)}{2!}2 + \frac{f'''(a)}{3!}3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)(x-a)^{n-2};\ T_n''(a) = f''(a)$
$\vdots$
$T_n^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)\cdots 2;\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ □

Z vět 2.4.3 a 2.4.5 bezprostředně plyne

2.4.6 Důsledek

Nechť funkce f má v bodě $a \in \operatorname{Dom} f$ n-tou derivaci a nechť $T_{n,f,a}$ je Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě a. Pak funkce f a $T_{n,f,a}$ mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n.

2.4.7 Příklad (Maclaurinovy polynomy některých elementárních funkcí

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$
   $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, tedy $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$
   $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

2. $f(x) = \sin x$
   $f(0) = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,\ f''(0) = -\sin 0 = 0,\ f'''(0) = -\cos 0 = -1,\ f''''(0) = \sin 0 = 0, \ldots,$
   $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},\ f^{2n}(0) = 0$
   $T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

3. $f(x) = \cos x$
   $f(0) = 1,\ f'(0) = -\sin 0 = 0,\ f''(0) = -\cos 0 = -1,\ f'''(0) = \sin 0 = 0,\ f''''(0) = \cos 0 = 1, \ldots,$
   $f^{(2n)}(0) = (-1)^n,\ f^{2n+1}(0) = 0$
   $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

4. $f(x) = \ln(1+x)$
   $f(0) = 0,$
   Podle 2.2.2.4 je $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$, a tedy $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$
   $T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$
   $f(0) = 1$,
   Podle 2.2.2.1 je $[(1+x)^\alpha]^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, a tedy
   $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)$.
   Definujme $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Pak
   $T_n(x) = 1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k.$
   Pro $\alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \le n$ je Maclaurinův polynom rozepsáním výrazu $(1+x)^\alpha$ podle binomické věty.

2.4.8 Věta (Brook Taylor [1685 – 1731])

Buď f funkce, $a \in \operatorname{Dom} f$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že funkce f má $(n+1)$-tou derivaci v každém bodě z $\mathcal{O}(a)$. Buď $x \in \mathcal{O}(a)$. Pak v otevřeném intervalu s krajními body a a x existuje číslo c takové, že platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

D.: Buď $x_0 > a,\ x_0 \in \mathcal{O}(a)$ libovolné.
Položíme $K = \dfrac{f(x_0) - T_n(x_0)}{(x_0-a)^{n+1}}$, neboli $f(x_0) = T_n(x_0) + K(x_0-a)^{n+1}$.
Dále položíme $F(x) = f(x) - T_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ pro $x \in [a, x_0]$.
Funkce F má podle 2.1.3 a 2.1.5 na $[a, x_0]$ spojité derivace až do n-té, neboť f má na tomto intervalu $(n+1)$-tou derivaci a $T_n(x),\ (x-a)^{n+1}$ mají derivace všech řádů.
Podle 2.4.5 platí $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots F^{(n)}(a) = 0$.
Dále $F(x_0) = 0$. Tedy F splňuje na $[a, x_0]$ předpoklady 2.3.1. odtud plyne, že existuje $c_1 \in (a, x_0)$ že $F'(c_1) = 0$.
To dále znamená, že funkce F' splňuje na $[a, c_1]$ předpoklady 2.3.1, z čehož plyne, že existuje $c_2 \in (a, c_1)$ že $F''(c_2) = 0$.
Tak pokračujeme dále. Nakonec ukážeme, že existuje $c_n,\ a < c_n < x_0$ takové, že $F^{(n)}(c) = 0$.
Celkem tedy dostaneme, že funkce $F^{(n)}$ splňuje na $[a, c_n]$ předpoklady 2.3.1, z čehož plyne, že existuje $c \in (a, c_n) \subseteq (a, x_0)$ že $F^{(n+1)}(c) = 0$.
Přitom $F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - 0 - K(n+1)!$, z čehož plyne $K = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.
Dokázali jsme tedy platnost vzorce pro $x = x_0 > a,\ x_0 \in \mathcal{O}(a)$. Poněvadž $x_0 > a$ byl libovolný, platí vzorec na pravém okolí bodu a.
Jeho platnost na levém okolí bodu a dokážeme analogicky. □

Poznámky

- Vzorec uvedený ve větě lze zapsat: $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Tento vzorec se nazývá *Taylorův* (pro $a = 0$ *Maclaurinův*); výraz $R_n(x)$ se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci* nebo *Taylorův zbytek*.
  Výraz $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ se nazývá *Lagrangeův tvar (Taylorova) zbytku*.
  Existují i jiné tvary zbytku, vždy však platí $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right), x \to a$.
- Číslo c lze napsat ve tvaru $c = a + \Theta(x-a)$, kde $\Theta \in (0,1)$.
- Je vidět, že Lagrangeova věta 2.3.3 je speciálním případem věty Taylorovy (pro $n = 1$).
  Naopak, Taylorova věta byla dokázána jako důsledek věty Rolleovy 2.3.1

2.4.9 Příklad (Zbytky Maclaurinových polynomů některých elementárních funkcí)

Sr. 2.2.2

1. $f(x) = \mathrm{e}^x,\ R_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$

2. $f(x) = \sin x,\ R_{2n-1}(x) = \dfrac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}$

3. $f(x) = \cos x,\ R_{2n}(x) = \dfrac{\cos(\Theta x + \frac{2n+1}{2}\pi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

4. $f(x) = \ln(x+1),\ R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha,\ R_n(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} (1+\Theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$

Taylorova věta slouží k přibližnému výpočtu funkčních hodnot

2.4.10 Příklad

Najděte Maclaurinův polynom, který na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aproximuje funkci $f(x) = \sin x$ s přesností 10^{-5}.

Ř.:

$$\sin x = T_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$|R_{2n-1}(x)| = \left| \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n} \right| \le \frac{|x^{2n}|}{(2n)!} \le \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$$

Snadno ověříme, že $|R_9(x)| \le 0.00002$ a $|R_{11}| \le 0.0000005 < 10^{-5}$. Tedy stačí vzít

$$T_{11}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} + \frac{x^9}{362\,880} - \frac{x^{11}}{39\,916\,800}\,.$$

□

2.5 Průběh funkce

2.5.1 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ vlastní nebo nevlastní derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), pak je f v bodě x_0 rostoucí (resp. klesající).

D.: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0$, pak $x - x_0 < 0$ a tedy $f(x) - f(x_0) < 0$, tj. $f(x) < f(x_0)$.
Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0$, pak $x - x_0 > 0$ a tedy $f(x) - f(x_0) > 0$, tj. $f(x) > f(x_0)$.
Druhé tvrzení dokážeme analogicky. □

2.5.2 Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a má zde vlastní nebo nevlastní derivaci. f je rostoucí (resp. klesající) na J právě tehdy, když $f'(x) \ge 0$ (resp. $f'(x) \le 0$) na J, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném subintervalu intervalu J.

D.: $\Rightarrow$: Nechť f je rostoucí na J, $x_0 \in J$ libovolný. Pro $x \in J,\ x > x_0$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x \in J,\ x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$, tedy $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro $x \in J$. Odtud plyne, že $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$.
Kdyby rovnost $f'(x_0) = 0$ platila na intervalu $I \subseteq J$, byla by podle 2.3.4.2 funkce f konstantní na I.

$\Leftarrow$: Buďte $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$. Na $[x_1, x_2]$ funkce f splňuje předpoklady 2.3.3 a tedy existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \ge 0$, což znamená, že $f(x_1) \le f(x_2)$.
f je tedy neklesající na J a poněvadž na žádném subintervalu není konstantní, je rostoucí.

Druhé tvrzení se dokáže analogicky. □

2.5.3 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ *lokální maximum* (resp. *minimum*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap \operatorname{Dom} f$ bodu x_0 platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
Lokální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap \operatorname{Dom} f$ platí $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$).
Lokální maxima a minima souhrnně nazýváme *lokální extrémy*, případně *ostré lokální extrémy*.
Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in M \subseteq \operatorname{Dom} f$ *absolutní maximum* (resp. *minimum*), na množině M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
Absolutní maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže příslušné nerovnosti jsou ostré.
Absolutní maxima a minima souhrnně nazýváme *absolutní extrémy*.

2.5.4 Poznámky

1. Má-li funkce v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ lokální extrém a existuje-li vlastní nebo nevlastní $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. (Plyne bezprostředně z 2.5.1.)

2. Body, v nichž $f'(x_0) = 0$ nazýváme *stacionární body* funkce f.
   Bezprostředně z předchozího tvrzení vyplývá, že funkce může mít lokální extrém buď ve stacionárním bodě a nebo v bodě, kde neexistuje vlastní ani nevlastní derivace.

3. Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
   Např. $f(x) = x^3,\ f'(0) = 0,\ f'(x) = 3x^2 > 0$ pro $x \neq 0$. Tedy podle 2.5.2 je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

2.5.5 Věta

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Existuje-li levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f neklesající (resp. nerostoucí) a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f nerostoucí (resp. neklesající), pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum (resp. lokální minimum).
Existuje-li levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0)\setminus\{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f rostoucí (resp. klesající) a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0)\setminus\{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f klesající (resp. rostoucí), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum).

D.: Nechť f je v $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ neklesající a v $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ nerostoucí. Podle 1.6.15 je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$. Poněvadž f je spojitá v x_0, je $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (\mathcal{P}(x_0) \cup \mathcal{L}(x_0)) \setminus \{x_0\}\}$.
Nechť f je v $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ rostoucí a v $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ klesající. Buď $x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ libovolný. Pro $x_1 \in (x, x_0) \subseteq \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_1) \leq f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$.
Podobně ukážeme, že pro $x \in \mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x_0) > f(x)$.
Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech. □

Obrácená věta neplatí. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, nemusí být v žádném ryzím jednostranném okolí monotonní.

Předpoklad o spojitosti funkce f je podstatný.

2.5.6 Důsledky

1. Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ a existuje levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0)\setminus\{x_0\}$ bodu x_0 a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0)\setminus\{x_0\}$ bodu x_0 taková, že funkce f má vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x)$ na $(\mathcal{P}(x_0)\cup\mathcal{L}(x_0))\setminus\{x_0\}$, přičemž $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. minimum).

   D.: plyne z 2.5.5 a z 2.5.1 □

2. Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. Je-li $f''(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

D.: Je-li $f''(x_0) < 0$, je $f'(x_0)$ v bodě x_0 podle 2.5.1 klesající. Existuje tedy ryzí levé okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že $f'(x) > 0$ na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a existuje ryzí pravé okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že $f'(x) < 0$ na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$.
Analogicky ukážeme platnost druhého tvrzení. □

2.5.7 Poznámka o absolutních extrémech

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$. Podle 1.7.12 nabývá f na $[a, b]$ své největší i nejmenší hodnoty, tedy svého absolutního maxima a absolutního minima. Absolutních extrémů nabývá buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu $[a, b]$.

2.5.8 Definice

Řekneme, že funkce f je *konvexní* (resp. *konkávní*) *na intervalu* $J \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) \leq f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$
(resp. $f(x_2) \geq f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$).
Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) *na intervalu* $J \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) < f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$
(resp. $f(x_2) > f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$).

2.5.9 Věta

Funkce f je konvexní na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ právě tehdy, když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek

$(\vee_1)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

$(\vee_2)$ $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

$(\vee_3)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce f je ryze konvexní na intervalu J.
Funkce f je konkávní na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ právě tehdy, když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek

$(\wedge_1)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

$(\wedge_2)$ $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

$(\wedge_3)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce f je ryze konkávní na intervalu J.

D.: Podmínka $(\vee_1)$ je zřejmě ekvivalentní s podmínkou v definici 2.5.8.
Upravíme podmínku $(\vee_1)$:

$$\begin{aligned}
(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1)) \\
x_3 f(x_2) - x_3 f(x_1) - x_1 f(x_2) + x_1 f(x_1) &\leq x_2 f(x_3) - x_2 f(x_1) - x_1 f(x_3) + x_1 f(x_1) \\
x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + x_1 f(x_3) &\leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + x_3 f(x_1)
\end{aligned}$$

Dále upravíme podmínku $(\vee_2)$:

$$\begin{array}{rcl}(x_3-x_2)(f(x_3)-f(x_1)) & \leq & (x_3-x_1)(f(x_3)-f(x_2)) \\ x_3f(x_3)-x_3f(x_1)-x_2f(x_3)+x_2f(x_1) & \leq & x_3f(x_3)-x_3f(x_2)-x_1f(x_3)+x_1f(x_2) \\ x_2f(x_1)+x_3f(x_2)+x_1f(x_3) & \leq & x_1f(x_2)+x_2f(x_3)+x_3f(x_1)\end{array}$$

Odtud je vidět, že podmínky $(\vee_1)$ a $(\vee_2)$ jsou ekvivalentní. Stejně (prostým roznásobením) ukážeme ekvivalenci podmínky $(\vee_3)$ s podmínkami $(\vee_1)$ a $(\vee_2)$.
Tvrzení pro konkávní funkce dokážeme analogicky. □

2.5.10 Věta

Nechť funkce f má na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ derivaci f'. Je-li funkce f konvexní (resp. konkávní) na J, pak pro každé dva různé vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$). Je-li funkce f ryze konvexní (resp. ryze konkávní) na J, pak pro každé dva různé vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$).

D.:

- Buď f konvexní funkce na J a x, x_0 libovolné vnitřní body intervalu J.
  Nechť nejprve $x_0 < x$. Podle $(\vee_1)$ pro libovolné $\xi \in (x_0, x)$ platí $\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0} \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
  Limitním přechodem $\xi \to x_0$ dostaneme $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, neboli $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \leq f(x)$.
  Nechť nyní $x < x_0$. Podle $(\vee_2)$ pro libovolné $\xi \in (x, x_0)$ platí $\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq \dfrac{f(x_0)-f(\xi)}{x_0-\xi}$.
  Limitním přechodem $\xi \to x_0$ dostaneme $\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq f'(x_0)$, neboli $f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
- Je-li f ryze konvexní na J, pak podle již dokázaného pro každé dva vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Připusťme, že existují vnitřní body $x_1, x_3 \in J,\ x_1 < x_3$ takové, že $f(x_3) = f(x_1)+f'(x_1)(x_3-x_1)$.
  Podle $(\vee_1)$ — s nodifikací pro ryze konvexní funkce — pro každé $x_2 \in (x_1, x_3)$ platí

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & < & \dfrac{f(x_1)+f'(x_1)(x_3-x_1)-f(x_1)}{x_3-x_1} \\ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & < & f'(x_1) \\ f(x_2) & < & f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)\,,\end{array}$$

  což je spor s již dokázaným (při označení $x = x_2,\ x_0 = x_1$).
  Analogicky s využitím $(\vee_2)$ vyloučíme možnost existence vnitřních bodů $x_1, x_3 \in J$ takových, že $f(x_1) = f(x_3)+f'(x_3)(x_1-x_3)$.
  Tedy pro všechny vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
- Tvrzení o konkávní funkci dokážeme analogicky.

□

2.5.11 Věta

Nechť funkce f má na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ derivaci f'. Funkce f je ryze konvexní (resp. konkávní) na intervalu J právě tehdy, když f' je na J rostoucí (resp. klesající).

D.: $\Rightarrow$: Buďte $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$ libovolné. Podle 2.5.10 je $f(x_2) > f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$ a
$f(x_1) > f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$, neboli $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > f'(x_1)$ a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < f'(x_2)$.
Odtud $f'(x_1) < f'(x_2)$.

$\Leftarrow$: Sporem. Nechť f' je rostoucí na J a připusťme, že f není ryze konvexní, tedy že existují $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ takové, že $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ (sr. $(\vee_3)$).
Podle 2.3.3 existují $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ a $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, že
$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1)$ a $\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2)$.
Zřejmě $\xi_1 < \xi_2$ a poněvadž f' je rostoucí, je $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, což je spor.

Tvrzení o konkávní funkci dokážeme analogicky. $\square$

Odtud a z 2.5.2 plyne

2.5.12 Důsledek

Nechť funkce f má na intervalu J spojitou první derivaci a vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. f je ryze konvexní (resp. konkávní) na J právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) na J, přičemž rovnost $f''(x) = 0$ neplatí na žádném subintervalu intervalu J.

2.5.13 Definice

Nechť f je funkce spojitá v $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x_0)$. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 taková, že f je ryze konvexní na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a ryze konkávní na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$, nebo naopak f je ryze konvexní na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a ryze konkávní na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

2.5.14 Poznámky

1. Je-li x_0 inflexní bod funkce f a f' je spojitá v bodě x_0. Pak f' má v bodě x_0 ostrý lokální extrém. (sr. 2.5.6.1, a 2.5.12).

2. Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje vlastní nebo nevlastní druhá derivace $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$
Opačné tvrzení neplatí. Z $f''(x_0) = 0$ neplyne, že by x_0 byl inflexní bod funkce f.
Například: $f(x) = x^4,\ f''(x) = 12x^2,\ f''(0) = 0$ a v bodě $x_0 = 0$ není inflexní bod funkce f.

2.5.15 Definice

Řekneme, že přímka $p : x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže funkce f má v x_0 alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.
Řekneme, že přímka $p : y = ax + b$ je *asymptotou se směrnicí* funkce f, jestliže funkce f je definována v okolí ∞ (resp. $-\infty$) a platí $\lim\limits_{x\to\infty}(ax + b - f(x)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax + b - f(x)) = 0$).

Libovolná funkce může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, může však mít libovolný počet asymptot bez směrnice.

2.5.16 Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce f právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = b\right)$.

D.: $\Rightarrow$: Pokud $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = 0$ pak podle 1.6.7.7 a 1.6.7.4 také $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax + b - f(x)}{x} = 0$, tedy
$0 = a - \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, neboli $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.
Dále z $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = 0$ plyne $0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax - f(x)) + b$ a tedy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$.

$\Leftarrow$: Jestliže $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$, pak $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax - f(x)) + b = -b + b = 0$. $\square$

2.5.17 Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. Určíme $\operatorname{Dom} f$; pokud je to možné, tak nulové body funkce f a intervaly, na nichž je f kladná a záporná.

2. Vypočítáme f'; určíme nulové body f' (stacionární body); body, v nichž f' není definována; body, v nichž f' je kladná a záporná (Tj. určíme intervaly monotonnosti a lokální extrémy.)

3. Vypočítáme f''; určíme nulové body f''; body, v nichž f'' není definována; body , v nichž f'' je kladná a záporná (Tj. určíme intervaly konvexity a konkavity, inflexní body.)

4. Vypočítáme příslušné jednostranné limity v „hraničních bodech“ $\operatorname{Dom} f$ (Tj. najdeme všechny asymptoty bez směrnice). Najdeme obě asymptoty se směrnicí (pokud existují).

5. Vypočítáme funkční hodnoty ve význačných bodech (stacionárních, inflexních), případně v několika dalších bodech. V inflexních bodech může být užitečné vypočítat hodnotu derivace.

2.6 Rovinné křivky

2.6.1 Definice

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ spojité funkce. Množina $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá (*rovinná*) *křivka*, funkce $\varphi,\ \psi$ se nazývají *parametrizace křivky* C.
Je-li $I = [a, b]$, body $A = (\varphi(a), \psi(a)),\ B = (\varphi(b), \psi(b))$ se nazývají *krajní body křivky* C. Křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = B$.

- Jedna křivka může mít více parametrizací. Například
$\begin{matrix}\varphi(t) = \cos t \\ \psi(t) = \sin t\end{matrix},\ t \in [0, 2\pi], \qquad \begin{matrix}\tilde\varphi(t) = \cos 2t \\ \tilde\psi(t) = \sin 2t\end{matrix},\ t \in [0, \pi], \qquad \begin{matrix}\hat\varphi(t) = \cos t \\ \hat\psi(t) = -\sin t\end{matrix},\ t \in [0, 2\pi],$
jsou tři různé parametrizace kružnice se středem $(0, 0)$ a poloměrem 1.

- Je-li f spojitá funkce, $\operatorname{Dom} f$ je interval, pak graf funkce f je křivka s parametrizací
$\begin{matrix}\varphi(t) = t \\ \psi(t) = f(t)\end{matrix},\ t \in \operatorname{Dom} f.$

- Je-li $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ křivka, t_0 vnitřní bod intervalu I a funkce φ je na okolí bodu t_0 ryze monotonní (k tomu stačí, aby φ měla v bodě t_0 spojitou derivaci a $\varphi'(t_0) \neq 0$), pak existuje interval $J \subseteq \mathbb{R}$, který obsahuje bod $\varphi(t_0)$ a existuje funkce f definovaná na J tak, že $\{(x, f(x)) : x \in J\} \subseteq C$.

  D.: Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(t_0)$ bodu t_0 takové, že φ je na $\mathcal{O}(t_0)$ ryze monotonní. Na $\mathcal{O}(t_0)$ existuje funkce φ^{-1} inversní k funkci φ. Označme $J = \varphi(\mathcal{O}(t_0))$. Pro $x = \varphi(t) \in J$ definujme $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. $\square$

2.6.2 Poznámka o derivaci funkcí daných parametricky

- Nechť $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ je křivka, $\varphi,\ \psi$ mají spojitou derivaci na I a nechť $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Pak existuje funkce f definovaná na intervalu $J = \{\varphi(t) : t \in I\}$, která má na tomto intervalu derivaci, přičemž platí $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pro $x = \varphi(t) \in J$.

  D.: Ze spojitosti φ' a z podmínky $\varphi'(t) \neq 0$ na I plyne, že $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in I$ a tedy podle 2.5.2 je φ na I ryze monotonní. Podle 1.2.16.2 existuje funkce φ^{-1} inversní k φ.
  Definujme $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ pro $x = \varphi(t)$.
  Podle 2.1.6 a 2.1.7 je $f'(x) = [\psi(\varphi^{-1}(x))]' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\dfrac{1}{\varphi'(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. $\square$

- Nechť jsou splněny podmínky předchozího tvrzení a nechť funkce $\varphi,\ \psi$ mají na I druhé derivace. Pak také funkce f má na J druhou derivaci a platí $f''(x) = \dfrac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}$ pro $x = \varphi(t) \in J$.

D.: $f''(x) = (f'(x))' = \left(\dfrac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\right)' = \dfrac{\varphi'(\varphi^{-1}(x))\psi''(\varphi^{-1}(x)) - \varphi''(\varphi^{-1}(x))\psi'(\varphi^{-1}(x))}{(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2}\,\dfrac{1}{\varphi'(t)}.$ □

- Analogicky lze postupovat při výpočtu vyšších derivací.
- S použitím „diferenciální symboliky“ lze předchozí tvrzení zapsat:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^3}.$$

2.6.3 Definice

Řekneme, že křivka C je *oblouk* (*jednoduchá křivka*), jestliže existuje její parametrizace $\varphi,\ \psi$ taková, že zobrazení $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ je bijektivní.
Křivka se nazývá *jordanovská* (*jednoduchá uzavřená*), jestliže je uzavřená a existuje její parametrizace $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že platí implikace $t_1, t_2 \in [a, b],\ 0 < |t_1 - t_2| < b - a \ \Rightarrow\ (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

Jestliže křivka C není uzavřená a není obloukem, pak pro její libovolnou parametrizaci $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ existují $t_1, t_2 \in I,\ t_1 \neq t_2$ tak, že $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$. Bod $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$ se nazývá *vícenásobný bod* (*bod větvení*) *křivky* C.

2.6.4 Definice

Buď C křivka, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ její parametrizace. Nechť t_0 je vnitřní bod intervalu I a $A = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ není vícenásobný bod křivky C a nechť existují derivace $\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0)$ a platí $(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 \neq 0$. Přímka τ procházející bodem A, jejíž směrový vektor je $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ se nazývá *tečna ke křivce* C *v bodě* A.

2.6.5 Poznámka

Nechť křivka C je grafem funkce f, $\mathrm{Dom}\, f$ je interval a f má derivaci v bodě x_0. Pak
$\begin{array}{l}\varphi(t) = t\\ \psi(t) = f(t)\end{array},\ t \in \mathrm{Dom}\, f$ je parametrizací C.
$\varphi'(t) = 1,\ \psi'(t) = f'(t)$. Tečna ke křivce C v bodě $(x_0, f(x_0))$ má parametrické rovnice $\begin{array}{l}x = x_0 + t\\ y = f(x_0) + f'(x_0)t\end{array}$.
Eliminací parametru t dostaneme obecnou rovnici tečny $x - x_0 = \dfrac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$, neboli $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
Tedy definice 2.6.4 souhlasí s tím, jak byla tečna ke grafu funkce zavedena v 2.1.2.7.

Příklad:

$C : \begin{array}{l}x = \varphi(t) = a\cos^3 t\\ y = \psi(t) = a\sin^3 t\end{array},\ t \in [0, 2\pi],\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$ je jordanovskou křivkou.
$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,\ \psi'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$.
Tečna ke křivce C existuje v každém bodě $(\varphi(t), \psi(t))$ takovém, že
$0 \neq (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$, tedy pro $t \notin \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$.

2.6.6 Definice

Nechť C je oblouk nebo jordanovská křivka. C se nazývá *hladká*, existuje-li její parametrizace $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ taková, že

(i) $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ existují pro každý vnitřní bod $t \in I$. Je-li C uzavřená, $I = [a, b]$, existují $\varphi'_+(a),\ \varphi'_-(b),\ \psi'_+(a),\ \psi'_-(b)$ a platí $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(b),\ \psi'_+(a) = \psi'_-(b)$.

(ii) $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$ pro každý vnitřní bod $t \in I$. Je-li C uzavřená, $I = [a, b]$, navíc platí $(\varphi'_+(a))^2 + (\psi'_+(a))^2 \neq 0 \neq (\varphi'_-(b))^2 + (\psi'_-(b))^2$.

C se nazývá *po částech hladká*, existuje-li konečný počet hladkých křivek $C_1, C_2, \dots, C_n$ takových, že $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.

Křivka je hladká, jestliže nemá vícenásobné body a existuje k ní tečna v každém bodě, který není krajní.

2.6.7 Definice

Buďte $C_1 = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t \in I_1\}$, $C_2 = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t \in I_2\}$ křivky a nechť $(x_0, y_0) = (\varphi_1(t_1), \psi_1(t_1)) = (\varphi_2(t_2), \psi_2(t_2)) \in C_1 \cap C_2$ není ani krajní ani vícenásobný bod žádné z křivek C_1, C_2. Řekneme, že křivky C_1 a C_2 ***mají v bodě*** (x_0, y_0) ***styk řádu alespoň*** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jestliže

buď existují kladná čísla δ_0, δ a funkce f_1, f_2 takové, že
$(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq I_1$, $(t_2 - \delta, t_2 + \delta) \subseteq I_2$, $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \operatorname{Dom} f_1 \cap \operatorname{Dom} f_2$,
$\{(x, f_1(x)) : x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0\} = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t_1 - \delta < t < t_1 + \delta\}$,
$\{(x, f_2(x)) : x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0\} = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t_2 - \delta < t < t_2 + \delta\}$,
a funkce f_1, f_2 mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n,

nebo existují kladná čísla ε_0, ε a funkce g_1, g_2 takové, že
$(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \subseteq I_1$, $(t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \subseteq I_2$, $(y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0) \subseteq \operatorname{Dom} g_1 \cap \operatorname{Dom} g_2$,
$\{(g_1(y), y) : y_0 - \varepsilon_0 < y < y_0 + \varepsilon_0\} = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon\}$,
$\{(g_2(y), y) : y_0 - \varepsilon_0 < y < y_0 + \varepsilon_0\} = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t_2 - \varepsilon < t < t_2 + \varepsilon\}$,
a funkce g_1, g_2 mají v bodě y_0 styk řádu alespoň n

2.6.8 Definice

Nechť C je křivka, K je kružnice se středem (x_S, y_S) a poloměrem r a $(x_0, y_0) \in C \cap K$.
Kružnice K se nazývá ***oskulační kružnice křivky*** C ***v bodě*** (x_0, y_0), jestliže křivky C, K mají v bodě (x_0, y_0) styk řádu alespoň 2.
Střed oskulační kružnice se nazývá ***střed křivosti křivky*** C ***v bodě*** (x_0, y_0), poloměr oskulační kružnice se nazývá ***poloměr křivosti křivky*** C ***v bodě*** (x_0, y_0), jeho převrácená hodnota $\frac{1}{r}$ se nazývá ***křivost křivky*** C ***v bodě*** (x_0, y_0).
Množina všech středů křivosti křivky C ve všech jejích bodech se nazývá ***evoluta křivky*** C.

2.6.9 Věta

Buď $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ hladká křivka, t_0 vnitřní bod intervalu I a nechť funkce φ, ψ mají v bodě t_0 druhé derivace. Nechť $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ není vícenásobný bod křivky C a platí $\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0) \neq 0$. Pak má křivka C v bodě (x_0, y_0) jedinou oskulační kružnici o středu (x_S, y_S) a poloměru r, kde

$$\begin{aligned} x_S &= \varphi(t_0) - \frac{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)} \psi'(t_0)\,, \\ y_S &= \psi(t_0) + \frac{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)} \varphi'(t_0)\,, \\ r &= \frac{((\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2)^{3/2}}{|\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)|}\,. \end{aligned}$$

D.: Poznamenejme, že z existence druhé derivace funkce φ v bodě t_0 plyne spojitost její první derivace v tomto bodě.
Nechť nejprve $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak nastává první případ z definice 2.6.7.
Nechť $K = \{(x_S + r\cos t, y_S + r\sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$ je oskulační kružnice křivky C v bodě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (x_S + r\cos\tau_0, y_S + r\sin\tau_0)$.
Podle 2.4.3 je

$$\psi(\varphi^{-1}(x_0)) = f(x_0),\ \psi'(\varphi^{-1}(x_0)) = f'(x_0),\ \psi''(\varphi^{-1}(x_0)) = f''(x_0),$$

kde f je funkce definovaná v okolí bodu x_0 a daná parametricky rovnicemi kružnice K. Podle 2.6.2 je

$$\begin{aligned}
\psi'(\varphi^{-1}(x_0)) &= \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{r\cos\tau_0}{-r\sin\tau_0} = -\operatorname{cotg}\tau_0\,,\\
\psi''(\varphi^{-1}(x_0)) &= \frac{\varphi'(t_0)\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3} = \frac{(-r\sin\tau_0)(-r\sin\tau_0)-(-r\cos\tau_0)(r\cos\tau_0)}{-r^3\sin^3\tau_0} = \\
&= -\frac{1}{r\sin^3\tau_0}\,.
\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé τ_0, x_S, y_S, r:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_0) &= x_S + r\cos\tau_0\,,\\
\psi(t_0) &= y_S + r\sin\tau_0\,,\\
\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} &= -\operatorname{cotg}\tau_0\,,\\
\frac{\varphi'(t_0)\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3} &= -\frac{1}{r\sin^3\tau_0}\,,
\end{aligned}$$

která má jediné řešení dáné formulemi v tvrzení věty.
Nechť nyní $\varphi'(t_0)=0$. Pak, poněvadž křivka C je hladká, ze vztahu $(\varphi'(t_0))^2+(\psi'(t_0))^2\neq 0$ plyne $\psi'(t_0)\neq 0$ a nastává druhý případ z definice 2.6.7. Tento případ vyšetříme analogicky. □

2.6.10 Důsledek

Nechť funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0)\neq 0$. Pak graf funkce f má v bodě $(x_0, f(x_0))$ oskulační kružnici, pro jejíž střed a poloměr platí

$$x_S = x_0 - \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}f'(x_0)\,,\qquad y_S = f(x_0)+\frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\,,\qquad r=\frac{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}\,.$$

Příklady:

1. Určete křivost paraboly $y=x^2$ v jejím vrcholu.

   Ř.: $f(x)=x^2,\ f'(x)=2x,\ f'(0)=0,\ f''(x)=2,\ \dfrac{1}{r}=2.$ □

2. Najděte evolutu elipsy $\begin{array}{l}\varphi(t)=a\cos t\\ \psi(t)=b\sin t\end{array}$, $t\in[0,2\pi]$.

   Ř.: $\varphi'(t)=-a\sin t,\ \varphi''(t)=-a\cos t,$
   $\psi'(t)=b\cos t,\ \psi''(t)=-b\sin t,$
   $(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t,$
   $\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)=ab\sin^2 t+ab\cos^2 t=ab.$
   Parametrické rovnice evoluty:

$$\begin{aligned}
x &= a\cos t-\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}b\cos t=\frac{\cos t}{a}(a^2-a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t)=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t\\
y &= b\sin t-\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab}a\sin t=\frac{\sin t}{b}(b^2-a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t)=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t
\end{aligned}$$

   □

2.7 Cvičení

Vypočítejte derivaci funkce

1) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$, 2) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

3) $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$, 4) $f(x) = \sqrt{\sin x}$,

5) $f(x) = x\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$, 6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}}$,

7) $f(x) = x^2 \log_3 x$, 8) $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$,

9) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$, 10) $f(x) = x \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x + 1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$,

11) $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$, 12) $f(x) = 3^{\sin^2 x}$,

13) $f(x) = x^{x^x}$, 14) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1 + x^4} + \frac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1 + x^4} + 1}{\sqrt[4]{1 + x^4} - 1}$.

Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce

15) $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ v bodě $(2, ?)$, 16) $y = x^2$ v bodě $(x_0, ?)$.

17) Úhlem křivek rozumíme úhel tečen těchto křivek ve společném bodě. Určete úhel grafu funkce $y = x^2$ a křivky $x^2 + y^2 = 1$.

18) Na grafu funkce $y = x^3$ najděte bod, v němž je tečna rovnoběžná se sečnou spojující body $(-1, ?)$ a $(?, 8)$.

Vypočítejte limity

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$, 20) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$,

21) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{a}{x}$, 22) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$,

23) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^x - 1}$, 24) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$,

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$, 26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Najděte Maclaurinův polynom stupně n dané funkce

27) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$, $n = 4$, 28) $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}$, $n = 3$,

29) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $n = 7$, 30) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 5$.

Vyšetřete průběh funkce

31) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, 32) $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x + 1)^2}$, 33) $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, 34) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

35) Najděte nejmenší a největší hodnotu součinu m-té a n-té mocniny kladných čísel, jejichž součet je a.

36) Jaký největší povrch může mít válec vepsaný kouli o poloměru R?

37) Jaký nejmenší objem může mít kužel opsaný kouli o poloměru R?

38) Na elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ najděte v prvním kvadrantu bod takový, že tečna k elipse vedená tímto bodem vytvoří se souřadnými osami trojúhelník nejmenšího obsahu.

39) Jakou výseč je třeba vyříznout z kruhu o poloměru R, aby zbývající část bylo možno svinout do kornoutu o maximálním objemu?

Výsledky: 1) $-\frac{x+1}{2x}\sqrt[3]{x^2}$ 2) $\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$ 3) $\frac{2-4x}{(1+x-x^2)^2}$ 4) $\frac{\sqrt{\cos x \operatorname{cotg} x}}{2}$ 5) $\mathrm{e}^x(\sin x + (2x + 1)\cos x)$ 6) $-\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$ 7) $x\log_3 \mathrm{e}x^2$ 8) $\frac{\cos x}{(\sin\sin x)^2}$ 9) $-\frac{1}{\cos x}$ 10) $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ 11) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x(1+x)}$ 12) $3^{\sin^2 x}\sin 2x \ln 3$ 13) $(2\ln x + 1)x^{x^x+1}$ 14) $-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$ 15) $x + 2y - 4 = 0, 2x - y - 1 = 0$ 16) $2x_0x - y - x_0^2 = 0, x + 2x_0y - x_0 - 2x_0^3 = 0$ 17) asi $70°37'46''$ 18) $(-1, -1), (1, 1)$ 19) $-\frac{1}{2}$ 20) 1 21) a 22) $\frac{1}{2}$ 23) 1 24) -2 25) $\frac{1}{3}$ 26) $\frac{1}{2}$ 27) $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$ 28) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3$ 29) $x - \frac{1}{18}x^7$ 30) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ 31) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$; lichá; nulový bod 0; rostoucí $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, \infty)$;

klesající $[-\sqrt{3},-1),\ (-1,1),\ (1,\sqrt{3}]$; lokální minimum $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; lokální maximum $f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; konvexní $(-\infty,-3),\ (-1,0],\ (1,3]$; konkávní $[-3,-1),\ [0,1),\ [3,\infty)$; inflexní body $f(3)=\frac{3}{2},\ f(-3)=-\frac{3}{2}$; asymptoty $x=1,\ x=-1$ 32) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; nulový bod 0; rostoucí $(-\infty,-3],\ (-1,\infty)$; klesající $[-3,-1)$; lokální maximum $f(-3)=-\frac{27}{8}$; konvexní $[0,\infty)$; konkávní $(-\infty,-1),\ (-1,0]$; inflexní bod $f(0)=0$; asymptoty $x=-1,\ x-2y-2=0$ 33) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$; lichá; nulový bod 0; rostoucí $[-1,1]$; klesající $(-\infty,-1],\ [1,\infty]$; lokální minimum $f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$; lokální maximum $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$; konvexní $[-\sqrt{3},0],\ [\sqrt{3},\infty)$; konkávní $(-\infty,-\sqrt{3}],\ [0,\sqrt{3}]$; inflexní body $f(-\sqrt{3})=-\sqrt{\frac{3}{e^3}},\ f(0)=0,\ f(\sqrt{3})=\sqrt{\frac{3}{e^3}}$; asymptota $y=0$ 34) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$; nulový bod 1; klesající $(-\infty,\infty)$; konvexní $(-\infty,0],\ [1,\infty)$; konkávní $[0,1]$; inflexní body $f(0)=1,\ f(1)=0$; asymptota $y=-x$ 35) největší hodnota $\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$, nejmenší hodnota není 36) $\pi R^2(1+\sqrt{5})$ 37) $\frac{8}{3}\pi R^3$ 38) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right),\ P_{\min}=ab$ 39) vyříznout úhel $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ V_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$

	Rovnice v kartézských souřadnicích	Parametrické rovnice	Rovnice v polárních souřadnicích
Kružnice	$x^2 + y^2 = a^2$	$x = a\cos t$ $y = a\sin t$	$r = a$
Elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\cos t$ $y = b\sin t$	$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \quad 0 < \varepsilon < 1$
Parabola	$y^2 = 2px$	$x = \frac{1}{2p}t^2$ $y = t$	$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$
Hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = \frac{a}{\cos t}$ $y = \pm b\,\mathrm{tg}\,t$	$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \quad \varepsilon > 1$
Cassiniovy křivky	$(x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = a^4 - e^4$		$r^2 = e^2\cos^2 2\varphi \pm \sqrt{e^4\cos^2 2\varphi + a^4 - e^4}$
Bernoulliova lemniskáta	$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$	$x = \sqrt{2}\,at\frac{1+t^2}{1+t^4}$ $y = \sqrt{2}\,at\frac{1-t^2}{1+t^4}$	$r = a\sqrt{2\cos^2 2\varphi}$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$
Cykloida	$x + \sqrt{2ay - y^2} = a\arccos\frac{a-y}{a}$ $x - \sqrt{2ay - y^2} = a\left(2\pi - \arccos\frac{a-y}{a}\right)$	$x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$	
Kardioida (srdcovka)	$(x^2+y^2-a^2)^2 = 4a^2((x-a)^2+y^2)$	$x = a(2\cos t - \cos 2t)$ $y = a(2\sin t - \sin 2t)$	$r = 2a(1-\cos\varphi)$
Asteroida (hvězdice)	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$	$x = a\cos^3\frac{t}{4}$ $y = a\sin^3\frac{t}{4}$	
Archimedova spirála	$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$		$r = a\varphi, \quad \varphi \geq 0$
Hyperbolická spirála	$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$r = \frac{a}{\varphi}$
Logaritmická spirála	$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{k}\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$		$r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$

Tabulka 2.1: **Některé křivky**

Kapitola 3

Integrální počet funkcí jedné proměnné

3.1 Primitivní funkce

3.1.1 Definice

Buďte f, F funkce definované na intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní k funkci* (je *neurčitým integrálem z funkce*) f *na* I, jestliže na tomto intervalu platí $F' = f$. Označení: $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$.

3.1.2 Poznámky

1. Pokud některý z krajních bodů intervalu I do tohoto intervalu patří, je potřeba v tomto bodě uvažovat příslušnou jednostrannou derivaci.

2. Primitivní funkce je podle 2.1.3 spojitá na I.

3. Primitivní funkce bývá někdy definována obecněji: F je primitivní k f na I, jestliže množina $\{x \in I : F'(x) \neq f(x)\}$ je nejvýše spočetná. ($F'(x) = f(x)$ skoro všude na I.)
   V tomto smyslu je například $F(x) = |x|$ zobecněnou primitivní funkcí k $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $I = (-\infty, \infty)$.

3.1.3 Příklady

1. $$\frac{x^3}{3} = \int x^2\mathrm{d}x \quad \text{na } (-\infty, \infty).$$

2. $$\left.\begin{aligned} \ln x &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{na } (0, \infty) \\ \ln(-x) &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{na } (-\infty, 0) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{na intervalu, který neobsahuje } 0.$$

3.1.4 Věta (o existenci primitivní funkce)

Ke každé funkci spojité na intervalu I existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

D.: Bude proveden později (3.4.6). □

3.1.5 Věta

Je-li F funkce primitivní k f na I a $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je rovněž primitivní k f na I.
Jsou-li F a G funkce primitivní k funkci f na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G(x) = F(x)+c$ pro každé $x \in I$.
Je-li F funkce primitivná k f na I pak $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech funkcí primitivních k funkci f na I.

D.: $(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$, druhé tvrzení plyne z 2.3.4.3, třetí je důsledkem prvních dvou. □

3.1.6 Nejdůležitější neurčité integrály

$\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$

$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$

$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a},\ a > 0, a \neq 1$

$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$

$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)|.$$

Každý z uvedených vzorců platí na libovolném intervalu, na němž je funkce za znakem $\int$ definována. Platnost uvedených vzorců lze ověřit derivováním.

3.1.7 Věta

Nechť $\int f_i(x)\mathrm{d}x = F_i(x)$ na intervalu I, $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x))\mathrm{d}x = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \cdots + c_n F_n(x) \text{ na } I.$$

D.: Plyne přímo z 2.1.5. □

Věta říká, že neurčitý integrál je lineární operátor na množině funkcí.

3.1.8 Věta

Nechť $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$ na I. Pak $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ na $J = \{x \in \mathbb{R} : ax+b \in I\}$.

D.: Podle 2.1.6 je $\left[\dfrac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \dfrac{1}{a}F'(ax+b)[ax+b]' = F'(ax+b) = f(ax+b)$. □

3.1.9 Příklad

$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) = \dfrac{x + \sin x \cos x}{2}$

3.1.10 Věta (metoda "per partes")

Nechť funkce u, v mají derivaci na intervalu I. Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'v$, uv', existuje i ke druhé z nich a platí $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ na I.

D.: Nechť existuje primitivní funkce k $u'v$. Podle 2.1.5 je $(uv)' = u'v + uv'$, tedy $uv' = (uv)' - u'v$.
$\int (u(x)v(x))'\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ na I, $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ existuje a tedy podle 3.1.7
$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ na I, což je vzorec z tvrzení věty. □

3.1.11 Poznámky

1. Je-li alespoň jedna z derivací u', v' spojitá na I, jsou předpoklady věty 3.1.10 splněny.

2. Vzorec uvedený v 3.1.10 ve tvaru
$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$
dává metodu integrace v případě, kdy integrovaná funkce je součinem dvou funkcí, z nichž jedna je derivací známé funkce.

3. Metodou „per partes“ jsou řešitelné zejména tyto typy integrálů:
   - $\int x^n \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$: $u(x) = x^n,\ v' = \mathrm{e}^{ax}$
   - $\int x^n \cos ax\mathrm{d}x$: $u(x) = x^n,\ v' = \cos ax$
   - $\int x^n \sin ax\mathrm{d}x$: $u(x) = x^n,\ v' = \sin ax$
   - $\int x^n \operatorname{arctg} ax\mathrm{d}x$: $u(x) = \operatorname{arctg} ax,\ v' = x^n$
   - $\int x^n \operatorname{arccotg} ax\mathrm{d}x$: $u(x) = \operatorname{arccotg} ax,\ v' = x^n$
   - $\int x^n \arccos ax\mathrm{d}x$: $u(x) = \arccos ax,\ v' = x^n$
   - $\int x^n \arcsin ax\mathrm{d}x$: $u(x) = \arcsin ax,\ v' = x^n$
   - $\int x^a \log_b^n x\mathrm{d}x$: $u(x) = \log_b^n x,\ v' = x^a$

Příklad:
$$\int \ln x\mathrm{d}x \quad = \quad x\ln x - \int \mathrm{d}x \quad = \quad x\ln x - x \quad = \quad x\ln\frac{x}{\mathrm{e}}$$
$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

3.1.12 Věta (substituční metoda)

Nechť f je funkce definovaná na intervalu I a φ je prostá funkce, která má derivaci na intervalu J takovém, že $\varphi(J) = I$. $\int f(x)\mathrm{d}x$ existuje na I právě tehdy, když na J existuje $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$; v tomto případě platí:
$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \ , \qquad G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) \ .$$

D.: Podle 2.1.6 pokud $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$, pak $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
Podle 2.1.6 a 2.1.7 pokud $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, pak
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(\varphi^{-1}(x)) = G'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$. □

Schéma použití věty je jednoduché:
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \quad = \quad \int f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad F(x) \quad = \quad F(\varphi(t))$$
$$\begin{array}{rcl} \varphi(t) & = & x \\ \varphi'(t)\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}x \end{array}$$
nebo
$$\int f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \quad = \quad G(t) \quad = \quad G(\varphi^{-1}(x))$$
$$\begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = & \varphi'(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

3.1.13 Příklad

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\mathrm{d}t \quad = \quad \int \cos^2 t\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{t+\sin t\cos t}{2} = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}$$
$$\begin{array}{rcl} x & = & \sin t \\ \mathrm{d}x & = & \cos t\mathrm{d}t \end{array}$$
Předposlední rovnost platí podle 3.1.9.
$f(x) = \sqrt{1-x^2},\ I = [-1,1],\ \varphi(t) = \sin t,\ J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3.1.14 Integrace racionálních funkcí

V rozkladu racionální funkce na parciální zlomky (viz 1.5.15) se vyskytují zlomky tvaru $\dfrac{p}{(x-\alpha)^m}$ a $\dfrac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^n}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{t^{m-1}} = \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{(x-\alpha)^{m-1}}, & m \neq 1 \\ \ln|t| = \ln|x-\alpha|, & m = 1 \end{cases} \\ x-\alpha &= t \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^n} = \frac{c}{2}\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n} + \frac{ac+d}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{t^{n-1}} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \ln|t| = \ln|(x-a)^2+b^2|, & n = 1 \end{cases} \\ (x-a)^2+b^2 &= t \\ 2(x-a)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{[(x-a)^2+b^2]^n} &= \int \frac{b\mathrm{d}t}{(b^2t^2+b^2)^n} = \frac{1}{b^{2n-1}}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} \\ x-a &= bt \\ \mathrm{d}x &= b\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Označme $K_n = \int \dfrac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$. Pak

$$K_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t$$

$$\begin{aligned}K_n &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t = \\ u &= \frac{1}{(t^2+1)^n} \qquad u' = \frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}} \\ v' &= 1 \qquad v = t \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}\right) = \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n(K_n - K_{n+1})\end{aligned}$$

Tedy $K_n = \dfrac{t}{(t^2+1)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}$. Odtud $K_{n+1} = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}K_n$.
Neboli (píšeme-li $n-1$ místo n)

$$K_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}K_{n-1}$$

3.1.15 Poznámka

Je-li R racionální funkce pak následující integrály lze transformovat na integrály z racionální funkce:

- $\int R(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$, kde u je libovolná funkce — substituce $u(x) = t$
- $\int R(e^{ax})\mathrm{d}x$ — substituce $\mathrm{e}^{ax} = t$

3.1.16 Definice

Polynom ve dvou proměnných je funkce $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tvaru

$P(x,y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{0,n}y^n + \cdots + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,.$

Racionální funkce ve dvou proměnných je funkce $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,,$$

kde P, Q jsou polynomy ve dvou proměnných.

3.1.17 Integrály, které lze transformovat na integrály z racionální funkce

Symbolem $R(x,y)$ budeme značit racionální funkci ve dvou proměnných x, y.

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$ — substituce $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$ (Eulerovy substituce)

   $a > 0$: $\pm\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$

   $c > 0$: $\pm\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

   $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$: $\pm\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha_1)$

3. Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p \mathrm{d}x$, kde $m,n,p \in \mathbb{Q}$.

   $p \in \mathbb{Z}$: $x = t^N$, kde N je společný jmenovatel čísel m a n

   $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: $a + bx^n = t^N$, kde N je jmenovatel zlomku p

   $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{a}{x^n} + b = t^N$, kde N je jmenovatel zlomku p

4. $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ — substituce $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$

   V některých případech lze volit jednodušší substituci:

   $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $\sin x = t$

   $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $\cos x = t$

   $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: $\operatorname{tg} x = t$

3.1.18 Poznámka

Primitivní funkce k funkci elementární nemusí být elementární, může být tzv. *vyšší funkcí*. Vyššími funkcemi jsou zejména

$\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = Si(x)$	„integrálsinus“	$\int \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x = Ci(x)$	„integrálcosinus“
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x} = Li(x)$	„logaritmusintegrál“	$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$	Gaussova funkce
$\int \sin x^2 \mathrm{d}x$, $\int \cos x^2 \mathrm{d}x$	Fresnelovy integrály		

Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p \mathrm{d}x$, pokud žádné z čísel p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n} + p$ není celé.

Není známo obecné pravidlo, které by umožnilo rozhodnout, zda primitivní funkci neumíme vyjádřit jako elementární v důsledku nevhodných integračních metod, nebo zda skutečně vyjadřuje vyšší funkci.

3.2 Určitý integrál

V celém tomto odstavci bude f ohraničená funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

3.2.1 Definice

Dělením uzavřeného intervalu $[a, b]$ rozumíme množinu $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takovou, že
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
Čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nazýváme *dělící body*, intervaly $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ nazýváme *dělící intervaly* dělení D.
Číslo $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme *norma* dělení D.
Symbolem $\vartheta([a, b])$ označíme množinu všech dělení intervalu $[a, b]$.
Jsou-li $D_1 \in \vartheta([a, b])$, $D_2 \in \vartheta([a, b])$ taková, že $D_1 \subseteq D_2$ (tj. každý dělící bod D_1 je současně dělícím bodem D_2), řekneme, že dělení D_2 je *zjemněním* dělení D_1.

3.2.2 Definice

Buďte $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Číslo

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

nazveme *dolním součtem* a číslo

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

nazveme *horním součtem* příslušným k funkci f a dělení D.

(Poznamenejme, že existence čísel m_i a M_i je zaručena ohraničeností funkce f.)

3.2.3 Tvrzení

1. Pro libovolné $D \in \vartheta([a, b])$ platí $s(D, f) \le S(D, f)$.

   D.: plyne z toho, že $m_i \le M_i$ a $x_i - x_{i-1} > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. □

2. Je-li $D_2 \in \vartheta([a, b])$ zjemněním $D_1 \in \vartheta([a, b])$, pak $s(D_1, f) \le s(D_2, f)$, $S(D_1, f) \ge S(D_2, f)$.
   (Při zjemnění dělení se dolní součet nezmenší a horní součet nezvětší.)

   D.: Nechť D_2 má o jeden dělící bod více, než D_1, tj.
   $D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\}$, $D_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_k, \ldots, x_n\}$.
   Označme $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$
   $m_k' = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\}$,
   $m_k'' = \inf\{f(x) : x \in [z, x_k]\}$.
   Pak zřejmě $m_k \le m_k'$, $m_k \le m_k''$ a tedy
   $m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - z) + m_k(z - x_{k-1}) \le m_k''(x_k - z) + m_k'(z - x_{k-1})$.
   Odtud plyne

$$\begin{aligned} s(D_1, f) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_k''(x_k - z) + m_k'(z - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = s(D_2, f) . \end{aligned}$$

   Analogicky ukážeme, že $S(D_1, f) \ge S(D_2, f)$.
   Pokud D_2 má o p dělících bodů více než D_1, ukážeme platnost tvrzení p-násobným opakováním téže úvahy. □

3. Nechť $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Pak pro každé $D \in \vartheta([a,b])$ platí $m(b-a) \leq s(D,f) \leq S(D,f) \leq M(b-a)$.

   D.: plyne z 1. a 2., neboť $\{a,b\} \in \vartheta([a,b])$ a každé jiné dělení je zjemněním $\{a,b\}$. $\square$

Množiny $\{s(D,f) : D \in \vartheta([a,b])\}$ a $\{S(D,f) : D \in \vartheta([a,b])\}$ jsou tedy ohraničené. Obě jsou zřejmě neprázdné. To podle 1.1.7(R14) znamená, že následující definice je korektní.

3.2.4 Definice

Číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(D,f) : D \in \vartheta([a,b])\}$$

nazýváme *dolní integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$ a číslo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S(D,f) : D \in \vartheta([a,b])\}$$

nazýváme *horní integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$.

3.2.5 Tvrzení

Nechť $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Pak platí

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)\,.$$

D.: plyne z 3.2.3.3 a z definice 3.2.4. $\square$

3.2.6 Definice

Řekneme, že ohraničená funkce f je na intervalu $[a,b]$ *integrace schopna* (*integrovatelná, integrabilní*) *v Riemannově smyslu*, jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

řekneme, že funkce f *není na intervalu* $[a,b]$ *integrace schopna v Riemannově smyslu.*

3.2.7 Příklady

1. $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro $x \in [a,b]$.
   Pak $m = M = c$ a tedy podle 3.2.5 je

$$c(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq c(b-a)\,,$$

   z čehož plyne

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$

2. $f(x) = \chi(x)$ na $[0,1]$.
   $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([0,1])$, $m_i = 0,\ M_i = 1$ pro každé $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tedy

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0,\ \ \underline{\int_a^b} \chi(x)\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1,\ \ \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

   a $\chi(x)$ není integrabilní na $[0,1]$.

3.2.8 Definice

Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Množina $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se nazývá *výběr representantů dělících intervalů dělení D*.
Číslo

$$\sigma(D,f,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se nazývá *integrální součet příslušný k funkci f, dělení D a výběru representantů Ξ*.

Poněvadž $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, platí $s(D,f) \leq \sigma(D,f,\Xi) \leq S(D,f)$.

Posloupností v širším smyslu rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do libovolné množiny.
Lze tedy mluvit o posloupnosti dělení daného intervalu: $\mathbb{N} \to \vartheta([a,b])$. Řekneme, že posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a,b])$ je *nulová*, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Ke každému $\delta > 0$ existuje $D \in \vartheta([a,b])$ takové, že $\nu(D) < \delta$. (Stačí položit $n = \left[\dfrac{b-a}{\delta}\right] + 1$ a interval $[a,b]$ rozdělit na n stejně dlouhých dělících intervalů.)

3.2.9 Věta

Buď $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,,\ \ \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc f integrabilní na $[a,b]$ a Ξ_n je libovolný výběr representantů dělících intervalů dělení D_n, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n,f,\Xi_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \vartheta([a,b])$, $\nu(D) < \delta$ platí

$$S(D,f) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\,.$$

Poněvadž f je ohraničená, existuje $h \in \mathbb{R},\ h > 0$, že $|f(x)| \le h$ pro $x \in [a,b]$.
Podle 3.2.4 a podle 1.1.6(s2*) existuje $D_1 = \{y_0, y_1, \dots, y_p\} \in \vartheta([a,b])$, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le S(D_1,f) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Položme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4hp}$. Pak $\delta > 0$. Buď $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ libovolné takové, že $\nu(D) < \delta$.
Dále položme $D_2 = D \cup D_1 = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ Podle 3.2.3.2 je $S(D_2,f) \le S(D,f)$.
Dělící intervaly $[x_{i-1}, x_i]$ rozdělíme do dvou druhů:

intervaly 1. druhu, jestliže uvnitř něho neleží žádný dělící bod y_j

intervaly 2. druhu v opačném případě

Každý dělící interval 1. druhu je rovněž dělícím intervalem dělení D_2. Tento interval přispívá k $S(D,f)$ i k $S(D_2,f)$ týmž sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, tedy v rozdílu $S(D,f) - D(D_2,f)$ se neprojeví.
Uvnitř každého intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ 2. druhu leží alespoň jedno z čísel $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$, což znamená, že intervalů 2. druhu je nejvýše $p-1$.
Interval druhého druhu přispívá k $S(D,f)$ sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, který je v absolutní hodnotě menší nebo roven $h\nu(D) < h\delta$. Absolutní hodnota příspěvku všech intervalů 2. druhu k $S(D,f)$ je tedy $< h\delta p$.
V D_2 je každý interval $[x_{i-1}, x_i]$ 2. druhu rozdělen dělícími body $x_{i-1} = z_r < z_{r+1} < \dots < z_s = x_i$. Označme $M'_k = \sup\{f(x) : x \in [z_{k-1}, z_k]\}$. Opět $|M'_k| \le h$ a tedy absolutní hodnota příspěvku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ do součtu $S(D_2,f)$ jest

$$\left|\sum_{k=r+1}^{s} M'_k(z_k - z_{k-1})\right| \le \sum_{k=r+1}^{s} h(z_k - z_{k-1}) = h(z_s - z_r) = h(x_i - x_{i-1}) < h\nu(D) < h\delta\,.$$

Absolutní hodnota příspěvků všech intervalů 2. druhu k $S(D_2,f)$ je tedy $< h\delta p$.
Odtud plyne, že $S(D,f) - S(D_2,f) < 2h\delta p = \dfrac{\varepsilon}{2}$, neboli $S(D,f) < S(D_2,f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Podle 3.2.3.2 je $S(D_2,f) \le S(D_1,f)$ a tedy

$$S(D,f) < S(D_2,f) + \frac{\varepsilon}{2} \le S(D_1,f) + \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

což je pomocné tvrzení.

Buď nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle pomocného tvrzení existuje $\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \vartheta([a,b]),\ \nu(D) < \delta$ platí

$$S(D,f) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\,.$$

Poněvadž

$$S(D,f) \ge \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

platí

$$\left|S(D,f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

Poněvadž posloupnost $\{D_n\}$ je nulová, k $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. To znamená, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| S(D_n, f) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon\,,$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Analogicky dokážeme

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li f integrabilní na $[a, b]$, je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Poslední tvrzení věty nyní plyne z nerovnosti $s(D, f) \leq \sigma(D, f, \Xi) \leq S(D, f)$ a z 1.3.7. $\square$

3.2.10 Věta (Nutná a dostatečná podmínka integrability)

Funkce f je na $[a, b]$ integrabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \vartheta([a, b])$ takové, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$.

D.: **⇒:** Nechť f je integrabilní. Buďte $\varepsilon > 0$ libovolné a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a, b])$ libovolná nulová. Podle 3.2.9 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\left| s(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \left| S(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Tedy pro D_{n_0} platí

$$\begin{aligned} S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f) &= |S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f)| \leq \\ &\leq \left| S(D_n, f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - s(D_n, f) \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

⇐: Nechť je podmínka splněna. Buď $\varepsilon > 0$ a $D \in \vartheta([a, b])$ takové dělení, že $S(d, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Protože

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq S(D, f), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \geq s(D, f)\,,$$

platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Poněvadž ε je libovolné, je možno poslední nerovnost splnit pouze tehdy, když

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Poněvadž opačná nerovnost platí podle 3.2.5 vždy, jest

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

a f je integrabilní. $\square$

3.2.11 Věta

Je-li funkce f monotonní na $[a,b]$, pak je na tomto intervalu integrabilní.

D.: Nechť pro určitost je f na $[a,b]$ neklesající.
Je-li $f(a) = f(b)$, je f na $[a,b]$ konstantní a podle 3.2.7.1 je integrabilní.
Nechť $f(a) < f(b)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ takové, že $\nu(D) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1})$, $\quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)$, tedy

$$\begin{aligned}
S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\nu(D) = \\
&= \nu(D)(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\
&= \nu(D)(f(x_n) - f(x_0)) = \nu(D)(f(b) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \\
&= \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Podle 3.2.10 je f integrabilní na $[a,b]$. $\square$

3.2.12 Věta

Je-li funkce f spojitá na $[a,b]$, pak je na tomto intervalu integrabilní.

D.: Buď f spojitá a $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.7.20 je f na $[a,b]$ spojitá stejnoměrně, tedy k $\dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Buď $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$, $\nu(D) < \delta$,
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,
$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
Podle 1.7.12 existují $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že $f(y_i) = m_i$, $f(z_i) = M_i$.
Dále $|y_i - z_i| < \delta$ a tedy $f(z_i) - f(y_i) = M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Odtud

$$\begin{aligned}
S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) < \\
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

a podle 3.2.10 je f integrabilní na $[a,b]$. $\square$

3.2.13 Definice

Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *nulová*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ existuje konečný počet otevřených intervalů $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ takových, že $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \varepsilon$ a $M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n)$.

Platí

- Každá konečná množina je nulová.
- Sjednocení konečně mnoha nulových množin je nulová množina.
- Množina členů konvergentní posloupnosti je nulová.
- Množina členů posloupnosti, která má konečný počet hromadných bodů, je nulová.

3.2.14 Věta

Je-li množina bodů nespojitosti funkce f na intervalu $[a, b]$ nulová, pak je f integrabilní na $[a, b]$.

D.: Bude proveden později (3.3.15). □

Příklad: $[a, b] = [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & x \in \left(\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right],\ n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Množina bodů nespojitosti $M = \left\{\dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tvoří konvergentní posloupnost. Je to tedy nulová množina, což znamená, že f je integrabilní na $[0, 1]$. (Platí $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.)

3.2.15 Věta (Leibnizova [1646 – 1716] – Newtonova [1642 – 1727] formule)

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a nechť funkce F je spojitá na $[a, b]$ a na (a, b) primitivní k f. Pak

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

D.: Buď $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$. F splňuje na $[x_{i-1}, x_i]$ předpoklady 2.3.3. Existuje tedy $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.
Označme $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$. Pak

$$\sigma(D, f, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a)\,.$$

To znamená: Pro libovolné $D \in \vartheta([a, b])$ existuje výběr representantů Ξ takový, že $\sigma(D, f, \Xi) = F(b) - F(a)$.
Buď nyní $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Ke každému D_n existuje výběr representantů Ξ_n takový, že $\sigma(D_n, f, \Xi_n) = F(b) - F(a)$. Podle 3.2.9 je

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n, f, \Xi_n) = F(b) - F(a)\,.$$

□

Budeme používat označení $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3.2.16 Poznámka

Je-li funkce G spojitá na $[a, b]$ a na (a, b) primitivní k f, pak podle 3.1.5 je $G(x) = F(x) + c$ a tedy

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + c]_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \,.$$

To znamená, že formule z věty 3.2.15 nezávisí na výběru primitivní funkce.

3.2.17 Příklad

$$\int\limits_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x$$

$x^2 \operatorname{arctg} x$ je na $[0, 1]$ spojitá, tedy podle 3.2.12 integrabilní.
$\dfrac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6} \ln(x^2 + 1) - \dfrac{x^2}{6}$ je primitivní k $x^2 \operatorname{arctg} x$ a na $[0, 1]$ spojitá. Tedy

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{6}\right]_p^1 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \ln 1 = \\ &= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}(\pi - 2 + \ln 2) \,. \end{aligned}$$

3.2.18 Definice

Řekneme, že funkce f definovaná na (a, b) je na tomto intervalu *integrace schopna* (*integrovatelná, integrabilní*) *v Newtonově smyslu*, jestliže existuje funkce F spojitá na $[a, b]$ a primitivní k f na (a, b).
V tomto případě definujeme její *Newtonův integrál*

$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \,.$$

Věta 3.2.15 říká, že je-li funkce f integrabilní na $[a, b]$ v Riemannově i v Newtonově smyslu, pak se její Riemannův a Newtonův integrál rovnají.

3.2.19 Poznámky

1. Integrace „per partes“ pro určité integrály:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x) \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x) \mathrm{d}x$$

2. Substituční metoda pro určité integrály:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \mathrm{d}t$$

$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \mathrm{d}t$$

3.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

V celém odstavci bude pojem „integrabilní funkce“ znamenat funkci integrace schopnou v Riemannově smyslu.

3.3.1 Věta

Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a,b]$, $c,d \in \mathbb{R}$, $c \le f(x) \le d$ pro každé $x \in [a,b]$. Pak

$$c(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le d(b-a)\,.$$

D.: Plyne z 3.2.5, neboť $c \le \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $d \ge \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. $\square$

3.3.2 Důsledky

1. Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a,b]$. Jestliže $f(x) \ge 0$ pro každé $x \in [a,b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0\,.$$

2. Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a,b]$. Jestliže $|f(x)| \le c$ pro každé $x \in [a,b]$, pak

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le c(b-a)\,.$$

D.: Plyne z nerovnosti $-c(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le c(b-a)$. $\square$

3.3.3 Věta (aditivita vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f a g jsou funkce integrabilní na intervalu $[a,b]$. Pak je i funkce $f+g$ integrabilní na intervalu $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Buď $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ libovolné a označme
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $n_i = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $p_i = \inf\{f(x)+g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
Na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ platí $m_i + n_i \le f(x) + g(x)$ a tedy $m_i + n_i \le p_i$, což znamená, že
$m_i(x_i - x_{i-1}) + n_i(x_i - x_{i-1}) \le p_i(x_i - x_{i-1})$.
Sečtením těchto nerovností pro i od 1 do n dostaneme $s(D,f) + s(D,g) \le s(D, f+g)$.
Buď nyní $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí
$s(D_n, f) + s(D_n, g) \le s(D_n, f+g)$ a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme podle 3.2.9, 1.3.5.1 a 1.3.6.2

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x\,.$$

Analogicky odvodíme

$$\overline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Z těchto nerovností plyne tvrzení. $\square$

3.3.4 Věta (homogenita vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce cf je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Nechť $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$ libovolné a označme

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$n_i = \inf\{cf(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad N_i = \sup\{cf(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Pro $c = 0$ je tvrzení zřejmé.
Nechť $c > 0$. Pak je $n_i = cm_i,\ N_i = cM_i$ a tedy $s(D, cf) = cs(D, f),\ S(D, cf) = cS(D, f)$.
Pro libovolnou nulovou $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a, b])$ platí:

$$\underline{\int_a^b} cf(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(D_n, cf) = c\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$
$$\overline{\int_a^b} cf(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(D_n, cf) = c\lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

z čehož plyne tvrzení.
Nechť $c < 0$. Pak $n_i = cM_i,\ N_i = cm_i$ a tedy $s(D, cf) = cS(D, f),\ S(D, cf) = cs(D, f)$ a důkaz dokončíme s využitím nulové posloupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a, b])$. □

3.3.5 Důsledek (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$ a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$ integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b (c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x))\mathrm{d}x = c_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + c_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + c_n\int_a^b f_n(x))\mathrm{d}x\,.$$

3.3.6 Věta (monotonie vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f a g jsou funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže pro každé $x \in [a, b]$ platí $f(x) \le g(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Pro $x \in [a, b]$ je $g(x) - f(x) \ge 0$ a tedy podle 3.3.2.1 a 3.3.5 je
$0 \le \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. □

3.3.7 Věta

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a, b]$. Pak je také funkce fg integrabilní na intervalu $[a, b]$.

D.: Nechť nejprve $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ pro $x \in [a, b]$.
Poněvadž funkce f a g jsou integrabilní, jsou ohraničené a tedy existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ takové, že $f(x) \le k,\ g(x) \le k$ pro $x \in [a, b]$.
Buď $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\dfrac{\varepsilon}{2k} > 0$ existují podle 3.2.10 dělení $D_1,\ D_2$ intervalu $[a, b]$ taková. že $S(D_1, f) - s(D_1, f) < \dfrac{\varepsilon}{2k},\ S(D_2, g) - s(D_2, g) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Položme $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} = D_1 \cup D_2$.
Podle 3.2.3.2 platí $s(D_1, f) \le s(D, f),\ S(D_1, f) \ge S(D, f)$ a tedy

$S(D,f) - s(D,f) \le S(D_1,f) - s(D_1,f) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Obdobně: $S(D,g) - s(D,g) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}, & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\},\\ n_i &= \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}, & N_i &= \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\},\\ p_i &= \inf\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}, & P_i &= \sup\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}. \end{aligned}$$

Na intervalu $[x_{i-1},x_i]$ platí $0 \le m_i \le f(x) \le M_i,\ 0 \le n_i \le g(x) \le N_i$ a tedy $m_i n_i \le f(x)g(x) \le M_i N_i$. Odtud dále plyne $m_i n_i \le p_i \le P_i \le M_i N_i$, neboli $P_i - p_i \le M_i N_i - m_i n_i = N_i(M_i - m_i) + m_i(N_i - n_i)$. Poněvadž $N_i \le k,\ m_i \le k$, platí $P_i - p_i \le k((M_i - m_i) + (N_i - n_i))$. Poslední nerovnost vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a takto vzniklé nerovnosti sečteme pro $i = 1,2,\dots,n$. Dostaneme:

$$S(D,fg) - s(D,fg) \le k(S(D,f) - s(D,f) + S(D,g) - s(D,g)) \le k\left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k}\right) = \varepsilon\,.$$

Podle 3.2.10 je funkce fg integrabilní.
Nechť nyní jsou f, g libovolné. Opět existuje $k \in \mathbb{R}$, že $f(x) \le k,\ g(x) \le k$ pro $x \in [a,b]$.
Podle 3.3.5 jsou funkce $k - f(x) \ge 0,\ k - g(x) \ge 0$ integrabilní a podle první části důkazu je integrabilní i funkce $h(x) = (k - f(x))(k - g(x))$.
Poněvadž $f(x)g(x) = h(x) + kf(x) + kg(x) - k^2$, je funkce fg podle 3.3.5 integrabilní na intervalu $[a,b]$. $\square$

3.3.8 Věta

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a,b]$. Je=li $|g(x)| \ge c > 0$ pro $x \in [a,b]$, pak je také funkce $\dfrac{f}{g}$ integrabilní na intervalu $[a,b]$.

D.: Nechť $g(x) \ge c > 0$ pro $x \in [a,b]$.
Buď $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $c^2\varepsilon > 0$ existuje podle 3.2.10 takové $D = \{x_0,x_1,\dots,x_n\} \in \vartheta([a,b])$, že $S(D,g) - s(D,g) < c^2\varepsilon$.
Označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}, & M_i &= \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\},\\ n_i &= \inf\left\{\frac{1}{g(x)} : x \in [x_{i-1},x_i]\right\}, & N_i &= \sup\left\{\frac{1}{g(x)}\, x \in [x_{i-1},x_i]\right\}. \end{aligned}$$

Platí $n_i = \dfrac{1}{M_i},\ N_i = \dfrac{1}{m_i},\ m_i \ge c, M_i \ge c$. Odtud dostaneme
$N_i - n_i = \dfrac{1}{m_i} - \dfrac{1}{M_i} = \dfrac{M_i - m_i}{m_i M_i} \le \dfrac{1}{c^2}(M_i - m_i)$.
Tyto nerovnice vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme pro $i = 1,2,\dots,n$. Dostaneme
$S\left(D,\dfrac{1}{g}\right) - s\left(D,\dfrac{1}{g}\right) \le \dfrac{1}{c^2}(S(D,g) - s(D,g)) < \varepsilon$.
Podle 3.2.10 je funkce $\dfrac{1}{g}$ integrabilní na $[a,b]$.
Je-li $g(x) \le -c < 0$ pro $x \in [a,b]$, je podle první části důkazu funkce $-\dfrac{1}{g}$ integrabilní na $[a,b]$ a tedy podle 3.3.4 je také $\dfrac{1}{g}$ integrabilní na $[a,b]$.
Tvrzení věty je nyní důsledkem 3.3.7, neboť $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$. $\square$

Poznámka: Předpoklad $|g(x)| \ge c > 0$ nelze obecně nahradit slabším předpokladem $|g(x)| > 0$, neboť v takovém případě funkce $\dfrac{f}{g}$ nemusí být ohraničená.

Např.: $[a,b] = [0,1],\ f(x) = 1,\ g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

g je integrabilní na $[0,1]$ podle 3.2.14, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ není ohraničená.

3.3.9 Věta

Je-li funkce f integrabilní na intervalu $[a,b]$, pak také funkce $|f|$ je integrabilní na intervalu $[a,b]$ a platí

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\,.$$

D.: Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ takové, že $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$. Označme

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$n_i = \inf\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad N_i = \sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Buďte $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$. Pak $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i$. Odtud plyne, že pro pevně zvolené y je $|f(x)| \leq |f(y)| + M_i - m_i$. Z vlastností suprema plyne $N_i \leq |f(y)| + M_i - m_i$, neboli $|f(y)| \geq N_i - (M_i - m_i)$. Z vlastností infima nyní plyne $n_i \geq N_i - (M_i - m_i)$, neboli $N_i - n_i \leq M_i - m_i$.
Poslední nerovnice vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i = 1, 2, \ldots, n$.
Dostaneme $S(D, |f|) - s(D, |f|) \leq S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$ a podle 3.2.10 je funkce $|f|$ integrabilní.
Dále pro $x \in [a,b]$ platí $f(x) \leq |f(x)|$, $-f(x) \leq |f(x)|$ a tedy podle 3.3.6

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x, \qquad -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

což znamená

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

a to je nerovnost v tvrzení věty. □

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Např. pro $f(x) = \chi(x) - \frac{1}{2}$ je $|f(x)| = \frac{1}{2}$, což je funkce integrabilní, ale

$$\underline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \overline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(Sr. 3.2.7)

3.3.10 Věta (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a,b]$, $g(x) \geq 0$ pro $x \in [a,b]$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Pak existuje $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Poněvadž $m \leq f(x) \leq M$ a $g(x) \geq 0$, platí $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ a tedy podle 3.3.6 a 3.3.4 je

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, pak podle 3.3.6 a 3.3.4 je

$$0 = m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$$

a tedy $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. Rovnost v tvrzení věty je splněna pro libovolné $\mu \in \mathbb{R}$.

Je-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, položíme

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Pak

$$m = \frac{m\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq \frac{M\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x} = M\,.$$

□

3.3.11 Důsledky

1. Nechť funkce f je navíc spojitá. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

   D.: plyne z 1.7.15. □

2. Nechť m a M mají stejný význam jako v 3.3.10. Pak existuje $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)\,.$$

   D.: volbou $g(x) = 1$. □

3. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)\,.$$

3.3.12 Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b < c$ a f je ohraničená funkce definovaná na $[a, c]$. Pak platí

$$\underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_b^c} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_b^c} f(x)\mathrm{d}x.$$

Je-li funkce f integrabilní na $[a, b]$ i na $[a, c]$, pak je integrabilní i na $[a, c]$ a platí

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

D.: Nechť $\{D'_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a $\{D''_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[b, c]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D'_n \cup D''_n$.
Pak je $D_n \in \vartheta([a, b]),\ \nu(D_n) = \max\{\nu(D'_n), \nu(D''_n)\}$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$, neboli $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová

posloupnost dělení intervalu $[a,c]$.
Dále $s(D_n,f) = s(D'_n,f)+s(D''_n,f)$, $S(D_n,f) = S(D'_n,f)+S(D''_n,f)$, z čehož limitním přechodem $n \to \infty$ s využitím 3.2.9 dostaneme první tvrzení.
Je-li funkce f integrabilní na intervalech $[a,b]$ a $[b,c]$, platí

$$\int_{\overline{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

což je druhé tvrzení. □

3.3.13 Poznámky

1. Druhé tvrzení věty 3.3.12 neplatí pro Newtonův integrál.
   Např.: $a=-1,\ b=0,\ c=1,\ f(x)=\operatorname{sgn} x$.

2. Větu 3.3.12 lze indukcí zobecnit na libovolný konečný počet intervalů:
   Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ a funkce f je integrabilní na každém intervalu $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 2, 3 \ldots, n$, pak je f integrabilní i na intervalu $[a_1, a_n]$ a platí

   $$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=2}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

   Analogické tvrzení platí pro horní a dolní integrál.

3.3.14 Věta (monotonie vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť funkce f je integrabilní na intervalu $[a,b]$ a nechť $[c,d] \subseteq (a,b)$. Pak je f integrabilní i na intervalu $[c,d]$.

D.: Nechť $\{D'_n\}$, resp. $\{D''_n\}$, resp. $\{D'''_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a,c]$, resp. $[c,d]$, resp. $[d,b]$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D'_n \cup D''_n \cup D'''_n$.
Pak je $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ a platí
$s(D_n,f) = s(D'_n,f) + s(D''_n) + s(D'''_n)$, $S(D_n,f) = S(D'_n,f) + S(D''_n) + S(D'''_n)$.
Odtud dostaneme limitním přechodem $n \to \infty$ s využitím 3.2.9

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\overline{c}}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\overline{d}}^{b} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\underline{d}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme

$$0 = \left(\int_{\overline{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{\overline{c}}^{d} f(x)\mathrm{d}x - \int_{c}^{\underline{d}} f(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{\overline{d}}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{d}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x\right)\,.$$

Poněvadž všechny sčítance jsou nezáporné, musí být nulové. Zejména

$$\int_{\overline{c}}^{d} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c}^{\underline{d}} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

□

3.3.15 Důkaz věty 3.2.14

D.: Buď $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž funkce f je na intervalu $[a,b]$ ohraničená, existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ takové, že $-k \le f(x) \le k$ pro každé $x \in [a,b]$.
Buď M množina bodů nespojitosti funkce f. Poněvadž je tato množina nulová, existují
$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R},\ a \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n \le b$
takové, že $M \subseteq (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \cdots \cup (a_n,b_n)$ a $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Předpokládejme, že $a < a_1,\ b_n < b$. (V opačném případě bychom provedli analogické úvahy.)
Na každém z intervalů $[a,a_1],\ [b_1,a_2],\ \ldots,\ [b_{n-1},a_n],\ [b_n,b]$ je funkce f spojitá a tedy podle 3.2.12 integrabilní.
Na každém intervalu $(a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\ \cdots,\ (a_n,b_n)$ podle 3.2.5 platí

$$-k(b_i - a_i) \le \int_{\overline{a_i}}^{b_i} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{a_i}^{\underline{b_i}} f(x)\mathrm{d}x \le k(b_i - a_i),\ \ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Podle 3.3.13.2 je

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \ &= \ \int_{a}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{a_i}}^{b_i} f(x)\mathrm{d}x \ \ge \\
&\ge \ \int_{a}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - k\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \ > \\
&> \ \int_{a}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - k\frac{\varepsilon}{2k} \ = \\
&= \ \int_{a}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x \ < \ \int_{a}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud

$$0 \ \le \ \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \ < \ \varepsilon\,.$$

Poněvadž $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

□

3.3.16 Věta

Nechť f, g jsou ohraničené funkce na intervalu $[a,b]$ a nechť množina $M = \{x \in [a,b] : f(x) \ne g(x)\}$ je nulová. Je-li jedna z funkcí f, g integrabilní na $[a,b]$, je integrabilní i druhá z nich a platí

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Nechť funkce f je integrabilní a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné.
Buď $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ takové, že $-k \leq g(x) \leq k$ pro $x \in [a, b]$.
Poněvadž M je nulová, existují $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n \leq b$ takové, že
$M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n),\ \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Podle 3.3.14 je funkce f na každém z intervalů $[a, a_1], [b_1, a_2], [b_2, a_3], \ldots, [b_n, b]$ integrabilní.
Na každém z těchto intervalů jsou funkce f, g shodné, tedy i g je na nich integrabilní a platí

$$\int\limits_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{a_1} g(x)\mathrm{d}x,\ \int\limits_{b_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{b_1}^{a_2} g(x)\mathrm{d}x,\ \ldots,\ \int\limits_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{b_n}^{b} g(x)\mathrm{d}x.$$

Na každém z intervalů $[a_i, b_i]$ platí

$$-k(b_i - a_i) \leq \int\limits_{\underline{a_i}}^{b_i} g(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_{a_i}^{\overline{b_i}} g(x)\mathrm{d}x \leq k(b_i - a_i)\,.$$

Analogicky jako v důkazu věty 3.2.14 ukážeme

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\underline{a}}^{b} g(x)\mathrm{d}x \quad &> \quad \int\limits_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2},\\
\int\limits_{a}^{\overline{b}} g(x)\mathrm{d}x \quad &< \quad \int\limits_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

z čehož opět vyplyne

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{\overline{b}} g(x)\mathrm{d}x.$$

□

V důsledku věty 3.3.16 není při úvahách o Riemannovu integrálu nutné předpokládat, že ohraničená funkce je definovaná na celém intervalu $[a, b]$. Stačí, je-li definovaná na $[a, b]$ s výjimkou nulové množiny. Zejména lze tedy hovořit o funkci integrabilní na otevřeném intervalu (a, b).

3.4 Integrál jako funkce horní meze

3.4.1 Úmluva

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována v a (tj. $a \in \operatorname{Dom} f$). Pak klademe $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R},\ a > b$ a nechť funkce f je integrabilní na intervalu $[b, a]$. Pak klademe $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Snadno ověříme, že při této rozšířené definici zůstávají v platnosti všechna tvrzení předchozího odstavce.

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a $x \in [a, b]$. Podle 3.3.14 je funkce f integrabilní na $[a, x]$. Funkci $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ definovanou na $[a, b]$ nazýváme *integrál jako funkce horní meze.*

3.4.2 Věta

Nechť funkce f je integrabilní na $[a,b]$. Pak je funkce $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ spojitá na $[a,b]$.

D.: Buď $x_0 \in [a,b],\ \varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž f je integrabilní, je ohraničená a tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \le c$ pro $x \in [a,b]$.
Položme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$.
Buď $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ libovolný. Pak
$|F(x_0) - F(x)| = \left|\int\limits_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_a^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| \le |x - x_0|c < \delta c = \dfrac{\varepsilon}{c}c = \varepsilon.$
(První nerovnost plyne z 3.3.2.2) □

3.4.3 Věta

Nechť je funkce f integrabilní na $[a,b]$ a spojitá v $x_0 \in [a,b]$. Pak funkce $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ má derivaci v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.
V případě $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$ se jedná o příslušnou jednostrannou derivaci.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž f je spojitá v x_0, k $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ platí $|f(x) - f(x_0)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tedy pro $x \ne x_0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) - \frac{f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| = \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int\limits_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} f(x_0)\mathrm{d}t\right)\right| = \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t\right| \le \\
&\le \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int\limits_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int\limits_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t\right| = \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}|x - x_0|\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Tedy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. □

3.4.4 Důsledek

Je-li funkce f spojitá na $[a,b]$, pak $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\mathrm{d}t$ má na $[a,b]$ derivaci a platí $F'(x) = f(x)$.

Buď f integrabilní na $[a,b]$, $c \in [a,b]$ libovolný, pevně zvolený bod. Funkce f je na intervalu s krajními body c, $x \in [a,b]$ (tj. na intervalu $[c,x]$ pro $x > c$ nebo $[x,c]$ pro $x < c$) podle 3.3.14 integrabilní. Lze tedy definovat funkci $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$.

3.4.5 Poznámka

Nechť f je funkce integrabilní na $[a, b]$ a $c \in [a, b]$. Pak je funkce $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$ spojitá na $[a, b]$.

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, má funkce $F = \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$ v tomto bodě derivaci a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

D.: Podle 3.4.1 a 3.3.12 je $\int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_a^c f(t)\mathrm{d}t$.

$\int\limits_a^c f(t)\mathrm{d}t$ je konstanta, tedy spojitá funkce mající nulovou derivaci. Tvrzení nyní plyne z 3.4.2 a z 3.4.3. □

3.4.6 Věta (o existenci primitivní funkce)

K funkci f spojité na intervalu J existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

D.: Je-li interval J uzavřený, plyne tvrzení z 3.4.4.

Nechť J není uzavřený. Zvolme pevně $c \in J$ a položme $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$.

F je definována na celém J, neboť pro $x \in J$ je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu s krajními body c a x a tedy podle 3.2.12 integrabilní.
Buď $x_0 \in J$ libovolný. Zvolme $a, b \in J,\ a \leq \min\{c, x_0\},\ b \geq \max\{c, x_0\}$.
Pak $c \in [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ a f je spojitá na $[a, b]$. Podle 3.4.5 tedy platí $F'(x_0) = f(x_0)$.
Poněvadž $x_0 \in J$ byl libovolný, platí $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každé $x \in J$. □

Je-li f integrabilní funkce na $[a, b]$, lze analogicky uvažovat *integrál jako funkci dolní meze* $G(x) = \int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$, nebo obecněji $G(x) = \int\limits_x^c f(t)\mathrm{d}t$ pro $c \in [a, b]$.

3.4.7 Poznámka

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$, $c \in [a, b]$. Pak je funkce $G(x) = \int\limits_x^c f(t)\mathrm{d}t$ spojitá na $[a, b]$.

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, má funkce G v tomto bodě derivaci a platí $G'(x_0) = -f(x_0)$.

3.5 Nevlastní integrály

V dosavadních úvahách o $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jsme předpokládali

(i) $a, b \in \mathbb{R}$, tj. interval (a, b) má konečnou délku,

(ii) f je ohraničená na (a, b).

V tomto odstavci rozšíříme pojem integrálu na případy, kdy některý z těchto předpokladů není splněn. V takovém případě mluvíme o *nevlastních integrálech*.

Nejdříve budeme uvažovat nesplnění prvního předpokladu.

3.5.1 Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na $[a, \infty)$, která je integrabilní na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a,\ b \in \mathbb{R}$.
Položme $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t \to \infty} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} F(t).$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *diverguje*.

Analogicky definujeme konvergenci nevlastního integrálu $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$.

Je-li funkce f definována na $\mathbb{R}$ a integrabilní na každém uzavřeném intervalu, pak pravíme, že nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje*, jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ konvergují nevlastní integrály $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ a $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ a klademe $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.2 Příklady

1. $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^k},\ k \in \mathbb{R}$

   $k \neq 1:\ F(t) = \int\limits_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \left[\frac{1}{-k+1}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_1^t = \frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{t^{k-1}} - 1\right),\ \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{k-1}, & k > 1 \\ \infty, & k < 1 \end{cases}$

   $k = 1:\ F(t) = \int\limits_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^t = \ln t - \ln 1,\ \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \infty$

   Tedy $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$ konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.

2. $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{R}$

   $k \neq 0:\ F(t) = \int\limits_0^t e^{-kx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-kx}}{k}\right]_0^t = \frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k},\ \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0 \\ \infty, & k < 0 \end{cases}$

   $k = 0:\ F(t) = \int\limits_0^t \mathrm{d}x = t,\ \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \infty$

   Tedy $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x$ konverguje pro $k > 0$ a diverguje pro $k \leq 0$.

3. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

   $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{t\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^t = \lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$

   $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_t^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{t\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_t^0 = \lim\limits_{t\to-\infty} (-\operatorname{arctg} t) = \frac{\pi}{2}$

   Tedy $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.

4. $\int\limits_0^\infty \cos x\mathrm{d}x$

   $F(t) = \int\limits_0^t \cos x\mathrm{d}x = [\sin x]_0^t = \sin t,\ \lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ neexistuje, $\int\limits_0^\infty \cos x\mathrm{d}x$ diverguje.

5. $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x) = \begin{cases} n, & x = n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$

   $F(t) = \int\limits_0^t f(x)\mathrm{d}x = 0$, tedy $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = 0$.

   Nevlastní integrál může konvergovat, i když je integrovaná funkce neohraničená.

V tvrzeních 3.5.3 – 3.5.8 budeme předpokládat, že všechny uvažované funkce jsou definovány na $[a,\infty),\ a \in \mathbb{R}$ a integrabilní na $[a,b]$ pro každé $b > a$.

Tato tvrzení se týkají integrálů typu $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$. Po příslušné úpravě předpokladů však platí i pro integrály typu $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.3 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium)

Integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každá dvě $t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_1 > x_0,\ t_2 > x_0$ platí $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

D.: Plyne z 1.6.6. □

3.5.4 Věta (Srovnávací kriterium)

Nechť na intervalu $[a,\infty)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$.
Konverguje-li $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, konverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.
Diverguje-li $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, diverguje i $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$.

D.: Nechť $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konverguje. Podle 3.5.3 existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_1 > x_0,\ t_2 > x_0$ platí $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Volme označení tak, že $t_1 < t_2$. Pak podle 3.3.2.1 je $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x \geq 0,\ \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Tedy $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. (První nerovnost plyne z 3.3.6)

Podle 3.5.3 $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

Nechť $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ diverguje. Podle první části důkazu nemůže $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konvergovat. □

3.5.5 Věta (limitní srovnávací kriterium)

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a,b)$ a nechť existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$.
Je-li $c < \infty$ a konverguje-li $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.
Je-li $c > 0$ a diverguje-li $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, pak diverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

D.: Nechť $c < \infty$ a $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \geq a$ takové, že pro $x \geq x_0$ platí $c - \varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < c + \varepsilon$, neboli $f(x) < (c+\varepsilon)g(x)$.

Z konvergence $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ plyne konvergence $\int\limits_{x_0}^\infty g(x)\mathrm{d}x$ a tedy i konvergence $\int\limits_{x_0}^\infty (c+\varepsilon)g(x)\mathrm{d}x$. Odtud podle

3.5.4 plyne konvergence $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ a tedy i konvergence $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Nechť $c > 0$ a $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & c < \infty \\ 0, & c = \infty \end{cases}.$

Kdyby $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konvergoval, pak by podle první části důkazu $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ konvergoval. □

3.5.6 Důsledky

1. Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in (0, \infty)$, pak oba nevlastní integrály $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ a $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ buď současně konvergují, nebo současně divergují.

2. Buď f nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$.

   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 1$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f(x) < \infty$, pak $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.
   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k \leq 1$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f(x) > 0$, pak $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverguje.
   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{kx} f(x) < \infty$, pak $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.
   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k \leq 0$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{kx} f(x) > 0$, pak $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

D.: 3.5.5, 3.5.2.1 a 3.5.2.2. □

3.5.7 Věta (Nutná podmínka konvergence nevlastního integrálu)

Nechť $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje a nechť existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}^*$. Pak $c = 0$.

D.: Připusťme $c > 0$.
Podle definice limity existují $x_0 \geq a$ a $k > 0$ takové, že pro $x \geq x_0$ je $f(x) > k$.
$\int\limits_{x_0}^{\infty} k\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} k(t - x_0) = \infty$. Podle 3.5.4 diverguje $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ a tedy i $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ — spor.
Možnost $c < 0$ vyloučíme analogicky. □

Poznámka: Předpoklad o existenci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nelze obecně vynechat, jak ukazuje 3.5.2.5.

3.5.8 Věta

Konverguje-li $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 3.5.3 existují $x_0 \geq a$ a $t_1, t_2 > x_0$ takové, že $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. Volme $t_1 < t_2$.

Pak $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ (první nerovnost platí podle 3.3.9).
Tvrzení nyní plyne z 3.5.3. □

3.5.9 Definice

Nechť f je funkce definovaná na $[a, \infty)$ a integrabilní na $[a, b]$ pro každé $b > a$. Řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\int\limits_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$.

Poznámky:

- Z 3.5.8 plyne, že konverguje-li $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ absolutně, pak konverguje.
- Je-li f nezáporná funkce na $[a, \infty)$ a integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje, pak konverguje absolutně.

Nyní budeme uvažovat nesplnění druhého z předpokladů uvedených na začátku odstavce.

3.5.10 Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť funkce f je definována na $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f, jestliže f není ohraničená na $[a, b)$ a pro každé $\beta \in (a, b)$ je integrabilní na $[a, \beta]$.

3.5.11 Definice

Nechť f je funkce definovaná na $[a, b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Pro $t \in [a, b)$ položme
$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

Existuje-li vlastní $\lim\limits_{t \to b-} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t \to b-} F(t)$.

Neexistuje-li vlastní $\lim\limits_{t \to b-} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverguje.*

Analogicky definujeme singulární bod a pro funkci definovanou na intervalu $(a, b]$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.12 Příklad

$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k}, \;\; k \in \mathbb{R}, \;\; k > 0$

$k \neq 1: \;\; F(t) = \int\limits_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \left[\frac{1}{1-k}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_t^1 = \frac{1}{1-k}\left(1 - \frac{1}{t^{k-1}}\right), \;\; \lim\limits_{t \to 0+} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}, & k < 1 \\ \infty, & k > 1 \end{cases}$

$k = 1: \;\; F(t) = \int\limits_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^t = \ln 1 - \ln t = -\ln t, \;\; \lim\limits_{t \to 0+} F(t) = \infty$

Tedy $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$ konverguje pro $k < 1$ a diverguje pro $k \geq 1$.

Pro nevlastní integrály typu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ platí tvrzení analogická 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5 a 3.5.8. Důkazy se provedou shodným způsobem.

3.5.13 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium)

Integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, kde b je singulární bod funkce f konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in [a,b)$ takové, že pro každá dvě $t_1, t_2 \in (x_0, b)$ platí $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

3.5.14 Věta (Srovnávací kriterium)

Nechť b je singulárním bodem funkce f i funkce g a nechť na intervalu $[a,b)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$.
Konverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Diverguje-li $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, diverguje i $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3.5.15 Věta (limitní srovnávací kriterium)

Nechť b je singulárním bodem funkce f i funkce g, funkce f, g jsou nezáporné na $[a,b)$ a nechť existuje $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$.
Je-li $c < \infty$ a konverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Je-li $c > 0$ a diverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, pak diverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.16 Věta

Nechť b je singulárním bodem funkce f. Konverguje-li $\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Analogická tvrzení platí i pro nevlastní integrály typu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, je-li a singulárním bodem funkce f.

3.6 Aplikace určitého integrálu

3.6.1 Průměrná hodnota (integrální průměr) veličiny $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$

$$\bar{y} \; = \; \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

3.6.2 Plocha rovinného obrazce

1. Obrazec v kartézských souřadnicích určený nerovnostmi $a \leq x \leq b,\; f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.

$$S \; = \; \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x$$

2. Obrazec v kartézských souřadnicích ohraničený uzavřenou křivkou o parametrických rovnicích $\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Křivka je orientována kladně, tj. tak, že plocha leží nalevo od křivky.

$$S \; = \; -\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t \; = \; \int\limits_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t \; = \; \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\mathrm{d}t$$

3. Plocha, kterou opisuje průvodič křivky, zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}(r(\varphi))^2 \mathrm{d}\varphi$$

3.6.3 Délka rovinné křivky

1. Křivka zadána parametrickými rovnicemi $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

2. Křivka je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$s = \int\limits_{a}^{b}\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

3. Křivka zadána v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$.

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi$$

3.6.4 Objem tělesa

1. Těleso ohraničené rovnoběžnými rovinami vzdálenými od sebe na vzdálenost a se známými plochami řezů $S(x)$ rovinami rovnoběžnými s podstavami ve vzdálenosti x.

$$V = \int\limits_{0}^{a} S(x)\mathrm{d}x$$

2. Těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x.

$$V = \pi\int\limits_{a}^{b}(f(x))^2\mathrm{d}x$$

3. Těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy y.

$$V = 2\pi\int\limits_{a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x$$

3.6.5 Plocha pláště rotačního tělesa

1. Těleso vzniklé rotací křivky o parametrických rovnicích $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$$S = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}|y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

2. Těleso vzniklé rotací grafu funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$S = 2\pi\int\limits_{a}^{b}|f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

3.7 Numerická integrace

3.7.1 Lemma

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) druhou derivaci. Pak ke každému $x \in [a,b]$ existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(b-x)\,.$$

D.: Označme $P(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Pak P je jineární polynom a platí $P(a) = f(a),\ P(b) = f(b)$. Tedy pro $x = a$ nebo $x = b$ platí formule v tvrzení při libovolném $\xi \in (a,b)$.
Buď $x_0 \in (a,b)$ libovolný pevně zvolený bod a položme $F(x) = f(x) - P(x) - \dfrac{f(x_0)-P(x_0)}{(x_0-a)(b-x_0)}(x-a)(b-x)$.
Pak platí $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$. Podle 2.3.1 existují $\xi_1 \in (a,x_0)$ a $\xi_2 \in (x_0,b)$ takové, že $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$. Dále opět podle 2.3.1 existuje $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ takové, že $F''(\xi) = 0$.
Pro každé $x \in (a,b)$ platí $P''(x) = 0$, $[(x-a)(b-x)]'' = -2$, tedy $0 = F''(\xi) = f''(\xi) + 2\dfrac{f(x_0)-P(x_0)}{(x_0-a)(b-x_0)}$.
Odtud $f(x_0) = -\dfrac{f''(\xi)}{2}(x_0-a)(b-x_0) + P(x_0)$ a poněvadž $x_0 \in (a,b)$ bylo libovolné, je tvrzení dokázáno.
□

3.7.2 Lemma

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) druhou derivaci takovou, že $|f''(x)| \le M$ pro každé $x \in (a,b)$. Pak pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{M}{2}(x^2-(a+b)x+ab) \ \le\ f(x)\ \le\ f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{M}{2}(x^2-(a+b)x+ab)\,.$$

D.: Podle 3.7.1 je pro každé $x \in [a,b]$
$$\left| f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right| = \frac{|f''(\xi(x))|}{2}(x-a)(b-x) \le \frac{M}{2}(-x^2+(a+b)x-ab)\,,$$
z čehož plyne tvrzení. □

3.7.3 Věta (lichoběžníkové pravidlo)

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) ohraničenou druhou derivaci a buď $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$\begin{aligned}
&h = \frac{b-a}{n}\,,\\
&x_i = a + ih,\ i = 0,1,2,\ldots,n\,,\\
&I_n(f,a,b) = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))\,,\\
&M = \sup\{|f''(x)| :\ x \in (a,b)\}\,.
\end{aligned}$$

Pak

$$\left| I_n(f,a,b) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \ \le\ \frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\,.$$

D.: Pro každé $i \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ je

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \pm \frac{M}{2}(x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}) \right) \mathrm{d}x \ =$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) \pm \frac{M}{2}(x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}) \right) \mathrm{d}x \ =$$

$$= f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \left[\frac{(x - x_i)^2}{2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \pm \frac{M}{2} \left[\frac{x^3}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{x^2}{2} + x_i x_{i+1} x \right]_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= hf(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}\frac{h^2}{2} \pm \frac{M}{2} \left(\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} + x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \right) =$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \pm \frac{M}{2} h \left(\frac{x_{i+1}^2 + x_{i+1}x_i + x_i^2}{3} - \frac{x_{i+1}^2 + 2x_{i+1}x_i + x_i^2}{2} + x_{i+1}x_i \right) =$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \pm \frac{M}{12} h(2x_{i+1}x_i - x_{i+1}^2 - x_i^2) \ = \ \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \mp \frac{M}{12}h^3 \,.$$

Podle 3.7.2 a 3.3.6 platí

$$\frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{M}{12}h^3 \ \le \ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \ \le \ \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) + \frac{M}{12}h^3 \,.$$

Sečtením těchto nerovností pro n od 0 do $n-1$ a s využitím 3.3.13.2 dostaneme

$$\frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) - \frac{M}{12}h^3 n \ \le \ \int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \ \le$$

$$\le \ \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) + \frac{M}{12}h^3 n \,,$$

což je tvrzení. □

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} = 0$, je podle 1.3.7 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f,a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.7.4 Věta (Simpsonovo [1710 – 1761] pravidlo)

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) ohraničenou čtvrtou derivaci a buď $m \in \mathbb{N}$ sudé. Označme

$$h = \frac{b-a}{m}\,,$$

$$x_i = a + ih, \ i = 0,1,2,\ldots,m\,,$$

$$J_m(f,a,b) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{m-1}) + f(x_m))\,,$$

$$N = \sup\{|f^{(4)}(x)| : x \in (a,b)\}\,.$$

Pak

$$\left| J_m(f,a,b) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \le \frac{N}{180}\frac{(b-a)^5}{m^4}\,.$$

Myšlenka důkazu: Na každém z intervalů $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ nahradíme funkci f kvadratickým polynomem

$$P(x) = \frac{(x - x_{2k+1})(x - x_{2k+2})f(x_{2k})}{(x_{2k} - x_{2k+1})(x_{2k} - x_{2k+2})} + \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+2})f(x_{2k+1})}{(x_{2k+1} - x_{2k})(x_{2k+1} - x_{2k+2})} + \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})f(x_{2k+2})}{(x_{2k+2} - x_{2k})(x_{2k+2} - x_{2k+1})}\,,$$

pro který platí $f(x_{2k}) = P(x_{2k}), \ f(x_{2k+1}) = P(x_{2k+1}), \ f(x_{2k+2}) = P(x_{2k+2})$. □

3.8 Cvičení

Najděte primitivní funkci

1) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$, 2) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$, 3) $\int \frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$,

4) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$, 5) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x$, 6) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$,

7) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$, 8) $\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x$, 9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(5x-2)^5}}$,

10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$, 11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$, 12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$,

13) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}$, 14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$, 15) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

16) $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$, 17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+e^{-x}}$, 18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$,

19) $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$, 20) $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$, 21) $\int \sin x\,\ln(\mathrm{tg}\, x)\,\mathrm{d}x$,

22) $\int \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x$, 23) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$, 24) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$,

25) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$, 26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$, 27) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$,

28) $\int \cos^5 \mathrm{d}x$, 29) $\int \sin 5x\,\cos x\,\mathrm{d}x$, 30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$,

31) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$, 32) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$, 33) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Rozhodněte o konvergenci nevlastních integrálů

34) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$, 35) $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$, 36) $\int\limits_2^\infty \frac{\ln^k x}{x}\mathrm{d}x$.

Vypočítejte plochu obrazce ohraničeného danými křivkami (x, y jsou kartézské souřadnice, r, φ polární)

37) $y=|\log_{10} x|,\ y=0,\ x=\frac{1}{10},\ x=10$, 38) $y=(x+1)^2,\ x=\sin\pi x,\ y=0$,

39) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 40) $y^2=x^2(a^2-x^2)$,

41) $x=2t-t^2,\ y=2t^2-t^3$, 42) $x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$,

43) $r=a\sin 3\varphi$, 44) $r=\frac{p}{1-\cos\varphi},\ \varphi=\frac{\pi}{4},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$,

45) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

Vypočítejte délku křivky

46) $y=\sqrt{x^3},\ 0\le x\le 4$, 47) $y=\ln(\cos x),\ 0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$,

48) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$, 49) $x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$,

50) $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, 51) $r=a\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami

52) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=\frac{c}{a}x,\ z=0$, 53) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ z=\pm c$.

54) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami $y=2x-x^2$, $y=0$ kolem osy x a objem tělesa vzniklého rotací téhož obrazce kolem osy y.

55) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami o parametrických rovnicích $x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$ kolem osy x a objem tělesa vzniklého rotací téhož obrazce kolem osy y.

56) Vypočítejte povrch tělesa vzniklého rotací asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ kolem osy x.

57) Vypočítejte $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$ pomocí lichoběžníkového pravidla s $n = 8$ a odhadněte chybu. Výsledek porovnejte s přesnou hodnotou.

Výsledky:

1) $x - \frac{1}{x} - \ln x^2$ 2) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right)$ 3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - x$ 4) $\arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$ 5) $\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 6) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + x$ 7) $\operatorname{sgn}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(\sin x - \cos x)$ 8) $\operatorname{tg} x - x$ 9) $\frac{2}{(30-75x)\sqrt{5x-2}}$ 10) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}\,x - \sqrt{3x^2-2}\right|$ 11) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 12) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ 13) $\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$ 14) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ 15) $\cos\frac{1}{x}$ 16) $-\ln|\cos x|$ 17) $\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x$ 18) $\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} - 1\right) - x$ 19) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ 20) $x\sin x\cos x - \frac{2x^2-1}{4}\cos 2x$ 21) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x\ln(\operatorname{tg} x)$ 22) $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$ 23) $-\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\ln(t^2+1) - 6\operatorname{arctg} t$, kde $t = \sqrt[6]{x+1}$ 24) $\sqrt{x} - \frac{x - \sqrt{x(1+x)}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right)$ 25) $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$ 26) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$ 27) $\frac{3}{2+4t} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3}$, kde $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$ 28) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ 29) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x$ 30) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$ 31) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$ 32) $\frac{-\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)}$ 33) $\frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t$, kde $t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}$ 34) konverguje 35) diverguje 36) konverguje pro $k < -1$, diverguje pro $k \geq -1$ 37) $\frac{99\ln 10 - 81}{\ln 100}$ 38) $\frac{\pi+2}{3\pi}$ 39) πab 40) $\frac{4}{3}a^3$ 41) $\frac{8}{15}$ 42) $\frac{3}{8}\pi\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}$ 43) $\frac{\pi a^2}{4}$ 44) $\frac{p^2}{6}\left(3 + 4\sqrt{2}\right)$ 45) a^2 46) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ 47) $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$ 48) $8a$ 49) $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$ 50) $\frac{3\pi a}{2}$ 51) $|a|\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\sqrt{2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}}\right)$ 52) $\frac{2}{3}abc$ 53) $\frac{8}{3}\pi abc$ 54) $\frac{16}{15}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$ 55) $\frac{32}{105}\pi ab^2$, $\frac{32}{105}\pi a^2 b$ 56) $\frac{12}{5}\pi a^2$ 57) 0.6941, chyba≤ 0.003, přesná hodnota 0.6932

Kapitola 4

Nekonečné řady

4.1 Pojem řady a jejího součtu

4.1.1 Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Položme

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1\,, \\ s_2 &= a_1 + a_2\,, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3\,, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů nekonečné řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka: Budeme uvažovat i nekonečné řady tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ a p.

Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývají *členy řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4.1.2 Definice

Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečná řada a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost jejích častečných součtů.

Jestliže existuje vlastní limita $\lim s_n = s$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*, číslo s nazýváme jejím *součtem* a píšeme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Neexistuje-li vlastní limita $\lim s_n$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*. Je-li přitom $\lim s_n = \pm\infty$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *určitě diverguje*, neexistuje-li ani nevlastní $\lim s_n$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

4.1.3 Příklad — Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$$

Členy řady: $a_n = aq^{n-1}$
Částečné součty: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1})$

Platí:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a(1+q+\cdots+q^{n-1}+q^n) \;=\; a+aq(1+q+\cdots+q^{n-1}) \;=\; a+qs_n \\ s_{n+1} &= a_{n+1}+s_n \;=\; aq^n+s_n \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} aq^n+s_n &= a+qs_n \\ s_n(1-q) &= a(1-q^n) \\ s_n &= a\frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Je-li $|q|<1$, pak $\lim q^n=0$; je-li $q>1$, pak $\lim q^n=\infty$; je-li $q\le -1$, pak neexistuje vlastní ani nevlastní limita posloupnosti $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$; je-li $q=1$, nemá předchozí vyjádření smysl a je $s_n=na$.
Celkem: Geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konverguje pro $|q|<1$ a má součet $\dfrac{a}{1-q}$, určitě diverguje pro $q\ge 1$ a osciluje pro $q\le -1$.

4.1.4 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n\ge n_0$ a $m\in\mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon$.

D.: Plyne bezprostředně z 1.3.22. □

4.1.5 Věta (nutná podmínka konvergence)

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n=0$.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\lim s_n=s$. Pak $\lim a_n=\lim(s_n-s_{n-1})=\lim s_n-\lim s_{n-1}=s-s=0$. □

Poznámka: Tato podmínka není postačující — $\lim\frac{1}{n}=0$ ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ určitě diverguje do $+\infty$. Viz 1.1.2.1.

4.1.6 Definice

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečná řada, $n\in\mathbb{N}$ libovolné pevně zvolené. Řada $R_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots$ (utvořená vynecháním prvních n členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$) se nazývá *$n$-tý zbytek řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4.1.7 Věta

Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i každý její zbytek a platí $\lim R_n=0$.

Konverguje-li alespoň jeden zbytek řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i tato řada.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Označme $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů zbytku R_n. Je $\sigma_k=s_{n+k}-s_n$.
Posloupnost $\{s_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje a tedy podle 1.3.6.4 konverguje i $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Dále $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}(s_{n+k}-s_n))=\lim\limits_{n\to\infty}(s-s_n)=s-s=0$.
Konverguje-li R_n, je $R_n\in\mathbb{R}$ a tedy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k+R_n$, což jakožto součet dvou reálných čísel je reálné číslo. □

4.1.8 Věta (asociativní zákon)

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Označme $n_0 = 0$ a položme

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}\,.$$

Pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

D.: Posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ je vybraná z posloupnosti částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots =$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + \big(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}\big) + \cdots =$$

$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_k + \cdots$$

Tvrzení nyní plyne z 1.3.14. □

Poznámka: Předpoklad o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je podstatný:
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ osciluje, posloupnost částečných součtů je $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$
$1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$
Řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ se nazývá *Grandiho.*

4.1.9 Věta (distributivní zákon)

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

D.: Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

s'_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n$.

Pak $s'_n = c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c s_n$. Tvrzení nyní plyne z poznámky za 1.3.6. □

Poznámka: Komutativní zákon obecně neplatí.

4.1.10 Věta

Konvergují-li řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.$$

D.: Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

s'_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

S_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Pak $S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = s_n + s'_n$.
Tvrzení nyní plyne z 1.3.6.2 □

4.1.11 Věta

Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \dots,$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ konvergují a nechť c_1, $c_2, \dots,$ c_k jsou reálná čísla. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_1 a_n^1 + c_2 a_n^2 + \dots + c_k a_n^k)$ konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 a_n^1 + c_2 a_n^2 + \dots + c_k a_n^k) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \dots + c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k ,$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k} c_m a_n^m = \sum_{m=1}^{k} c_m \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m .$$

D.: Úplnou indukcí z 4.1.9 a 4.1.10. $\square$

Poznámka: Zejména pro $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 1$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k} a_n^m = \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^m .$$

Symbol k v poslední formuli nelze nahradit symbolem ∞.

4.1.12 Věta (Cauchyova o aritmetických průměrech)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

D.: Označme $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.
Připusťme $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zvolme čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \alpha < \beta < \limsup_{n\to\infty} b_n .$$

Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_1$ je $a_n < \alpha$. Pro $n > n_1$ tedy platí

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}}{n} + \frac{a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_n}{n} < \\ &< \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}}{n} + \frac{\alpha(n - n_1)}{n} . \end{aligned}$$

Pro $n \to \infty$ konverguje pravá strana této nerovnosti k α. To znamená, že existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $b_n \leq \alpha < \beta$. Odtud plyne, že $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \beta$, což je spor.
Platí tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Analogicky ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.
Celkem tedy je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, z čehož vyplyne tvrzení. $\square$

4.1.13 Poznámka o sumaci divergentních řad

Oscilujícím řadám jsme dosud nepřiřazovali žádný symbol jako jejich součet. Někdy je ale užitečné i takovým řadám nějaký „součet“ přiřadit. Taková zobecněná sumace musí splňovat jisté přirozené podmínky:

(i) Je-li $\sum a_n = a$ ve smyslu definice 4.1.2, musí být $\sum a_n = a$ v zobecněném smyslu.

(ii) Je-li $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ v zobecněném smyslu a α, β jsou reálná čísla, pak $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$ v zobecněném smyslu.

Sumace, která splňuje (i) a (ii), se nazývá *regulární.*

Cesàrova [1859 – 1906] metoda (metoda aritmetických průměrů): Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost jejích částečných součtů. Jestliže platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = a$, pak klademe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ v Cesàrově smyslu.

Z 4.1.12 plyne, že Cesàrova sumace je regulární.

4.2 Řady s nezápornými členy

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

4.2.1 Věta

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ s nezápornými členy buď konverguje nebo určitě diverguje k $+\infty$. Konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je ohraničená.

D.: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Posloupnost částečných součtů je neklesající a tvrzení plyne z 1.3.4, 1.3.9 a 1.3.12.5. □

Poznámka: Všechna následující tvrzení mohou být formulována se změněnými předpoklady. Místo „pro každé $n \in \mathbb{N}$" lze psát „existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$". (Sr. 4.1.7)

4.2.2 Věta (Integrální Cauchyovo - Maclaurinovo kriterium)

Nechť f je funkce definovaná na $[1, \infty)$, která je zde nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

D.: Poněvadž je f na $[1, \infty)$ monotonní, je podle 3.2.11 integrabilní na $[1, b]$ pro každé $b > 1$.

Označme $J_n = \int\limits_1^{n} f(x)\mathrm{d}x$.

Pro každé $x \in [i, i+1],\ i \in \mathbb{N}$ platí $a_i = f(i) \geq f(x) \geq f(i+1) = a_{i+1}$ a tedy

$$a_i = \int\limits_i^{i+1} a_i \mathrm{d}x \geq \int\limits_i^{i+1} f(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_i^{i+1} a_{i+1}\mathrm{d}x = a_{i+1}\,.$$

Sečtením těchto nerovností pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1} \geq \int\limits_1^{n} f(x)\mathrm{d}x = J_n \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_n - a_1\,,$$

neboli

$$s_n - a_1 \leq J_n \leq s_{n-1}\,.$$

Nechť $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje. Pak podle 1.6.4 konverguje posloupnost $\{J_n\}$ a tedy podle 1.3.4 je ohraničená. Existuje $K \in \mathbb{R}$, že $J_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Celkem $s_n \leq K + a_1$, je shora ohraničená a neklesající, tedy konvergentní (podle 1.3.9) a podle 4.2.1 je i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Nechť $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverguje. Poněvadž f je nezáporná, je funkce $F(t) = \int\limits_1^{t} f(x)\mathrm{d}x$ neklesající a tedy $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \infty$. Odtud $\lim J_n = \infty$ a také podle poznámky za 1.3.11 $\lim s_{n-1} = \lim s_n = \infty$. □

4.2.3 Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \le 1$. (Viz 3.5.2.)

4.2.4 Věta (první srovnávací kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \le b_n$. Pak platí: Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

D.: Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
s'_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
Pak $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n = s'_n$.
Je-li $\lim s'_n = b < \infty$, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \le s'_n \le b$, neboť posloupnost $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je také neklesající a je shora ohraničená, což podle 1.3.9 znamená, že je konvergentní.
Je-li $\lim s_n = \infty$, je podle poznámky za 1.3.11 také $\lim s'_n = \infty$. $\square$

4.2.5 Definice

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy. Je-li $a_n \le b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *majorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *minorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Větu 4.2.4 lze přeformulovat: S konvergentní řadou s nezápornými členy konverguje i každá její minoranta, s divergentní řadou s nezápornými členy diverguje i každá její majoranta.

4.2.6 Věta (limitní srovnávací kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řada s kladnými členy a nechť existuje $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:
Je-li $c < \infty$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Je-li $c > 0$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

D.: Nechť $c < \infty$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Posloupnost $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je podle 1.3.4 ohraničená, existuje tedy $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_n}{b_n} \le K$, neboli $a_n \le Kb_n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Kb_n$ je podle 4.1.9 konvergentní, takže podle 4.2.4 je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Nechť $c > 0$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. K $\varepsilon \in (0, c) > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_n}{b_n} > c - \varepsilon > 0$. Položme $k = \min\left\{\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots, \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}}, c - \varepsilon\right\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_n}{b_n} \ge k$, neboli $a_n \ge kb_n$. Kdyby řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala, pak by podle 4.1.9 a 4.2.4 konvergovala i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, což by byl spor. $\square$

Důsledek: Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s kladnými členy. Jestliže existuje $\lim \dfrac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, pak řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ současně konvergují nebo divergují.

4.2.7 Věta (odmocninové (Cauchyovo) kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Existuje-li takové $q \in [0, 1)$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \le q$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro nekonečně mnoho indexů n nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ určitě diverguje.

D.: Je-li $\sqrt[n]{a_n} \le q$, pak $a_n \le q^n$ a první tvrzení plyne z 4.2.4 a 4.1.3.
Je-li $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ pro nekonečně mnoho indexů n, pak $a_n \ge 1$ pro nekonečně mnoho indexů n a nemůže být $\lim a_n = 0$. Druhé tvrzení tedy plyne z 4.1.5 a 4.2.1. $\square$

4.2.8 Věta (limitní odmocninové kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje $\lim \sqrt[n]{a_n} = c \in \mathbb{R}^*$.

Je-li $c < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ určitě diverguje.

D.: Nechť $c < 1$ a buď $\varepsilon \in (0, 1-c)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon < 1$. První tvrzení plyne z 4.2.7 a 4.1.7.
Nechť $c > 1$ a buď $\varepsilon \in (0, c-1)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} > c - \varepsilon > 1$. Druhé tvrzení plyne z 4.2.7. $\square$

4.2.9 Věta (druhé srovnávací kriterium)

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s kladnými členy a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Pak platí:
Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

D.: $0 < \dfrac{a_2}{a_1} \le \dfrac{b_2}{b_1},\ 0 < \dfrac{a_3}{a_2} \le \dfrac{b_3}{b_2}, \dots, 0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \le \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$.
Vynásobením těchto nerovností dostaneme $0 < \dfrac{a_n}{a_1} \le \dfrac{b_n}{b_1}$, neboli $a_n \le \dfrac{a_1}{b_1} b_n$.
Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje podle 4.1.9 i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1}{b_1} b_n$ a tedy podle 4.2.4 konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Kdyby řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala, pak by podle již dokázané části věty řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala a to by byl spor. $\square$

4.2.10 Věta (podílové (d'Alembertovo [1717 – 1783]) kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Existuje-li takové $q \in [0, 1)$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

D.: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ a první tvrzení plyne z 4.2.9 a 4.1.3.

Je-li $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, pak $a_{n+1} \ge a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kladná a neklesající, nemůže tedy být $\lim a_n = 0$. Druhé tvrzení plyne z 4.1.5. □

4.2.11 Věta (limitní podílové kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c \in \mathbb{R}^*$.
Je-li $c < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ určitě diverguje.

D.: Nechť $c < 1$ a buď $\varepsilon \in (0, 1-c)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c + \varepsilon < 1$. První tvrzení plyne z 4.2.10 a 4.1.7.

Nechť $c > 1$ a buď $\varepsilon \in (0, c-1)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > c - \varepsilon$, tedy $a_{n+1} > (c-\varepsilon)a_n > a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kladná a rostoucí, nemůže tedy být $\lim a_n = 0$. Druhé tvrzení plyne z 4.1.5. □

4.2.12 Lemma

Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

D.: Ukážeme, že $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

Je-li $a = \infty$, je tvrzení triviální.

Nechť $a < \infty$ a zvolme $b \in \mathbb{R},\ b > a$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < b$. Tedy

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < b,\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < b,\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} < b\,,$$

z čehož vynásobením dostaneme

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \ < \ b^{n-n_0}\,.$$

Odtud

$$\sqrt[n]{a_n} \ < \ \sqrt[n]{a_{n_0}}\, b^{\frac{n-n_0}{n}}\,.$$

Ze spojitosti exponenciální funkce plyne

$$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{n-n_0}{n}} = \lim_{n\to\infty} b^{1-\frac{n_0}{n}} = b\,.$$

Dále

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n_0}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a_{n_0}} = 1\,.$$

Celkem tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le b$.

Poněvadž $b > a$ bylo libovolné, je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le a$.

Analogicky ukážeme $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, takže celkem $a \le \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le a$. □

Z lemma plyne: pokud lze dokázat konvergenci řady s nezápornými členy pomocí podílového kriteria, pak ji lze dokázat i pomocí kriteria odmocninového. Podílové kriterium tedy není silnější, než odmocninové.

4.2.13 Další kriteria konvergence

Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy.

1. Logaritmické kriterium:
   Nechť existuje $\lim \dfrac{\ln a_n}{\ln n} = c$. Je-li $c < -1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c > -1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Raabeovo kriterium:
   Nechť existuje $\lim n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = c$. Je-li $c > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

3. Gaussovo [1777 – 1855] kriterium:
   Nechť existuje $\varepsilon > 0$ a ohraničená posloupnost $\{\Theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \,.$$

   Je-li $\lambda > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Je-li $\lambda < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
   Je-li $\lambda = 1$ a $\mu > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Je-li $\lambda = 1$ a $\mu \leq 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

4.3 Řady absolutně a neabsolutně konvergentní

4.3.1 Věta

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Podle 4.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ a $n \geq n_0$ platí
$\big|\, |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| \,\big| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$ a tedy
$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$, což podle 4.1.4 znamená, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\square$

4.3.2 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje absolutně***, jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje neabsolutně*** (***relativně***), jestliže konverguje, avšak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ určitě diverguje.

4.3.3 Poznámky

1. Jestliže konverguje řada s nezápornými (nekladnými) členy, pak konverguje absolutně.

2. Poněvadž řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ má nezáporné členy, platí pro absolutní konvergenci analogická kriteria jako v 4.2.

3. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, pak má podle 4.1.7 nekonečně mnoho kladných a nekonečně mnoho záporných členů.

4.3.4 Věta

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

D.: Označme s_n posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a S_n posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
Pak $|s_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S_n$. Podle 1.3.6.1 a 1.3.5.1 je
$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} s_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |s_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. □

4.3.5 Věta

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená posloupnost, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje absolutně.

D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $|c_n| < k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 4.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Tedy také
$|c_{n+1}a_{n+1}| + |c_{n+2}a_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}a_{n+m}| = |c_{n+1}|\,|a_{n+1}| + |c_{n+2}|\,|a_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}|\,|a_{n+m}| <$
$< k|a_{n+1}| + k|a_{n+2}| + \cdots + k|a_{n+m}| = k(|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|) < k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$,
a tedy podle 4.1.4 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje. □

4.3.6 Definice

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, jestliže platí $a_n a_{n+1} < 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (T.j. členy řady střídají znaménka.)

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel, pak jsou řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ alternující.

4.3.7 Věta (Leibnizovo [1646 – 1716] kriterium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

D.: Nutnost plyne z 4.1.5.
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Poněvadž $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel, pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k - a_{k+1} \geq 0$.
Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ sudé platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+m-1} - a_{n+m}) = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+m-2} - a_{n+m-1}) - a_{n+m} \leq \\ &\leq a_{n+1}\,, \end{aligned}$$

a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ liché platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+m-2} - a_{n+m-1}) + a_{n+m} = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots - (a_{n+m-1} - a_{n+m}) \leq \\ &\leq a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \;\leq\; a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \;\leq\; a_{n+1}\,.$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Pro libovolné $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$|(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+m-1} a_{n+m}| \;=$$

$$=\; |(-1)^n||a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m}| \;=$$

$$=\; a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \;\leq\; a_{n+1} \;<\; \varepsilon\,,$$

což podle 4.1.4 znamená, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje. □

4.3.8 Příklad

Leibnizova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje.

Poněvadž podle 1.1.2.1 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverguje, konverguje Leibnizova řada neabsolutně.

4.3.9 Poznámka

Předpoklad, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost, nelze v 4.3.7 vynechat.
Například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n} \;=\; -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \cdots - \frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+2} - \cdots$$

diverguje. Kdyby tato řada konvergovala, pak by podle 4.1.8 konvergovala také řada

$$\left(-1 + \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+2}\right) + \cdots \;=\; \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{9}{30} + \cdots + \frac{4n+1}{4n^2+6n+2} + \cdots\,,$$

avšak podle 4.2.6 řada $\sum\limits_{n=0}^{n} \frac{4n+1}{4n^2+6n+2}$ diverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+1}{4n^2+6n+2}}{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{4n^2+6n+2} \;=\; 1$$

a harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ podle 4.2.3 diverguje.

4.3.10 Další kriteria neabsolutní konvergence

1. Dirichletovo [1805 – 1859] kriterium
   Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel s $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

2. Abelovo [1802 – 1829] kriterium
   Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní ohraničená posloupnost. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

4.3.11 Definice

Nechť $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$ (posloupnost přirozených čísel taková, že každé číslo se v ní vyskytuje právě jednou) a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ se nazývá *přeřazením řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. (Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ *vznikla z řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ přeřazením.)

Například: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$
$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$
$a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + a_6 + \cdots$

4.3.12 Definice

Řekneme, že pro konvergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí komutativní zákon*, jestliže každá řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ vzniklá z této řady přeřazením konverguje a má týž součet.
Řada, pro niž platí komutativní zákon, se nazývá *bezpodmínečně konvergentní*, řada, pro niž neplatí komutativní zákon, se nazývá *podmíněně konvergentní*.

4.3.13 Věta

Pro absolutně konvergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí komutativní zákon, t.j. absolutně konvergentní řada je bezpodmínečně konvergentní.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Podle 4.1.4 existuje $r \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq r,\ m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$.
Čísla $1, 2, \ldots, r$ se vyskytují v permutaci $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ množiny $\mathbb{N}$. Poněvadž jich je konečně mnoho, existuje $t \in \mathbb{N}$, že $\{1, 2, \ldots, r\} \subseteq \{\lambda_n\}_{n=1}^{t}$.
Pro libovolné $n \geq t$ a $k \in \mathbb{N}$ platí $\left|a_{\lambda_{n+1}}\right| + \left|a_{\lambda_{n+2}}\right| + \cdots + \left|a_{\lambda_{n+k}}\right| \leq |a_{r+1}| + |a_{r+2}| + \cdots + |a_{r+m}|$, kde $r+m$ je největší z indexů $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+k}$. Tedy $\left|a_{\lambda_{n+1}}\right| + \left|a_{\lambda_{n+2}}\right| + \cdots + \left|a_{\lambda_{n+k}}\right| < \varepsilon$ a podle 4.1.4 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ konverguje absolutně.
Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a S_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$. Pro $n \geq \max\{r, t\}$ platí
$|s_n - S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n - (a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_n})| \leq$
$\leq |a_{r+1}| + |a_{r+2}| + \cdots + |a_{r+m}| < \varepsilon$,
tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - S_n) = 0$, což znamená $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. $\square$

4.3.14 Lemma

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak řada sestavená z jejích kladných (resp. záporných) členů je určitě divergentní k $+\infty$ (resp. k $-\infty$).

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ je řada s kladnými členy sestavená z kladných členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-q_n)$ je řada s kladnými členy sestavená ze záporných členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
s_n^+ částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $\quad s_n^-$ částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-q_n)$.
Buďte $k,\ l$ taková přirozená čísla, že $s_n = s_k^+ - s_l^-$. Přitom $k + l = n$ a pro $n \to \infty$ také $k \to \infty$, $l \to \infty$.
Kdyby $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^+ \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{l\to\infty} s_l^- \in \mathbb{R}$, pak by $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = s_k^+ + s_l^-$, z čehož by vyplynulo, že řada

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Kdyby $\lim_{k\to\infty} s_k^+ = \infty$ a $\lim_{l\to\infty} s_l^- \in \mathbb{R}$, pak by podle 1.3.12.2 a 1.3.4 platilo $\lim_{l\to\infty} s_n = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ by divergovala.

Kdyby $\lim_{k\to\infty} s_k^+ \in \mathbb{R}$ a $\lim_{l\to\infty} s_l^- \infty$, pak by platilo $\lim_{l\to\infty} s_n = -\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ by divergovala.

Podle 4.2.1 tedy je $\lim_{k\to\infty} s_k^+ = \lim_{l\to\infty} s_l^- = \infty$. $\square$

4.3.15 Věta (Riemann [1826 – 1866])

Z libovolné neabsolutně konvergentní řady lze vhodným přeřazením obdržet řadu konvergentní k libovolnému předem danému číslu, řadu určitě divergentní nebo řadu oscilující.

D.: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada a nechť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jejích kladných členů, $\{-q_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jejích zápornných členů. Podle 4.3.14 jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ určitě divergentní k $+\infty$.

Buď $a \in \mathbb{R}$ libovolné. Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > a\,.$$

Buď $m_1 \in \mathbb{N}$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < a\,.$$

Dále buď $n_2 > n_1$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} > a$$

a $m_2 > m_1$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - q_{m1+2} - \cdots - q_{m_2} < a\,.$$

Atd.

Výsledkem je jistá řada vzniklá přeřazením řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je její posloupnost částečných součtů.

Je-li $s_n > a$, pak $s_n - a <$poslední kladný člen.

Je-li $s_n < a$, pak $s_n - a >$poslední záporný člen.

Tedy $q_l < s_n - a < p_k$ pro vhodná $k,\ l$.

Poněvadž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je podle 4.1.5 $\lim_{l\to\infty} q_l = \lim_{k\to\infty} p_k = 0$ a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = a$.

Dále ukážeme, že řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lze přeřadit tak, aby vzniklá řada divergovala k $+\infty$.

Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > 1\,.$$

Buď $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} > 2\,.$$

Buď $n_3 \in \mathbb{N},\ n_3 > n_2$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} - q_2 + p_{n_2+1} + p_{n_2+2} + \cdots + p_{n_3} > 3\,.$$

Atd.

Výsledkem je řada určitě divergující k $+\infty$.

Analogicky lze ukázat, že řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ lze přeřadit tak, aby vzniklá řada divergovala k $-\infty$.

Nakonec řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ přeřadíme tak, aby výsledkem byla řada oscilující.
Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > 1\,.$$

Buď $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < -1\,.$$

Buď $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} > 1\,.$$

Atd.
Výsledkem je oscilující řada. $\square$

Z Riemannovy věty plyne, že neabsolutně konvergentní řada je podmíněně konvergentní.

4.4 Dvojné řady

4.4.1 Definice

Zobrazení $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ se nazývá *dvojná posloupnost*.

Zápis: $f(m,n) = f_{mn}$, nebo $a_{mn},\ b_{mn},\ \ldots$
$\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$, stručně $\{a_{mn}\}$
Čísla a_{mn} se nazývají *členy* této posloupnost. Lze je uspořádat do schématu (nekonečné matice):

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

4.4.2 Poznámky

Snadno lze definovat ohraničenost dvojné posloupnosti: Existují konstanty $k, K \in \mathbb{R}$ že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ je $k \le a_{mn} \le K$.

Nelze definovat monotonnost dvojné posloupnosti. Lze definovat monotonnost vzhledem k jednomu indexu: $\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ je monotonní vzhledem k druhému indexu, je-li posloupnost $\{a_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní pro každé $m \in \mathbb{N}$.

4.4.3 Definice

Řekneme, že dvojná posloupnost $\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existují čísla $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každá dvě $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge m_0,\ n \ge n_0$ platí $|a_{mn} - a| < \varepsilon$.
Píšeme $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = a,\ \lim a_{mn} = a,\ a_{mn} \to a.$
Má-li posloupnost $\{a_{mn}\}$ limitu $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že je *konvergentní*.

4.4.4 Poznámky

1. Analogicky lze definovat nevlastní limity dvojné posloupnosti.

2. Některé věty o limitách posloupnosti lze snadno přenést na dvojné posloupnosti. Zejména 1.3.3, 1.3.5.1–3, 1.3.6 a 1.3.7.

3. Konvergentní dvojná posloupnost nemusí být ohraničená.

   Například $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$ má limitu 1 a není ohraničená.

4.4.5 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Dvojná posloupnost $\{a_{mn}\}$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé dvě dvojice $(m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $m \geq n_0,\ n \geq n_0,\ p \geq n_0,\ q \geq n_0$ platí $|a_{mn} - a_{pq}| < \varepsilon$.

D.: „$\Rightarrow$“ Triviální (analogicky jako 1.3.22).

„$\Leftarrow$“ Položme $b_n = a_{nn}$ (diagonální posloupnost). $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$.
Ukážeme, že také $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $m \geq n_1,\ n \geq n_1,\ p \geq n_1,\ q \geq n_1$ platí $|a_{mn} - a_{pq}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ platí $|b_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pro každé $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí
$|a_{mn} - a| = |a_{mn} - a_{nn} + b_n - a| \leq |a_{mn} - a_{nn}| + |b_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

4.4.6 Definice

Buď $\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ dvojná posloupnost a položme

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}} a_{ij}\,.$$

Dvojná posloupnost $\{s_{mn}\}$ se nazývá ***posloupnost částečných součtů dvojné řady*** $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum a_{mn}$.
Řekneme, že dvojná řada $\sum a_{mn}$ ***konverguje a má součet*** s, jestliže $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn} = s \in \mathbb{R}$. Řekneme, že tato dvojná řada určitě diverguje k ∞ (k $-\infty$), jestliže $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn} = \infty$ ($\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn} = -\infty$).

4.4.7 Poznámky

Snadno lze dokázat následující tvrzení:

1. Nutná podmínka konvergence dvojné řady $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ je $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = 0$.
   $(a_{mn} = s_{mn} - s_{m-1\,n} - s_{m\,n-1} + s_{m-1\,n-1})$

2. Cauchyovo - Bolzanovo kriterium:
   Dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé dvě dvojice (m,n), $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $m \geq n_0,\ n \geq n_0$ platí

$$\left| \sum_{\substack{n \leq i \leq n+p \\ m \leq j \leq m+q}} a_{ij} \right| < \varepsilon\,.$$

3. Jestliže $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = a \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} = b \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak
$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} (c_1 a_{mn} + c_2 b_{mn}) = c_1 \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} + c_2 \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$.

4. Nechť $a_{mn} \geq 0$ pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$. Dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je shora ohraničená.

5. Nechť pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_{mn} \leq b_{mn}$. Potom: konverguje-li řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$; diverguje-li řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, pak diverguje i řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$.

6. Konverguje-li řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

4.4.8 Definice

Řekneme, že dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$.

4.4.9 Věta (komutativní zákon pro dvojné řady)

Nechť dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konverguje absolutně a nechť $\mathbb{N}^2 = \bigcup\limits_{k \in I} N_k$ je disjunktní rozklad množiny $\mathbb{N}^2$ a nechť každá množina N_k je vyjádřena ve tvaru konečné nebo spočetné posloupnosti.
Je-li množina N_k nekonečná, pak řada $\sum\limits_{(m,n) \in N_k} a_{mn}$ absolutně konverguje.

Označíme-li $\sum\limits_{(m,n) \in N_k} a_{mn} = z_k$, pak platí $\sum\limits_{k \in I} z_k = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$. Přitom je-li množina I nekonečná, řada $\sum\limits_{k \in I} z_k$ konverguje absolutně.

Náznak důkazu:

Množinu $\mathbb{N}^2$ lze vyjádřit jako prostou posloupnost $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), \ldots, (m_l, n_l), \ldots\}$.
Označíme-li $b_l = a_{m_l, n_l}$, lze řadu $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l$ považovat za přeřazení dvojné řady $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

Podle 4.3.13 řada $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l$ konverguje absolutně a platí $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

Zřejmě $\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{N}_k} |a_{mn}| \leq \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ a tedy podle 4.4.7.4 řada $\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{N}_k} a_{mn}$ konverguje absolutně.

Řadu $\sum\limits_{k} z_k = \sum\limits_{k} \left(\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{N}_k} a_{mn} \right)$ lze považovat za přeřazení řady $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l$.
Podle 4.3.13 řada $\sum\limits_{k} z_k$ konverguje absolutně a platí $\sum\limits_{k} z_k = \sum\limits_{l} b_l$.
(Podrobný důkaz viz např. Jarník, Diferenciální počet II, Věta 39) $\square$

4.4.10 Sumační metody dvojných řad

Konstrukce popsaná v předchozí větě se nazývá sumační metoda dvojné řady. Aplikovat sumační metodu na dvojnou řadu $\sum a_{mn}$ znamená

— Množinu $\mathbb{N}^2$ vyjádřit jako sjednocení konečné nebo spočetné posloupnosti po dvou disjunktních množin N_k.

— Každou množinu N_k uspořádat do konečné nebo spočetné posloupnosti.

— Utvořit součty (řady) $\sum\limits_{(m,n)\in N_k} a_{mn} = z_k$.

— Utvořit součet (řadu) $\sum\limits_k z_k$.

Jestliže dvojná řada $\sum a_{mn}$ konverguje absolutně, pak konverguje absolutně i každá takto vytvořená řada a platí $\sum a_{mn} = \sum z_k$.

Některé významné sumační metody:

- *Sumace po čtvercích*
  $N_1 = \{(1,1)\}$
  $N_2 = \{(2,1),(2,2),(1,2)\}$
  $N_3 = \{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}$
  $\vdots$
  Pak $\sum a_{mn} = a_{11} + (a_{21} + a_{22} + a_{12}) + (a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{23} + a_{13}) + \cdots$
- *Sumace po diagonálách*
  $N_1 = \{(1,1)\}$
  $N_2 = \{(2,1),(1,2)\}$
  $N_3 = \{(3,1),(2,2),(1,3)\}$
  $\vdots$
  Pak $\sum a_{mn} = a_{11} + (a_{21} + a_{12}) + (a_{31} + a_{22} + a_{13}) + \cdots$
- *Dvojnásobné řady*
  $N_k = \{(k,1),(k,2),(k,3),\dots\}$ (k-tý řádek)
  nebo
  $N_k = \{(1,k),(2,k),(3,k),\dots\}$ (k-tý sloupec)
  Pak $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$ nebo $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right)$

4.5 Součin řad

4.5.1 Definice

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nekonečné řady. Jejich *součinem* rozumíme dvojnou řadu $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$, kde $c_{mn} = a_m b_n$.

4.5.2 Věta

Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ konvergují absolutně. Pak jejich součin $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$ konverguje rovněž absolutně a platí $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} = ab$.

D.: Označme $s = \sum |a_m|$, $t = \sum |b_n|$,
ρ_m částečné součty řady $\sum |a_m|$, σ_n částečné součty řady $\sum |b_n|$,
$\tilde{\rho}_m$ částečné součty řady $\sum a_m$, $\tilde{\sigma}_n$ částečné součty řady $\sum b_n$,
s_{mn} částečné součty dvojné řady $\sum |c_{mn}| = \sum |a_m b_n|$.

$s_{mn} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_i b_j| = \sum\limits_{i=1}^{m} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j| = \rho_m \sigma_n \le st$ a podle 4.4.7.4 $\sum |c_{mn}|$ konverguje, tedy $\sum c_{mn}$ konverguje absolutně.
Na dvojnou řadu $\sum c_{mn}$ lze aplikovat sumaci po čtvercích.
Dostaneme $\sum c_{mn} = c_{11} + (c_{21} + c_{22} + c_{12}) + (c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{23} + c_{13}) + \cdots$.
Částečné součty této řady jsou
$s_1 = c_{11} = a_1 b_1 = \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1$
$s_2 = c_{11} + (c_{21} + c_{22} + c_{12}) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 = (a_1 + a_2) b_1 + (a_1 + a_2) b_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_2$

$\vdots$

$s_n = \tilde{\rho}_n \tilde{\sigma}_n$ $\square$

Aplikací nějaké sumační metody dostaneme konkrétní tvary součinů řad.

Sumace po čtvercích $\Rightarrow$ *Dirichletův součin řad*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) &= a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3) + \cdots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{i=1}^{n-1} b_i \;+\; a_nb_n \;+\; b_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\end{aligned}$$

Sumace po diagonálách $\Rightarrow$ *Cauchyův součin řad*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) &= a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\end{aligned}$$

4.5.3 Věta

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ je jejich Dirichletův součin. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = ab$.

D.: Označíme-li ρ_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

σ_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$,

s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

pak analogicky jako v důkazu věty 4.5.2 ukážeme, že $s_n = \rho_n\sigma_n$, z čehož podle 1.3.6.3 vyplyne $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = ab$, tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = ab$. $\square$

Poznámka: Pro Cauchyův součin podobné tvrzení neplatí:
Položme $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Podle 4.3.7 řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují.
Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin, tedy

$$\begin{aligned}c_n &= (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}}\right), \\ |c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \;\geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} \;=\; \frac{n+1}{n+1} \;=\; 1,\end{aligned}$$

takže nemůže platit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ a podle 4.1.5 řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ nekonverguje.

4.5.4 Věta (Mertens [1840 – 1927])

Nechť řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergují a alespoň jedna z nich absolutně. Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin. Pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = ab$.

D.: Nechť $\sum a_n$ konverguje absolutně a označme ρ_n, resp. σ_n, resp. s_n částečné součty řady $\sum a_n$, resp. $\sum b_n$, resp. $\sum c_n$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \rho_n &= a, \\
\lim_{n\to\infty} \sigma_n &= b, \\
s_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) = \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_0 = \\
&= a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_0
\end{aligned}$$

Označme $\beta_n = \sigma_n - b$. Pak $\sigma_n = b + \beta_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Tedy

$$s_n = a_0(b+\beta_n) + a_1(b+\beta_{n-1}) + \cdots + a_n(b+\beta_0) = b(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 .$$

Označme $\omega_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$ Pak $s_n = b\rho_n + \omega_n$. Nyní stačí ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} b\rho_n = b \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = ab$.

Řada $\sum |a_n|$ konverguje, to znamená, že má ohraničené částečné součty, neboli existuje $m \in \mathbb{R},\ m > 0$, že

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \le m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, to znamená, že posloupnost $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená, neboli existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$, že

$$|\beta_n| < k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, k číslu $\dfrac{\varepsilon}{2m} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \ge n_1$ platí

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2m} .$$

$\sum |a_n|$ konverguje, takže podle 4.1.4 k číslu $\dfrac{\varepsilon}{2k} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \ge n_2$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2k} .$$

Buď $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro libovolné $n > 2n_0$ platí

$$\begin{aligned}
|\omega_n| &= |a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0| \le \\
&\le |a_0|\,|\beta_n| + |a_1|\,|\beta_{n-1}| + \cdots + |a_{n_0}|\,|\beta_{n-n_0}| + |a_{n_0+1}|\,|\beta_{n-n_0-1}| + \cdots + |a_n|\,|\beta_0| \le \\
&\le (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n_0}|)\frac{\varepsilon}{2m} + (|a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \cdots + |a_n|)k \le m\frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2k}k = \varepsilon ,
\end{aligned}$$

což znamená $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. $\square$

4.5.5 Věta (Cesàro [1859 – 1906])

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin. Je-li $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = ab$.

D.: Označme ρ_n, resp σ_n částečný součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, resp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ a dále $\alpha_n = \rho_n - a$, $\beta_n = \sigma_n - b$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\rho_n = a + \alpha_n$, $\sigma_n = b + \beta_n$.
V důkazu věty 4.5.4 jsme ukázali, že $s_n = a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_0$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} s_0 + s_1 + \cdots + s_n &= a_0\sigma_0 + (a_0\sigma_1 + a_1\sigma_0) + \cdots + (a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_0) = \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)\sigma_0 + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})\sigma_1 + \cdots + a_0\sigma_n = \\ &= (a + \alpha_n)(b + \beta_0) + (a + \alpha_{n-1})(b + \beta_1) + \cdots + (a + \alpha_0)(b + \beta_n) = \\ &= (n+1)ab + a(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n) + b(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + \\ &\quad + \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n\,. \end{aligned}$$

Dále

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = ab + a\frac{\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n}{n+1} + b\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n+1} + \frac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n}{n+1}\,.$$

Podle 4.1.12 je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n+1} = 0$.
K dokončení důkazu tedy stačí ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n}{n+1} = 0$.
Posloupnosti $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ jsou podle 1.3.4 ohraničené, a tedy existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $|\alpha_n| \le k$, $|\beta_n| \le k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Buď nyní $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{k} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_1$ je $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{k}$ a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_2$ je $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{k}$.
Buď $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro $n > 2n_0$ platí

$$\begin{gathered} |\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_{n_0}\beta_{n-n_0} + \alpha_{n_0+1}\beta_{n-n_0-1} + \cdots + \alpha_n\beta_0| \le \\ (|\alpha_0|\,|\beta_n| + |\alpha_1|\,|\beta_{n-1}| + \cdots + |\alpha_{n_0}|\,|\beta_{n-n_0}|) + (|\alpha_{n_0+1}|\,|\beta_{n-n_0-1}| + \cdots + |\alpha_n|\,|\beta_0|) < \\ \left(k\frac{\varepsilon}{k} + k\frac{\varepsilon}{k} + \cdots + k\frac{\varepsilon}{k}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{k}k + \frac{\varepsilon}{k}k + \cdots + \frac{\varepsilon}{k}k\right) = (n+1)\varepsilon\,. \end{gathered}$$

To znamená, že pro $n > n_0$ je $\dfrac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n}{n+1} < \varepsilon$. □

Z 4.1.12 a 4.5.5 bezprostředně plyne

4.5.6 Věta (Abel [1802 – 1829])

Buďte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergentní řady a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ jejich Cauchyův součin. Jestliže $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje, pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = ab$.

Poznámka: Porovnáním s 4.1.13 vidíme, že platí i obecnější tvrzení: Buďte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergentní řady. Jestliže jejich Cauchyův součin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje v Cesàrově smyslu, pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = ab$ v Cesàrově smyslu.

4.6 Posloupnosti a řady funkcí

4.6.1 Definice

Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$ a f jsou reálné funkce takové, že $\operatorname{Dom} f \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodově konverguje k funkci* f *na množině* $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ a píšeme

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje k $f(x)$, neboli když pro každé $x \in M$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Množina $\left\{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n : \{f_n(x)\} \text{ konverguje}\right\}$, se nazývá *obor bodové konvergence posloupnosti funkcí* $\{f_n\}$.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ bodově konverguje k funkci f na množině M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Všimněme si, že číslo n_0 závisí na ε i na x.

Má-li každá z funkcí posloupnosti $\{f_n\}$ nějakou vlastnost, limitní funkce $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ tutéž vlastnost mít může, ale nemusí.

— Jsou-li všechny funkce f_n nezáporné (nekladné), je i funkce f nezáporná (nekladná).

— Jsou-li všechny funkce f_n neklesající (nerostoucí), je i funkce f neklesající (nerostoucí).

— Jsou-li všechny funkce f_n klesající (rostoucí), nemusí být funkce f klesající (rostoucí).
Např. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

— Jsou-li všechny funkce f_n ohraničené, nemusí být funkce f ohraničená.
Např. $f_n(x) = \dfrac{n}{nx+1}$ na intervalu $(0,\infty)$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$

— Jsou-li všechny funkce f_n spojité, nemusí být funkce f spojitá.
Např. $f_n(x) = x^{2n}$, $x \in [-1,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$

4.6.2 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na množině* $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ *k funkci* f a píšeme $f_n \rightrightarrows f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Všimněme si, že číslo n_0 závisí pouze na ε.
Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na množině M k funkci f stejnoměrně, pak na této množině konverguje k funkci f bodově. Opak obecně neplatí.
Je-li množina M uzavřeným intervalem $[a,b]$ a každá z funkcí f_n je spojitá, je stejnoměrná konvergence těchto funkcí konvergencí posloupnosti v metrickém prostoru $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$ (sr. 5.1.2.4). Podle 5.4.2.6 je tento prostor úplný, což znamená, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je funkcí spojitou.

4.6.3 Příklady

Nechť $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$.

- Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu $[1,2]$ stejnoměrně k funkci $f(x) \equiv 0$.

  D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} + 1\right]$. Pak $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$, $\dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$.
  Pro $n \geq n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} < \dfrac{2nx}{n^2x^2} = \dfrac{2}{nx} \leq \dfrac{2}{n} \leq \dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$. $\square$

- Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu $[0,1]$ bodově k funkci $f(x) \equiv 0$, ale tato konvergence není stejnoměrná.

D.: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

$f_n(\frac{1}{n}) = \dfrac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{2} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $\varepsilon \in (0,1)$ je tedy $|f_n(\frac{1}{n}) - f(x)| = |f_n(\frac{1}{n})| = 1 > \varepsilon$.
$\square$

4.6.4 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0,\ m \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

D.: „$\Rightarrow$“ analogie 1.3.22

„$\Leftarrow$“ Pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská. Existuje tedy bodová $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Ukážeme, že $f_n \rightrightarrows f$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n, m \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Odtud $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. $\square$

Poznámka: Posloupnost funkcí, která má vlastnost z 4.6.4, se nazývá *stejnoměrně cauchyovská.*

4.6.5 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f a nechť g je funkce ohraničená na M. Pak $gf_n \rightrightarrows gf$ na M.

D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $|g(x)| < k$ pro každé $x \in M$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{k} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Nyní pro každé $x \in M$ a $n \geq n_0$ platí $|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)||f_n(x) - f(x)| < k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. $\square$

4.6.6 Věta

Buďte $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ posloupnosti funkcí a $M \subseteq \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n\right) \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} g_n\right)$ Jestliže $f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows g$ na M pak $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $x \in M$ a $n \geq n_1$ je $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $x \in M$ a $n \geq n_2$ je $|g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tedy pro všechna $x \in M$ a $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí
$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

4.6.7 Důsledek

Nechť $f_n^1 \rightrightarrows f^1, f_n^2 \rightrightarrows f^2, \ldots, f_n^k \rightrightarrows f^k,\ c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Pak

$$c_1 f_n^1 + c_2 f_n^2 + \cdots + c_k f_n^k = \sum_{i=1}^{k} c_i f_n^i \rightrightarrows \sum_{i=1}^{k} c_i f^i\,.$$

4.6.8 Definice

Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí, $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Posloupnost funkcí $\{s_n\}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů řady funkcí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *bodově konverguje na množině* M *a má zde součet* s, jestliže $\{s_n\}$ bodově konverguje k funkci s na M.

Množina $\left\{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n : \sum f_n(x) \text{ konverguje}\right\}$, se nazývá *obor bodové konvergence řady funkcí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *stejnoměrně konverguje na množině* M *a má zde součet* s, jestliže $\{s_n\}$ stejnoměrně konverguje k funkci s na M.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = s$ bodově na M, jestliže pro každé $x \in M$ je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$.

Jestliže řada funkcí konverguje na nějaké množině stejnoměrně, pak na ní konverguje bodově. Opak obecně neplatí.

4.6.9 Věta

Nechť řady funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^1 = s^1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2 = s^2, \ldots, \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^k = s^k$ konvergují ke svým součtům stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{k} \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n^j\right)$ a $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} c_j f_n^j\right)$ konverguje stejnoměrně k $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j s^j$ na M.

D.: Plyne z 4.6.7. □

4.6.10 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$.

D.: Aplikací 4.6.4 na posloupnost částečných součtů. □

4.6.11 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje na množině* $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ *absolutně*, jestliže pro každé $x \in M$ konverguje (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

4.6.12 Věta (srovnávací kriterium)

Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti funkcí, $M \subseteq \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n\right) \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} g_n\right)$ a nechť $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$. Jestliže řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na M, pak řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na M stejnoměrně a absolutně.

D.: Nejprve poznamenejme, že z podmínky $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ plyne, že všechny funkce g_n jsou nezáporné.
Absolutní bodová konvergence plyne z 4.2.4. Ukážeme, že konvergence je stejnoměrná.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 4.6.10 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in M$ platí

$$|g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x)| = g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x) < \varepsilon\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+m}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+m}(x)| \leq \\ &\leq g_{n+1}(x)+g_{n+2}(x)+\cdots+g_{n+m}(x) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

4.6.13 Důsledek (Weierstrassovo [1815 – 1897] kriterium)

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti funkcí, $M \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$. Jestliže (číselná) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně a stejnoměrně na M.

4.6.14 Kriteria stejnoměrné konvergence

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti funkcí, $M \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *nerostoucí* (resp. *neklesající*) na M, jestliže pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí (resp. neklesající). Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí nebo neklesající, nazývá se *monotonní*.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *stejnoměrně ohraničená* na M, jestliže existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|f_n(x)| \leq k$.

1. Dirichletovo kriterium:
   Nechť posloupnost funkcí $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní na M, $g_n \rightrightarrows 0$ na M a posloupnost částečných součtů řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně ohraničená na M. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ stejnoměrně konverguje na M.
2. Důsledek Dirichletova kriteria:
   Nechť číselná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně ohraničená M. Pak řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ stejnoměrně konverguje na M.
3. Abelovo kriterium:
   Nechť posloupnost funkcí $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně ohraničená na M a nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na M. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ stejnoměrně konverguje na M.

4.7 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad

4.7.1 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Je-li každá z funkcí f_n spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak je f spojitá v bodě x_0.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž $f_n \rightrightarrows f$ na J, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1,\ x \in J$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Poněvadž f_n je spojitá v x_0, existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J$ platí $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Poněvadž $f_n(x_0) \to f(x_0)$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ platí $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Pro $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ a každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J$ platí

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

4.7.2 Důsledek

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Je-li každá z funkcí f_n spojitá na J, pak je f spojitá na J.

4.7.3 Věta (Moore [1882–1974] - Osgood [1864–1943])

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Nechť $x_0 \in J$ nebo x_0 je krajní bod intervalu J a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$. (V případě, že x_0 je krajní bod intervalu J, jedná se o příslušnou jednostrannou limitu.) Pak existuje $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ a platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, neboli

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) .$$

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Podle 4.6.4 existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0,\ x \in J$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme $|a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy Cauchyovská a podle 1.3.22 existuje $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.
Ukážeme, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$:

$f_n \rightrightarrows f$ na J $\quad\Rightarrow\quad$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2,\ x \in J$ je $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$ $\quad\Rightarrow\quad$ existuje $\delta > 0$, že pro $x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap J$ je $|f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ $\quad\Rightarrow\quad$ existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_3$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pro $n \geq \max\{n_2, n_3\}$ platí $|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - a_n + a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. $\square$

4.7.4 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b] \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a, b]$ integrabilní v Riemannově smyslu a $x_0 \in [a, b]$ je libovolný. Pak funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a pro každé $x \in [a, b]$ platí $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \right) ,$$

přičemž konvergence posloupnosti funkcí na pravé straně je stejnoměrná na intervalu $[a, b]$.

D.: Nejdříve ukážeme, že $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ je integrabilní. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž $f_n \rightrightarrows f$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b - a)}$.
Poněvadž funkce f_{n_0} je integrabilní, podle 3.2.10 existuje dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \in \vartheta([a, b])$ takové, že $S(D, f_{n_0}) - s(D, f_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Označme $\tilde{m}_i = \inf\{f_{n_0}(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\quad \tilde{M}_i = \sup\{f_{n_0}(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Pak $|\tilde{m}_i - m_i| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, $|\tilde{M}_i - M_i| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, takže $M_i - m_i < \tilde{M}_i - \tilde{m}_i + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Dále

$$\begin{aligned}
S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i\right)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) = \\
&= S(D, f_{n_0}) - s(D, f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

což podle 3.2.10 znamená, že funkce f je integrabilní.
Označme $\mathrm{R}[a,b]$ množinu všech Riemannovsky integrabilních (a tedy ohraničených) funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$. Pro $\varphi, \psi \in \mathrm{R}[a,b]$ položme

$$\rho_S(\varphi,\psi) = \sup\{|\varphi(x) - \psi(x)| : x \in [a,b]\}\,.$$

Analogicky jako v 5.1.2.4 ověříme, že $(\mathrm{R}[a,b], \rho_S)$ je metrický prostor a snadno nahlédneme, že stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí integrabilních na intervalu $[a,b]$ je konvergencí posloupnosti v prostoru $(\mathrm{R}[a,b], \rho_S)$. (Podle první části důkazu je prostor $(\mathrm{R}[a,b], \rho_S)$ úplný.)
Definujme zobrazení $F : \mathrm{R}[a,b] \to \mathrm{C}[a,b]$ předpisem

$$F(\varphi)(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t\,.$$

Pro $\varphi, \psi \in \mathrm{R}[a,b]$ platí:

$$\begin{aligned}
\rho_C(F(\varphi), F(\psi)) &= \max\{|F(\varphi)(x) - F(\psi)(x)| : x \in [a,b]\} = \\
&= \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x}\psi(t)\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} = \\
&= \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}(\varphi(t) - \psi(t))\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} \leq \\
&\leq \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(t) - \psi(t)|\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} \leq \\
&\leq \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}\sup\{|\varphi(\tau) - \psi(\tau)| : \tau \in [a,b]\}\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} = \\
&= \max\{|(x - x_0)|\,\rho_S(\varphi,\psi) : x \in [a,b]\} = \max\{(b - x_0), (x_0 - a)\}\,\rho_S(\varphi,\psi)\,.
\end{aligned}$$

Označíme-li tedy $L = \max\{(b - x_0), (x_0 - a)\}$, je $\rho_C(F(\varphi), F(\psi)) \leq L\rho_S(\varphi,\psi)$, což znamená, že F je Lipschitzovské zobrazení a podle 5.5.10 spojité.
Podle 5.5.3 převádí spojité zobrazení metrických prostorů konvergentní posloupnost na konvergentní posloupnost a platí

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\,,$$

což je formule z tvrzení věty. Navíc konvergence posloupnosti v prostoru $\mathrm{C}[a,b]$ je stejnoměrnou konvergencí posloupnosti funkcí. $\square$

4.7.5 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b] \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a,b]$ integrabilní v Riemannově smyslu. Pak funkce f je integrabilní na $[a,b]$ a platí $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

D.: plyne bezprostředně z 4.7.4 a z toho, že z konvergence stejnoměrné plyne bodová. □

4.7.6 Věta

Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí diferencovatelných na otevřeném intervalu $J \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$. Nechť existuje $x_0 \in J$ takový bod, že (číselná) posloupnost $\{f_n(x_0)\}$ konverguje. Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na J, pak posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na J k diferencovatelné funkci f, pro niž platí $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ pro každé $x \in J$, neboli

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right).$$

D.: Především poznamenejme, že vzhledem k 3.3.16 zůstává věta 4.7.4 v platnosti, zaměníme-li $[a,b]$ za (a,b). Podle 3.4.3 a 3.1.5 existuje posloupnost $\{c_n\}$ taková, že

$$f_n(x) = c_n + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Odtud plyne, že $f_n(x_0) = c_n$ a tedy podle předpokladu existuje $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Podle předpokladu dále existuje funkce g taková, že $f_n' \rightrightarrows g$ na J. Pro $x \in J$ položme

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\,.$$

Funkce f je podle 3.4.3 diferencovatelná. Podle 4.7.4 $\int\limits_{x_0} f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int\limits_{x_0} g(t)\mathrm{d}t$, takže

$f_n = c_n + \int\limits_{x_0} f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows c + \int\limits_{x_0} g(t)\mathrm{d}t = f$ a podle 3.4.3 pro každé $x \in J$ je $f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. □

Poznámky:

1. Předpoklad o existenci $x_0 \in J$ takového, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$ nelze obecně vynechat.

   Např.: $f_n(x) \equiv n,\ f_n' \equiv 0 \rightrightarrows 0$, avšak $\{f_n\}$ nekonverguje.

2. Z předpokladu stejnoměrné konvergence posloupnosti diferencovatelných funkcí $\{f_n\}$ neplyne (ani bodová) konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n'\}$.

   Např.: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx,\ J = (-2\pi, 2\pi)$. Pak $f_n \rightrightarrows 0,\ f_n'(x) = \cos nx,\ f_n'(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$.

Následující věty plynou z předchozích užitím posloupnosti částečných součtů řady funkcí.

4.7.7 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Je-li každá z funkcí f_n spojitá na J, pak je f spojitá na J.

4.7.8 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Nechť $x_0 \in J$ nebo x_0 je krajní bod intervalu J a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$. (V případě, že x_0 je krajní bod intervalu J, jedná se o příslušnou jednostrannou limitu.) Pak řada $\sum a_n$ konverguje, existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ a platí $\sum a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, neboli

$$\sum \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum f_n(x) \right) .$$

4.7.9 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b] \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a,b]$ integrabilní v Riemannově smyslu a $x_0 \in [a,b]$ je libovolný. Pak funkce f je integrabilní na $[a,b]$ a pro každé $x \in [a,b]$ platí $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \sum \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \right) ,$$

přičemž konvergence řady funkcí na pravé straně je stejnoměrná na intervalu $[a,b]$.

4.7.10 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b] \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a,b]$ integrabilní v Riemannově smyslu. Pak funkce f je integrabilní na $[a,b]$ a platí $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \sum \int\limits_{a}^{b} f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_{a}^{b} \left(\sum f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum \left(\int_{a}^{b} f_n(t)\mathrm{d}t \right) .$$

4.7.11 Věta

Buď $\sum f_n$ řada funkcí diferencovatelných na otevřeném intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$. Nechť existuje $x_0 \in J$ takový bod, že (číselná) řada $\sum f_n(x_0)$ konverguje. Jestliže řada funkcí $\sum f_n'$ konverguje stejnoměrně na J, pak řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na J k diferencovatelné funkci f, pro niž platí $f'(x) = \sum f_n'(x)$ pro každé $x \in J$, neboli

$$\left(\sum f_n(x) \right)' = \sum f_n'(x) , \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum f_n(x) \right) = \sum \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \right) .$$

4.8 Mocninné řady

4.8.1 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, $x_0 \in \mathbb{R}$. *Mocninná (potenční) řada se středem* x_0 *a koeficienty* a_n je řada funkcí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Specielně pro $x_0 = 0$ jde o řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$.

Substituce $y = x - x_0$ převede řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ v řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Proto se v první části tohoto odstavce (po 4.8.11) omezíme na mocninné řady tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Mocninná řada konverguje ve svém středu a má zde součet a_0.

4.8.2 Definice

Buď $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mocninná řada. Jestliže tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *vždy konverguje*. Jestliže tato řada pro každé $x \neq 0$ diverguje, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *vždy diverguje*.

Příklady:

1. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ vždy diverguje.

   Buď $x_1 \in \mathbb{R}$ libovolné. Pro $n \geq \dfrac{2}{|x_1|}$ je $|n^n x_1^n| \geq 2^n \to \infty$, a tedy nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} n^n x_1^n = 0$. Podle 4.1.5 (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x_1^n$ diverguje.

2. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ vždy konverguje.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|}{n+1} = 0$, takže podle 4.2.11 číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ řada absolutně konverguje.

4.8.3 Věta

Buď $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mocninná řada.

Jestliže existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že (číselná) řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje, pak pro každé $x \in \mathbb{R},\ |x| < |x_0|$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně.

Jestliže existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že (číselná) řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ diverguje, pak pro každé $x \in \mathbb{R},\ |x| > |x_0|$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje.

Jestliže mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ani vždy nekonverguje, ani vždy nediverguje, pak existuje $r \in \mathbb{R}$ takové, že tato řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R},\ |x| < r$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R},\ |x| > r$.

D.:

- Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje. Buď $x \in \mathbb{R},\ |x| < x_0$.

  Poněvadž $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje, podle 4.1.5 je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$ a tedy podle 1.3.4 existuje $k \in \mathbb{R}$, že $|a_n x_0^n| \leq k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

  Pro $x \in \mathbb{R},\ |x| < |x_0|$ platí $|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \dfrac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n < k \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$.

  Podle 4.1.3 řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ konverguje a tedy podle 4.2.4 konverguje i řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, neboli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně.

- Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ diverguje. Kdyby existovalo $x_1 \in \mathbb{R},\ |x_1| > |x_0|$ takové, že by $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ konvergovala, pak by podle již dokázané části konvergovala i řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$.

- Označme $M = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x \geq 0,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje}\right\}$. Poněvadž $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vždy nediverguje, existuje podle předchozího tvrzení horní závora množiny M. Podle 1.1.7 existuje $r = \sup M \in \mathbb{R}$.

Je-li $x \in \mathbb{R}, |x| > r$, pak $x \notin M$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje.

Je-li $x \in \mathbb{R}, |x| < r$, pak podle 1.1.6(s2*) existuje $x_0 \in M$ takové, že $x_0 > |x|$. Podle prvního tvrzení řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně. $\square$

4.8.4 Definice

Číslo r z 4.8.3 se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a otevřený interval $(-r, r)$ se nazývá *konvergenční interval* této řady.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vždy konverguje, klademe $r = \infty$, jestliže tato řada vždy diverguje, klademe $r = 0$.

Příklad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

Pro $x = 1$ se jedná o řadu harmonickou, tedy podle 1.1.2.1 divergentní.
Pro $x = -1$ se jedná o řadu Leibnizovu, tedy podle 4.3.8 konvergentní.
V tomto případě je tedy $r = 1$, konvergenční interval je $(-1, 1)$, obor konvergence je $[-1, 1)$.

4.8.5 Věta (Cauchy [1789 –1857] - Hadamard [1865 – 1963])

Buď $\sum a_n x^n$ mocninná řada a r její poloměr konvergence. Pak

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Přitom klademe $r = 0$ pro $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ a $r = \infty$ pro $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

D.:

- Nechť $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Ukážeme, že $\sum a_n x^n$ vždy konverguje.

  Buď $x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \neq 0$ libovolné. Pak $\dfrac{1}{2|x_0|} > 0 = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ platí $\dfrac{1}{2|x_0|} > \sqrt[n]{|a_n|}$, tedy $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{1}{|x_0|^n} > |a_n|$. Odtud $|a_n|\,|x_0|^n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Řada $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ podle 4.1.3 konverguje a tedy podle 4.2.4 řada $\sum a_n x_0^n$ konverguje absolutně.
- Nechť $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. Ukážeme, že $\sum a_n x^n$ vždy diverguje.

  Buď $x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \neq 0$ libovolné. Pak pro nekonečně mnoho indexů n platí $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{|x_0|}$ a tedy pro nekonečně mnoho indexů n platí $|a_n|\,|x_0|^n > 1$. To znamená, že nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ a tedy podle 4.1.5 řada $\sum a_n x_0^n$ diverguje.
- Nechť $0 < a = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

  – Buď $x_0 \in \mathbb{R},\ 0 < |x_0| < \dfrac{1}{a}$. Ukážeme, že $\sum a_n x_0^n$ konverguje.

    Zvolme $b \in \mathbb{R},\ |x_0| < b < \dfrac{1}{a}$. Pak $\dfrac{1}{b} > a$ a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{b}$. Odtud $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x_0| < \dfrac{|x_0|}{b}$, $|a_n x_0^n| < \dfrac{1}{b^n}|x_0|^n = \left(\dfrac{|x_0|}{b}\right)^n$. Poněvadž $\dfrac{|x_0|}{b} < 1$, řada $\sum \left(\dfrac{|x|}{b}\right)^n$ podle 4.1.3 konverguje, a tedy podle 4.2.4 řada $\sum a_n x_0^n$ konverguje absolutně.

  – Buď $x_0 \in \mathbb{R},\ |x_0| > \dfrac{1}{a}$. Ukážeme, že $\sum a_n x_0^n$ diverguje.

    Pro nekonečně mnoho indexů n platí $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{|x_0|}$, $|a_n x_0^n| > 1$ a nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$. Podle 4.1.5 řada $\sum a_n x_0^n$ diverguje.

$\square$

4.8.6 Důsledek

Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel. Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}^*$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r = \dfrac{1}{a}$ (přitom klademe $r = 0$ pro $a = \infty$ a $r = \infty$ pro $a = 0$).

D.: Plyne z 4.2.12. $\square$

4.8.7 Věta

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak tato řada konverguje stejnoměrně na libovolném uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq (-r, r)$.
Konverguje-li řada $\sum a_n r^n$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $[a, r]$ pro libovolné $a \in (-r, r)$.
Konverguje-li řada $\sum a_n (-r)^n$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $[-r, a]$ pro libovolné $a \in (-r, r)$.

D.: Položme $c = r - \dfrac{1}{2}(r - \max\{|a|, |b|\})$. Pak pro každé $x_0 \in [a, b]$ je $|x_0| < c$, tedy $|a_n x_0^n| < |a_n c^n|$. Podle 4.8.3 řada $\sum |a_n c^n|$ konverguje a tedy podle 4.6.13 řada $\sum a_n x^n$ konverguje absolutně a stejnoměrně na $[a, b]$.
Nechť řada $\sum a_n r^n$ konverguje. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $r = 1$. (V opačném případě lze použít substituci $x \mapsto \dfrac{x}{r}$.)
(Číselná) řada $\sum a_n = \sum a_n 1^n$ konverguje.
Ukážeme, že řada funkcí $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 4.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ je $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Buď $x \in [0, 1)$. Pak

$$|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+m}x^{n+m}| \;=$$

$$\begin{aligned} = \;\; & |a_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2} + x^{n+2} - x^{n+3} + x^{n+3} - \cdots - x^{n+m} + x^{n+m}) + \\ & + a_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+3} + x^{n+3} - \cdots - x^{n+m} + x^{n+m}) + \cdots + \\ & + a_{n+m-1}(x^{n+m-1} - x^{n+m} + x^{n+m}) + a_{n+m}x^{n+m}| \;= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \;\; & |a_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2}) + (a_{n+1} + a_{n+2})(x^{n+2} - x^{n+3}) + \\ & + (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})(x^{n+3} - x^{n+4}) + \cdots + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m-1})(x^{n+m-1} - x^{n+m}) + \\ & + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m})x^{n+m}| \;= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \;\; & |(1 - x)[a_{n+1}x^{n+1} + (a_{n+1} + a_{n+2})x^{n+2} + (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})x^{n+3} + \cdots + \\ & + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m-1})x^{n+m-1}] + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m})x^{n+m}| \;\leq \end{aligned}$$

$$\leq \;\; (1 - x)\varepsilon(x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots + x^{n+m-1}) + \varepsilon x^{n+m} \;=$$

$$= \; (1 - x)\frac{\varepsilon}{2}x^{n+1}\frac{1 - x^{n+m-1}}{1 - x} + \frac{\varepsilon}{2}x^{n+m} \;=\; \frac{\varepsilon}{2}(x^{n+1} - x^{2n+m} + x^{n+m}) \;\leq \varepsilon x^{n+1} \;<\; \varepsilon\,.$$

Tedy pro každé $x \in [0, 1]$ je $|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+m}x^{n+m}| < \varepsilon$, což podle 4.6.10 znamená, že řada funkcí $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$.
Třetí tvrzení lze dokázat analogicky. $\square$

4.8.8 Věta (Abel [1802 – 1829])

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak součet s této řady je funkce spojitá na intervalu $(-r, r)$.
Nechť $0 < r < \infty$ a řada $\sum a_n r^n$ (resp. řada $\sum a_n (-r)^n$) je konvergentní. Pak součet s řady $\sum a_n x^n$ je funkce zleva spojitá v bodě r (resp. zprava spojitá v bodě $-r$).

D.: Věta plyne z 4.8.7, 4.7.7 a 4.7.8. $\square$

4.8.9 Poznámky

1. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t$$

   má také poloměr konvergence r. (sr. 4.7.9)

   D.: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}} \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot r = r$ □

2. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'$$

   má také poloměr konvergence r. (sr. 4.7.11)

3. Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak součet $s(x)$ této řady má na $(-r, r)$ derivace všech řádů, přičemž k-tou derivaci obdržíme k-násobným derivováním této řady „člen po členu“ a vzniklá mocninná řada má opět poloměr konvergence r.

4.8.10 Příklad

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{arctg} t \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

$$4 \sum_{n=0}^{499999} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 3.14159\underline{0}65358979324\underline{0}462643383\underline{2}69502884197$$

(Podtržením jsou vyznačeny nesprávné cifry; jsou čtyři na prvních čtyřiceti desetinných místech.)

4.8.11 Definice

Buď f funkce, která má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. *Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0* rozumíme mocninnou řadu

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Speciálně pro $x_0 = 0$ mluvíme o *Maclaurinově řadě.*

4.8.12 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Její Taylorova řada konverguje na nějakém intervalu J obsahujícím bod x_0 k funkci f právě tehdy, když pro posloupnost jejích Taylorových zbytků platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

D.: Využijeme větu 2.4.8 a označení v ní používané. Pro posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů Taylorovy řady platí $s_n(x) = T_n(x) = f(x) - R_n$. □

4.8.13 Věta

Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence r. Pak je tato řada Taylorovou řadou svého součtu f v konvergenčním intervalu ($f^{(n)}(x_0) = a_n n!$).

D.: Analogicky jako 2.4.5. $\square$

4.8.14 Definice

Funkce f se nazývá *analytická v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že na něm lze f vyjádřit jako součet mocninné řady. T.j. pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.
Funkce f se nazývá *analytická na otevřeném intervalu* J, je-li analytická v každém $x \in J$.

Je-li funkce f analytická, její vyjádření mocninou řadou (rozvoj do mocninné řady) je Taylorovou řadou. Zejména analytická funkce f má derivace všech řádů.

Opačné tvrzení neplatí. Funkce, která má derivace všech řádů nemusí být analytická.

Příklad: Funkce $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ má v bodě 0 derivace všech řádů rovny 0, tedy její Maclaurinova řada $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$ má na intervalu $(-\infty, \infty)$ součet 0, a přitom $f(x) > 0$ pro $x \neq 0$, což znamená, že funkce f není v bodě 0 analytická.

D.: Je-li $x > 0$, pak $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$,

$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x} + \dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{-1/x} = P_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$, kde P_2 je polynom,

$f''' = P_2'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x} + \dfrac{1}{x^2}P_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} = P_3\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$, kde P_3 je polynom, atd.

$\lim\limits_{x\to 0_+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} P_n(t)\mathrm{e}^{-1/x} = 0.$

Je-li $x < 0$, pak $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = Q_1\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}$, kde Q_1 je polynom,

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{1/x} + \dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{1/x} = Q_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}$, kde Q_2 je polynom, atd.

$\lim\limits_{x\to 0_-} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} Q_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} Q_n(-t)\mathrm{e}^{-t} = 0.$

Celkem tedy je $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. $\square$

4.8.15 Maclaurinovy řady některých elementárních funkcí

1. $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \qquad r = \infty$

2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad r = \infty$

3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad r = \infty$

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}, \qquad r = 1, \quad x \in (-1, 1]$

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad r = 1, \quad x \in (-1, 1)$

6. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad r = 1, \quad x \in [-1, 1]$

Sr. 2.4.7 a 4.8.10.

4.8.16 Aplikace mocninných řad

1. Výpočet funkčních hodnot
2. Výpočet limit
3. Výpočet derivací
4. Výpočet určitých i neurčitých integrálů
5. Sumace číselných řad
6. Výpočet obecného členu posloupnosti zadané rekurentně
7. Řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

4.9 Cvičení

Najděte součty řad

1) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\dots$ 2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\dots$

3) $\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\frac{5}{81}+\frac{6}{243}+\dots$ 4) $1+q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+q^3\cos3\alpha+\dots$

Rozhodněte o konvergenci řad

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1000}}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$ 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$ 12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

13) Dokažte, že řada převrácených hodnot členů aritmetické posloupnosti diverguje.

Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řad

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}\cos\frac{\pi n^2}{n^2+1}$

17) Ukažte, že druhá mocnina (chápaná jako Cauchyův součin) konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je řada divergentní.

Najděte obory konvergence a absolutní konvergence řad funkcí

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 22) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot2^{2n}}{3n}x^n(1-x)$ 25) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^2}$

Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují na daném intervalu stejnoměrně

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $(-2,2)$ 28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})x^n$, $[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$ 29) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{x^n}$, $[1,2]$

Najděte poloměry konvergence mocninných řad

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}$ $(a>1)$ 31) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,\ b>0)$ 32) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^{2n}$

Najděte obory konvergence mocninných řad

33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$ 34) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 35) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n+1}x^n$

Funkce rozviňte v Maclaurinovu řadu

36) $\frac{x}{1+x-2x^2}$ 37) $\frac{1}{1-x-x^2}$ 38) $\frac{1-\frac{1}{2}x}{1-x+x^2}$

39) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ 40) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 41) $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$

Najděte součet mocninné řady

42) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$

45) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 46) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 47) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$

Najděte součet číselné řady

48) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\dots$ 49) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}$

50) $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\dots$ 51) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!}$

S přesností alespoň 0.001 vypočítejte integrály

52) $\int\limits_0^{0.2}\sin x^2 \mathrm{d}x$ 53) $\int\limits_0^{0.4}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ 54) $\int\limits_0^{0.1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$

Vypočítejte limity

55) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ 56) $\lim\limits_{x\to\infty}((x^3-x^2+\frac{x}{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1})$ 57) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Výsledky: 1)$\frac{1}{2}$ **2)**$\frac{3}{4}$ **3)**$\frac{5}{4}$ **4)**$\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$ **5)**diverguje **6)**diverguje **7)**konverguje **8)**konverguje **9)**diverguje **10)**konverguje **11)**konverguje **12)**konverguje **14)**diverguje **15)**konverguje relativně **16)**konverguje absolutně **18)**absolutně pro $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ **19)**absolutně pro $x\in(-1,1)$ **20)**relativně pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\}$ **21)**absolutně pro $x\in(1,\infty)$ **22)**absolutně pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ **23)**absolutně pro $x\in(-1,1)$, relativně pro $x<1$ **24)**absolutně pro $x\in\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ **25)**absolutně pro $x\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},\infty)$ **26)**absolutně pro $x\in(-1,1]$ **27)**ano **28)**ano **29)**ne **30)**∞ **31)**$\max\{a,b\}$ **32)**$\sqrt{2}$ **33)**$(-2,2)$ **34)**$[-1,1]$ **35)**$\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **36)**$\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n, |x|<\frac{1}{2}$ **37)**$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, kde $\{a_n\}$ je Fibonacciho posloupnost 1,1,2,3,5,8,13,21,..., $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **38)**$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos\frac{n\pi}{3})x^n, |x|<1$ **39)**$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n, |x|<1$ **40)**$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, |x|<1$ **41)**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, |x|\le 1$ **42)** $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})$ **43)**$\ln\frac{1}{1-x}, -1\le x<1$ **44)** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2), |x|\le 1$ **45)**$\frac{1+x}{(1-x)^3}, |x|<1$ **46)** $\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2)$ **47)**$\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{1}{1-x}, |x|<1$ **48)**$\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ **49)**$\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$ **50)**$\frac{\sqrt{2}}{2}$ **51)**$\frac{1}{2\mathrm{e}}$ **52)** 0.001 **53)** 0.364 **54)** 0.1 **55)** $-\frac{1}{12}$ **56)** $\frac{1}{6}$ **57)** $\frac{1}{2}$

Kapitola 5

Metrické prostory

5.1 Pojem metriky

5.1.1 Definice

Buď $P \neq \emptyset$ množina a $\rho : P^2 \to [0, \infty)$ zobrazení, které pro všechna $x, y, z \in P$ splňuje

(M1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiom totožnosti)
(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axiom symetrie)
(M3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Zobrazení ρ nazýváme *metrika na* P, prvky množiny P nazýváme *body metrického prostoru* (P, ρ), číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdálenost* bodů x, y.

5.1.2 Příklady

1. Diskrétní metrický prostor
   $P \neq \emptyset$ libovolná množina, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$.

2. Metrika na $\mathbb{R}$
   $P = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

3. Metriky na $\mathbb{R}^n$
   $P = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

   $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ euklidovská metrika

   $\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ součtová metrika (taxíkářská metrika)

   $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ maximální metrika

   Axiomy (M1), (M2) jsou splněny triviálně. (M3) ověříme postupně:

   ρ_1: $\rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \rho_1(x, z)$

   ρ_∞: $\rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} + \max\{|y_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} \geq$
   $\geq \max\{|x_i - y_i| + |y_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} \geq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i|$ pro libovolné $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a tedy $\rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) \geq \max\{|x_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = \rho_\infty(x, z)$

   ρ_2: Vyjdeme z nerovnosti $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ (Cauchy-Buňakovski-Schwarz)

   $u_i = p_i + q_i,\ v_i = q_i :\quad \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) q_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$

$u_i = p_i, \; v_i = p_i + q_i : \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(p_i + q_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)^2}$

Sečtením: $\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)^2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2} \right)$

neboli $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$ (Minkowského nerovnost)

Píšeme-li v poslední nerovnosti $x_i - y_i$ místo p_i a $y_i - z_i$ místo q_i, dostaneme

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}$, tedy

$\rho_2(x, z) \leq \rho_2(x, y) + \rho_2(y, z)$.

4. Buď $P = \mathrm{C}[a, b]$ — množina funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$

   $\rho_C(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ metrika stejnoměrné konvergence

   $\rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ integrální metrika

   1.7.12 ukazuje, že ρ_C je definována korektně. (M1) a (M2) jsou opět splněny triviálně.
   Platnost (M3) pro ρ_C ověříme podobně jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.
   Platnost (M3) pro ρ_I ověříme s využitím 3.3.6 a 3.3.3:

$$\begin{aligned}
\rho_I(f, h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_a^b (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - h(x)| \mathrm{d}x = \\
&= \rho_I(f, g) + \rho_I(g, h) \; .
\end{aligned}$$

5. Buď $P = \ell_\infty$ — množina ohraničených posloupností
   $\rho_\infty(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$
   Platnost (M1), (M2) a (M3) ověříme stejně, jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.

5.1.3 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Pro $a \in P, \; r \in \mathbb{R}, \; r > 0$ definujeme:
$K[a, r] = \{x \in P : \rho(x, a) \leq r\}$ — *uzavřená koule* se středem a a poloměrem r,
$K(a, r) = \{x \in P : \rho(x, a) < r\}$ — *otevřená koule* se středem a a poloměrem r,
Speciálně: otevřená koule $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}(a) = K(a, \varepsilon)$ se nazývá (*epsilonové*) *okolí bodu* a.

Zřejmě platí: $\varepsilon \leq \delta \Rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{O}_\delta(a)$.

5.1.4 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Pro $\emptyset \neq A, B \subseteq P$ definujeme:
$\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, \, b \in B\}$ — *vzdálenost množin* A, B,
$d(A) = \sup\{\rho(x, y) : x \in A, \, y \in A\}$ — *průměr množiny* A.
Jestliže množina $\{\rho(x, y) : x \in A, \, y \in A\}$ není ohraničená shora, klademe $d(A) = \infty$
Vzdálenost bodu x *od množiny* A definujeme: $\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A)$.

5.1.5 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Řekneme, že množina A je *ohraničená*, jestliže $d(A) < \infty$.

Množina A je zřejmě ohraničená, jestliže existuje bod a a číslo $r > 0$, že $A \subseteq K(a, r)$.

5.1.6 Poznámka

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Pro $x, y \in A$ definujeme $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$. Zobrazení ρ_A je zřejmě metrika na A.

5.1.7 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Metriku ρ_A zavedenou v 5.1.6 nazýváme *metrikou indukovanou na množině A metrikou* ρ. Metrický prostor (A, ρ_A) nazýváme *podprostorem metrického prostoru* (P, ρ). Píšeme $(A, \rho_A) \subseteq (P, \rho)$.

5.1.8 Věta

Buďte (P_1, σ_1), (P_2, σ_2) metrické prostory. Položme $P = P_1 \times P_2$ a definujme zobrazení $\rho : P^2 \to [0, \infty)$ předpisem

$$\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) \;=\; \sqrt{\left(\sigma_1(x_1,y_1)\right)^2 + \left(\sigma_2(x_2,y_2)\right)^2}\,.$$

Pak ρ je metrika na P.

D.: Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Nechť (R, σ) je metrický prostor a $a, b, c \in R$. Pak existují $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2$ takové body, že

$$\sigma(a,b) = \rho_2(\alpha,\beta), \quad \sigma(b,c) = \rho_2(\beta,\gamma), \quad \sigma(a,c) = \rho_2(\alpha,\gamma),$$

kde ρ_2 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^2$.
Pro stručnost označme $r = \sigma(a,b),\ s = \sigma(a,c),\ t = \sigma(b,c)$. Nyní stačí volit

$$\alpha = (0,0), \quad \beta = (r,0), \quad \gamma = \left(\frac{r^2+s^2-t^2}{2r}, \frac{\sqrt{(2rs-r^2-s^2+t^2)(2rs+r^2+s^2-t^2)}}{2r}\right).$$

(Jedná se o konstrukci trojúhelníka v rovině, známe-li délky stran.)
Nechť $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in P$.

- Pro $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ je $\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = 0$ právě tehdy, když $\sigma_1(x_1,y_1) = 0$ a $\sigma_2(x_2,y_2) = 0$, což podle (M1) nastane právě tehdy, když $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$, tedy $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$. ρ splňuje (M1).
- $\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \sqrt{\left(\sigma_1(x_1,y_1)\right)^2 + \left(\sigma_2(x_2,y_2)\right)^2} = \sqrt{\left(\sigma_1(y_1,x_1)\right)^2 + \left(\sigma_2(y_2,x_2)\right)^2} =$ $= \rho\left((y_1,y_2),(x_1,x_2)\right)$, takže ρ splňuje (M2).
- Podle pomocného tvrzení existují reálná čísla $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ taková, že

$$\sigma_1(x_1,y_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-\eta_i)^2}, \quad \sigma_1(x_1,z_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-\zeta_i)^2}, \quad \sigma_1(y_1,z_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\eta_i-\zeta_i)^2},$$
$$\sigma_2(x_2,y_2) = \sqrt{\sum_{i=3}^{4}(\xi_i-\eta_i)^2}, \quad \sigma_2(x_2,z_2) = \sqrt{\sum_{i=3}^{4}(\xi_i-\zeta_i)^2}, \quad \sigma_2(y_2,z_2) = \sqrt{\sum_{i=3}^{4}(\eta_i-\zeta_i)^2}\,.$$

  Pak

$$\begin{aligned}
\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\xi_i-\eta_i)^2} = \rho_2\left((\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4),(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\right),\\
\rho\left((y_1,y_2),(z_1,z_2)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\eta_i-\zeta_i)^2} = \rho_2\left((\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4),(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)\right),\\
\rho\left((x_1,x_2),(z_1,z_2)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\xi_i-\zeta_i)^2} = \rho_2\left((\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4),(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)\right),
\end{aligned}$$

  kde ρ_2 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^4$. Poněvadž ρ_2 splňuje nerovnost (M3), splňuje ji také ρ.

□

5.1.9 Definice

Buďte (P_1, σ_1), (P_2, σ_2) metrické prostory, $P = P_1 \times P_2$ a ρ metrika definovaná v 5.1.8. Prostor (P, ρ) nazýváme *(kartézským) součinem prostorů* (P_1, σ_1) a (P_2, σ_2).

5.1.10 Definice

Buďte (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) metrické prostory. Zobrazení $f : P_1 \to P_2$ se nazývá *isometrické* (*izometrie*), jestliže $\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$ pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in P^2$.
Jestliže existuje izometrie $f : P_1 \to P_2$, řekneme, že prostory (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) jsou *isometrické.*

Například všechna shodná zobrazení známá z geometrie jsou izometriemi.

5.1.11 Poznámka

Isometrické zobrazení je prosté.

D.: Kdyby existovaly body $x, y \in P_1$ takové, že $f(x) = f(y)$, pak by podle (M1) platilo
$0 = \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y) \neq 0$, což by byl spor. $\square$

Tedy metrický prostor a jeho isometrický obraz lze považovat za dvě kopie téhož prostoru.

5.2 Podmnožiny metrického prostoru

5.2.1 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Bod $a \in P$ se nazývá

- *vnitřní bod množiny* A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq A$,
- *vnější bod množiny* A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$,
- *hraniční bod množiny* A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset$,
- *bod uzávěru množiny* A, jestliže $\rho(a, A) = 0$,
- *hromadný bod množiny* A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$,
- *izolovaný bod množiny* A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny* A a značí se A° (někdy $\operatorname{int} A$),
Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice množiny* A a značí se ∂A (někdy $\operatorname{fr} A$),
Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá *uzávěr množiny* A a značí se $\overline{A}$ (někdy $\operatorname{cl} A$),
Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny* A a značí se A'.

Příklad $P = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$

a) $A = (0, 1) :\quad A^\circ = (0, 1),\ \partial A = \{0, 1\},\ \overline{A} = [0, 1],\ A' = [0, 1]$

b) $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q} :\quad A^\circ = \emptyset,\ \partial A = [0, 1],\ \overline{A} = [0, 1],\ A' = [0, 1]$

b) $A = [0, 1] \cup \{2\} :\quad A^\circ = (0, 1),\ \partial A = \{0, 1, 2\},\ \overline{A} = [0, 1] \cup \{2\},\ A' = [0, 1]$

5.2.2 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A, B \subseteq P$. Pak platí

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset,\ \emptyset^\circ = \emptyset$.
2. $\overline{P} = P,\ P^\circ = P$.
3. $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B},\ A^\circ \subseteq B^\circ$.
5. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B},\ A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.
6. $\overline{A} = P \setminus (P \setminus A)^\circ,\ A^\circ = P \setminus \overline{P \setminus A}$.
7. $\overline{\overline{A}} = \overline{A},\ (A^\circ)^\circ = A^\circ$.

D.: 1. – 4. je triviální

6. $$\begin{aligned} x \in P \setminus (P \setminus A)^\circ &\Leftrightarrow x \notin (P \setminus A)^\circ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\emptyset \neq \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus (P \setminus A)) = \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \\ x \in P \setminus \overline{P \setminus A} &\Leftrightarrow x \notin \overline{P \setminus A} \Leftrightarrow \varepsilon := \rho(x, P \setminus A) > 0 \Leftrightarrow (\forall y \in P \setminus A)(\rho(x, y) \geq \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A) = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \Leftrightarrow x \in A^\circ \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x \in A^\circ \cap B^\circ &\Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow (\exists \varepsilon_1)(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A) \wedge (\exists \varepsilon_2)(\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{O}_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^\circ \\ x \in (A \cap B)^\circ &\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \wedge \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ \end{aligned}$$
   S využitím 6., již dokázané části a de Morganových pravidel dostaneme
   $$\begin{aligned} \overline{A} \cup \overline{B} &= [P \setminus (P \setminus A)^\circ] \cup [P \setminus (P \setminus B)^\circ] = P \setminus [(P \setminus A)^\circ \cap (P \setminus B)^\circ] = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]^\circ = \\ &= P \setminus [P \setminus (A \cup B)]^\circ = \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

7. Buď $x \in \overline{\overline{A}}$. Pak $0 = \rho(x, \overline{A}) = \inf\{\rho(x, y) : y \in \overline{A}\} \geq \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, neboť podle 3. je $A \subseteq \overline{A}$ a tedy $\{\rho(x, y) : y \in \overline{A}\} \supseteq \{\rho(x, y) : y \in A\}$. Poněvadž ale $\inf\{\rho(x, y) : y \in A\} = \rho(x, A) \geq 0$, jest $\rho(x, A) = 0$ a tedy $x \in \overline{A}$, t.j. $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. Opačná inkluze plyne z 3.
   Druhou část tvrzení dokážeme analogicky. □

5.2.3 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A = A^\circ$, množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = \overline{A}$.

Zejména podle 5.2.2.6 A° je otevřená množina, $\overline{A}$ je uzavřená množina.

5.2.4 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A je otevřená právě tehdy, když $P \setminus A$ je uzavřená; množina A je uzavřená právě tehdy, když $P \setminus A$ je otevřená.

D.: Nechť $A = A^\circ$. Podle 5.2.2.6 je $A = P \setminus \overline{P \setminus A}$. Z toho plyne, že $P \setminus A = P \setminus (P \setminus \overline{P \setminus A}) = \overline{P \setminus A}$ a tedy $P \setminus A$ je uzavřená.
Nechť $P \setminus A = \overline{P \setminus A}$. Pak podle 5.2.2.6 je $A^\circ = P \setminus \overline{P \setminus A} = P \setminus (P \setminus A) = A$.
Platnost druhého tvrzení ukážeme analogicky. □

5.2.5 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\mathcal{T}$ soustava všech otevřených množin prostoru (P, ρ). Pak platí

(T1) $P \in \mathcal{T},\ \emptyset \in \mathcal{T}$,

(T2) $A \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$,

(T3) $(\forall \iota \in I)(A_\iota \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{T}$.

D.: (T1) Plyne z 5.2.2.1 a 5.2.2.2.

(T2) Je-li $x \in A \cap B$, pak $x \in A = A^\circ$, $x \in B = B^\circ$ a tedy existují ε_1, ε_2, že $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$, $\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Položíme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, pak $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, tedy každý $x \in A \cap B$ je vnitřním bodem, což znamená, že $A \cap B$ je otevřená.

(T3) Nechť $x \in \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$. Pak existuje $\iota_0 \in I$, že $x \in A_{\iota_0}$. Poněvadž A_{ι_0} je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A_{\iota_0} \subseteq \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$. □

5.2.6 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\mathcal{F}$ soustava všech uzavřených množin prostoru (P, ρ). Pak platí

(i) $P \in \mathcal{F},\ \emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$,

(iii) $(\forall \iota \in I)(A_\iota \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcap\limits_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{F}$.

D.: Plyne z 5.2.4, 5.2.5 a z de Morganových pravidel. □

5.2.7 Poznámky

Z 5.2.5 plyne, že průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina; z 5.2.6 plyne, že sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Průnik nekonečného systému otevřených množin nemusí být otevřená množina:

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}.\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\},\ \text{což není otevřená množina v } \mathbb{R} \text{ s metrikou } \rho(x,y) = |x-y|.$$

Sjednocení nekonečného systému uzavřených množin nemusí být uzavřená množina:

$$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right],\ n \in \mathbb{N}.\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)\,.$$

5.2.8 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Pak $\partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.

D.: $x \in \partial A \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A)) \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\rho(x, A) < \varepsilon \wedge \rho(x, P \setminus A) < \varepsilon) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \rho(x, A) = 0 \wedge \rho(x, P \setminus A) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}\,.$ □

5.2.9 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A se nazývá *hustá v prostoru* (P, ρ), jestliže $\overline{A} = P$.

5.2.10 Věta

Buď (P,ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A je hustá v P právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in P$ existuje $a \in A$, že $\rho(x,a) < \varepsilon$, t.j. $a \in \mathcal{O}_\varepsilon(x)$. (Neboli když každý bod $x \in P$ je hromadným bodem množiny A.)

D.: „⇒“: Nechť $\overline{A} = P$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ a $x \in P$ libovolná. S využitím vlastnosti 1.1.6(i2*) dostaneme

$$x \in P = \overline{A} \Rightarrow \rho(x,A) = 0 \Rightarrow \inf\{\rho(x,a) : a \in A\} = 0 \Rightarrow \text{existuje } a \in A, \text{ že } \rho(x,a) < \varepsilon\,.$$

„⇐“: Jestliže existuje $x \in P \setminus \overline{A}$, pak podle 5.2.4 a definice otevřené množiny existuje $\varepsilon > 0$, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq P \setminus \overline{A}$, tedy $\rho(x,a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in \overline{A}$. Podle 5.2.2.3 je $A \subseteq \overline{A}$, což znamená, že $\rho(x,a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in A$. □

5.3 Konvergence

5.3.1 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z P (t.j. zobrazení $\mathbb{N} \to P$). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje k bodu* $x \in P$ *(je konvergentní v* P*)* a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (stručně $\lim x_n = x,\ x_n \to x$), jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

5.3.2 Příklady

1. (P,ρ) diskrétní (viz 5.1.2.1)
   $x_n \to x \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x)$

2. $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ (viz 5.1.2.3)
   $(x_n, y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow x_n \to x,\ y_n \to y$ v $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$.

   D.: $(x_n,y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow 0 = \lim(|x_n - x| + |y_n - y|) = \lim|x_n - x| + \lim|y_n - y|$. Avšak podle 1.3.5.1 $\lim|x_n - x| \geq 0,\ \lim|y_n - y| \geq 0$, takže $\lim|x_n - x| = 0,\ \lim|y_n - y| = 0$. □

   Analogické tvrzení platí pro všechny metrické prostory z 5.1.2.3.

3. $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$ (viz 5.1.2.4)
   $f_n \to f$ v tomto prostoru $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a,b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.
   (Má-li posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$ vlastnost uvedenou na pravé straně ekvivalence, řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $[a,b]$ *k funkci* f.)

   D.: $f_n \to f$ v $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho_C(f_n, f) < \varepsilon) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} < \varepsilon) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a,b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$ □

5.3.3 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z P. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je *ohraničená*, jestliže množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená ve smyslu definice 5.1.5.

5.3.4 Věta

Buď (P,ρ) metrický prostor. Pak platí

1. Každá posloupnost $\{x_n\} \subseteq P$ má nejvýše jednu limitu v P.

2. Posloupnost konvergentní v (P,ρ) je ohraničená v (P,ρ).

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybranou z $\{x_n\}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

D.: 1.3.3, 1.3.4, 1.3.14. □

5.3.5 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z P. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

5.3.6 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z P. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v (P, ρ), pak je cauchyovská.

D.: Nechť $x_n \to x$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pro libovolné $m \geq n_0$ a libovolné $n \geq n_0$ tedy s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Obrácené tvrzení obecně neplatí: $P = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale není konvergentní; $0 \notin P$.

5.3.7 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená v (P, ρ) právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \to x$ platí $x \in A$.

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť $A = \overline{A}$, $\{x_n\}$ libovolná konvergentní, $x_n \to x$. Kdyby $x \notin \overline{A}$, pak by $\varepsilon = \rho(x, A) > 0$ a tedy pro každé x_n by platilo $\rho(x_n, x) > \varepsilon$, což by bylo ve sporu s $x_n \to x$.

„$\Leftarrow$“ Nechť platí podmínka. Buď $y \in \overline{A}$ libovolný bod. Pak $\rho(y, A) = 0$. Podle 1.1.6(i2*) ke každému $\frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in A$, že $\rho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. To znamená, že pro takto vytvořenou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\lim \rho(x_n, y) = 0$, $x_n \to y$. Z podmínky plyne, že $y \in A$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$ a podle 5.2.2.3 $A = \overline{A}$. $\square$

5.3.8 Definice

Buď P množina a ρ, σ metriky na P. Řekneme, že ρ a σ jsou *ekvivalentní metriky na P*, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ platí: $x_n \to x$ v (P, ρ) právě tehdy když $x_n \to x$ v (P, σ).

5.3.9 Příklady

1. $P = \mathbb{R}^n$. Metriky ρ_1, ρ_2, ρ_∞ zavedené v 5.1.2.3 jsou ekvivalentní:
   $x_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ v $(R^n, \rho_1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$
   $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ v $(R^n, \rho_2) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$
   $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ v $(R^n, \rho_\infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$

2. $P = \mathrm{C}[a, b]$. Metriky ρ_I a ρ_C (viz 5.1.2.3) nejsou ekvivalentní:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[a, \dfrac{(n+1)a + (n-1)b}{2n}\right] \cup \left[\dfrac{(n-1)a + (n+1)b}{2n}, b\right] \\[2ex] \dfrac{2nx - (n+1)a - (n-1)b}{b - a}, & x \in \left(\dfrac{(n+1)a + (n-1)b}{2n}, \dfrac{a+b}{2}\right] \\[2ex] \dfrac{-2nx + (n-1)a + (n+1)b}{b - a}, & x \in \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{(n-1)a + (n+1)b}{2n}\right) \end{cases},$$

$f \equiv 0$

$\rho_I(f_n, f) = \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \dfrac{b-a}{2n} \to 0$
$\rho_C(f_n, f) = 1$

5.3.10 Poznámka

Buďte ρ, σ ekvivalentní metriky na P. Z 5.3.7 plyne, že množina $A \subseteq P$ je uzavřená v (P, ρ) právě tehdy, když je uzavřená v (P, σ). Z 5.2.4 dále plyne, že množina $A \subseteq P$ je otevřená v (P, ρ) právě tehdy, když je otevřená v (P, σ).

5.3.11 Věta

Buďte ρ, σ metriky na množině P. Jestliže existují kladné konstanty a, b takové, že pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in P^2$ je

$$a\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq b\sigma(x, y),$$

pak jsou metriky ρ a σ ekvivalentní.

D.: Nechť je podmínka splněna, $x \in P$, a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ je taková posloupnost, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0$. Pak $a\sigma(x_n, x) \leq \rho(x_n, x) \leq b\sigma(x_n, x)$ a z 1.3.7 plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Důkaz se dokončí analogickou úvahou s využitím nerovnosti $\dfrac{1}{b}\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \dfrac{1}{a}\rho(x, y)$, která je ekvivalentní s nerovností v podmínce věty. $\square$

5.4 Úplné a kompaktní prostory

5.4.1 Definice

Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm má každá cauchyovská posloupnost limitu.

5.4.2 Příklady

1. Prostor $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ je podle 1.3.22 úplný.

2. Prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ (viz 5.1.2) jsou úplné:
   Je-li posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská v prostoru $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, pak je zřejmě každá z posloupností $\{x_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \{x_2^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská v prostoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Pak podle 1.3.22 každá tato posloupnost je konvergentní v $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = x_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_2^k = x_2, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} x_n^k = x_n$. Odtud vyplyne, že i posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní v prostoru $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Podle 5.3.9.1 jsou metriky ρ_1, ρ_2, ρ_∞ ekvivalentní.

3. Diskrétní metrický prostor (P, ρ) (viz 5.1.2.1) je úplný.
   Buď $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ právě tehdy, když $x_n = x_m$. Tedy je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je od jistého indexu počínaje stacionární a to podle 5.3.2.1 znamená, že je konvergentní.

4. $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou ρ_1 není úplný:
   Např. $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $(\mathbb{R}, \rho_1)$ k $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

5. Prostor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_I)$ (viz 5.1.2.4) není úplný:
   $[a, b] = [-1, 1]$
   $f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, \frac{1}{n}) \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$,
   $\rho_I(f_n, f_{n+p}) = \dfrac{p}{n^2 + np}$,
   $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_I(f_n, f_{n+p}) = 0$, tedy $\{f_n\}$ je cauchyovská. Avšak jediná možná limita posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ je

funkce $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$, což není spojitá funkce, $f \notin \mathrm{C}[-1, 1]$ a tedy $\{f_n\}$ není v $(\mathrm{C}[-1, 1], \rho_I)$ konvergentní.

6. Prostor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_C)$ (viz 5.1.2.4) je úplný:
Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost funkcí cauchyovská v $(\mathrm{C}[a, b], \rho_C)$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_0$ je $\rho_C(f_n, f_m) < \varepsilon$.
Buď $x_0 \in [a, b]$ libovolný bod. Pak pro $n, m \geq n_0$ je
$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \max\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [a, b]\} = \rho_C(f_n, f_m) < \varepsilon$,
což znamená, že číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a tedy podle 1.3.22 konvergentní.
Poněvadž $x_0 \in [a, b]$ byl libovolný bod, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.
Definujme funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Ukážeme, že $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} \to 0$:
Poněvadž $\{f_n\}$ je cauchyovská, tak k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_1$ je $\rho_C(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro každé $x \in [a, b]$ a všechna $n, m \geq n_1$ je tedy $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, což podle 1.3.5.1 znamená, že pro každé $x \in [a, b]$ a každé $n \geq n_1$ je $\lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $n \geq n_1$ a každé $x \in [a, b]$ je $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, takže pro $n \geq n_1$ je
$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Zbývá ukázat, že funkce f je spojitá.
Podle předchozího tvrzení k $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že $\sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} < \frac{\varepsilon}{3}$.
Buď $x_1 \in [a, b]$ libovolný bod. Poněvadž funkce f_{n_2} je spojitá, k číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in [a, b]$ taková, že $|x_1 - x| < \delta$ je $|f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pro $x \in [a, b]$ takové, že $|x_1 - x| < \delta$ tedy platí
$|f(x_1) - f(x)| = |f(x_1) - f_{n_2}(x_1) + f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x) + f_{n_2}(x) - f(x)| \leq$
$\leq |f(x_1) - f_{n_2}(x_1)| + |f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)| \leq$
$\leq \sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} + |f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| + \sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} <$
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, což znamená, že funkce f je spojitá v bodě $x_1 \in [a, b]$. Poněvadž tento bod byl libovolný, je f spojitá na $[a, b]$.

5.4.3 Věta

Je-li metrický prostor (P, ρ) úplný a množina $A \subseteq P$ je uzavřená, pak metrický prostor (A, ρ_A), kde ρ_A je metrika indukovaná metrikou ρ, je úplný.

D.: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost. Poněvadž (P, ρ) je úplný, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in P$. Podle 5.3.7 je $x \in A$. $\square$

5.4.4 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Řekneme, že metrický prostor (Q, σ) je *úplným obalem* metrického prostoru (P, ρ), jestliže

(i) (Q, σ) je úplný prostor,

(ii) $(P, \rho) \subseteq (Q, \sigma)$,

(iii) Množina P je hustá v (Q, σ).

Například $(\mathbb{R}, \rho_1)$ je úplným obalem $(\mathbb{Q}, \rho_1)$.

5.4.5 Věta

Ke každému metrickému prostoru (P, ρ) existuje jeho úplný obal. Tento úplný obal je určen jednoznačně v tomto smyslu: Jsou-li (Q_1, σ_1) a (Q_2, σ_2) dva úplné obaly prostoru (P, ρ), pak (Q_1, σ_1) a (Q_2, σ_2) jsou isometrické.

Kroky důkazu:

1. Na množině všech cauchyovských posloupností z prostoru (P, ρ) definujeme relaci $\sim$ vztahem: $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \rho(x_n, y_n) \to 0$.
2. Ukážeme, že $\sim$ je ekvivalence.
3. Položíme $Q = P| \sim$ (rozklad množiny P podle ekvivalence $\sim$). Prvky množiny Q jsou třídy ekvivalence $\sim$. Označíme $[\{x_n\}] \in Q$ takovou třídu ekvivalence, že $\{x_n\} \in [\{x_n\}]$.
4. Položíme $\sigma([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Ukážeme, že σ nezáleží na výběru representantů a že σ je metrikou na Q.
5. Ztotožníme $[\{x, x, \dots\}] \in Q$ s $x \in P$. Pak je $(P, \rho) \subseteq (Q, \sigma)$.
6. Ukážeme, že prostor (Q, σ) je úplný.
7. Ukážeme, že $\overline{P} = Q$.
8. Ukážeme, že je-li (Q_1, σ_1) úplným obalem prostoru (P, ρ), pak (Q, σ) a (Q_1, σ_1) jsou isometrické. $\square$

5.4.6 Definice

Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je ***kompaktní***, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat posloupnost konvergentní.
Řekneme, že množina $A \subseteq P$ je kompaktní, jestliže podprostor (A, ρ_A) je kompaktní.

5.4.7 Věta

Je-li A kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ρ), pak je A uzavřená a ohraničená.

D.: Připusťme, že $A \neq \overline{A}$, tedy že existuje $x \in \overline{A} \setminus A$. Pak $\rho(x, A) = 0$ a podle definice infima existuje $\{x_n\} \subseteq A$, že $\rho(x_n, x) \to 0$, neboli $x_n \to x$. Pro každou vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ je podle 5.3.4.3 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \notin A$, což je spor s kompaktností A.

Připusťme, že A není ohraničená. Buď $x_1 \in A$ libovolný bod. Existuje $x_2 \in A \setminus K(x_1, 1)$. (Kdyby neexistoval, byla by množina A ohraničená.) Dále existuje $x_3 \in A \setminus K(x_1, \rho(x_1, x_2) + 1)$ atd. Posloupnost $\{x_n\}$ i každá posloupnost z ní vybraná není cauchuovská, neboť $\rho(x_n, x_m) \geq 1$ a tedy podle 5.3.6 nemůže být konvergentní. $\square$

5.4.8 Věta

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní v $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ právě tehdy, když je v tomto prostoru uzavřená a ohraničená.

D.: Nutnost podmínky plyne z 5.4.7. Dokážeme její dostatečnost.
Buď $\{x^k\}_{k=1}^\infty = \{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ posloupnost bodů z A. Poněvadž A je ohraničená, je každá z číselných posloupností $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ ohraničená. Podle 1.3.19.1 lze z každé $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$ vybrat posloupnost $\{x_i^{k_l}\}_{l=1}^\infty$ konvergentní. Vybereme tedy z posloupnosti $\{x_1^k\}_{k=1}^\infty$ konvergentní posloupnost $\{x_1^{\kappa_1}\}_{\kappa_1=1}^\infty$ a označíme $x_1^0 = \lim\limits_{\kappa_1\to\infty} x_1^{\kappa_1}$. Potom z posloupnosti $\{x_2^{\kappa_1}\}_{\kappa_1=1}^\infty$ vybereme konvergentní posloupnost $\{x_2^{\kappa_2}\}_{\kappa_2=1}^\infty$ a označíme $x_2^0 = \lim\limits_{\kappa_2\to\infty} x_1^{\kappa_2}$. Tak postupujeme dále, až z posloupnosti $\{x_n^{\kappa_{n-1}}\}_{\kappa_{n-1}=1}^\infty$ vybereme konvergentní posloupnost $\{x_n^{\kappa_n}\}_{\kappa_n=1}^\infty$, kterou budeme pro přehlednost značit $\{x_n^l\}_{l=1}^\infty$, a označíme $x_n^0 = \lim\limits_{l\to\infty} x_n^l$. Tímto postupem získáme posloupnost $\{(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)\}_{l=1}^\infty$, která je vybraná z posloupnosti $\{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{l=1}^\infty$ a platí $\lim\limits_{l\to\infty}(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = x^0$. Poněvadž A je uzavřená, je podle 5.3.7 $x^0 \in A$. $\square$

Z ekvivalence metrik ρ_1, ρ_2, ρ_∞ (viz 5.3.9.1) plyne, že analogické tvrzení platí i pro $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$.

5.4.9 Věta

Je-li metrický prostor (P,ρ) kompaktní, pak je úplný.

D.: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost v prostoru (P,ρ). Poněvadž (P,ρ) je kompaktní, existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in P$.
Ukážeme, že $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo.
Poněvadž $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k x, tak k $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq k_0$ je $\rho(x_{n_k}, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Poněvadž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, tak k $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ a $m \geq n_1$ platí $\rho(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Položme $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ a nechť $n \geq n_0$ a $k > k_0$ jsou libovolná čísla. Pak také $n_k > n_0$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

což znamená, že $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$

5.5 Zobrazení metrických prostorů

5.5.1 Definice

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory, $F : P \to Q$.
Řekneme, že zobrazení F je *spojité v bodě* $x_0 \in P$, jestliže ke každému okolí V bodu $F(x_0)$ v (Q,σ) existuje okolí U bodu x_0 v (P,ρ) tak, že $F(U) \subseteq V$.
Řekneme, že zobrazení F je *spojité* na P, jestliže je spojité v každém bodě $x \in P$.

Zobrazení F je spojité v bodě x_0, jestliže $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in P)(\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon)$.

5.5.2 Věta

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory. Zobrazení $F : P \to Q$ je spojité na P právě tehdy, když ke každé otevřené množině $V \subseteq F(P)$ existuje otevřená množina $U \subseteq P$ taková, že $F(U) \subseteq V$.

D.: $\Rightarrow$: Nechť F je spojité, $V \subseteq F(P)$ otevřená. Ke každému $y_0 \in V$ existuje $x_0 \in P$ takové, že $F(x_0) = y_0$. Poněvadž V je otevřená, k libovolnému $y_0 \in V$ existuje $\varepsilon_{y_0} > 0$ takové, že $\mathcal{O}_{\varepsilon_{y_0}}(y_0) \subseteq V$. K ε_{y_0} existuje $\delta_{y_0} > 0$ takové, že $F(\mathcal{O}_{\delta_{y_0}}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}_{\varepsilon_{y_0}}$. Množina $U = \bigcup\limits_{y_0 \in V} \mathcal{O}_{\delta_{y_0}}(x_0)$ je podle 5.2.5(T3) otevřená a zřejmě platí $F(U) = V$.

$\Leftarrow$: Buď $x_0 \in P$ libovolný bod, V okolí bodu $F(x_0)$. Existuje otevřená $U \subseteq P$ taková, že $F(U) \subseteq V$. Poněvadž U je otevřená, existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq U$. Pak $F(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq F(U) \subseteq V$ a tedy F je spojité v bodě x_0. $\square$

5.5.3 Věta (Heineova podmínka)

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory. Zobrazení $F : P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P takovou, že $x_n \to x_0$ v (P,ρ) platí $F(x_n) \to F(x_0)$ v (Q,σ).

D.: $\Rightarrow$: Nechť $\{x_n\} \subseteq P$, $x_n \to x_0$.
Buď $\mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$, $\varepsilon > 0$, libovolné okolí bodu $F(x_0)$. Existuje $\delta > 0$ takové, že $F(\mathcal{O}_\delta(x_0)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$.
K $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \delta$, neboli $x_n \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$.
Odtud plyne, že $F(x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$ pro všechna $n \geq n_0$, neboli $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$.
To ovšem znamená, že $F(x_n) \to F(x_0)$.

$\Leftarrow$: Nechť platí podmínka a připusťme, že F není spojité v bodě x_0. Pak existuje okolí $V = \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$ bodu $F(x_0)$ takové, že v každém okolí U bodu x_0 existuje x, že $F(x) \notin V$. Zejména v okolí $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ existuje bod x_n takový, že $F(x_n) \notin V$. Platí $x_n \to x_0$ a tedy $F(x_n) \to F(x_0)$, což znamená, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sigma(F(x_{n_0}), F(x_0)) < \varepsilon$, tedy $F(x_{n_0}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0)) = V$, což je spor. □

5.5.4 Věta

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $A \subseteq P$, $F : P \to Q$ spojité zobrazení. Je-li množina A kompaktní, pak je i $F(A)$ kompaktní.

D.: Nechť A je kompaktní a buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost bodů z $F(A)$. Ke každému $y_n \in F(A)$ existuje $x_n \in A$ takové, že $F(x_n) = y_n$. Poněvadž A je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat posloupnost konvergentní $\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in A$ v (P, ρ). Označme $y_0 = F(x_0)$. Pak $y_0 \in F(A)$ a podle 5.5.3 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = F(x_0) = y_0$ v (Q, σ). Našli jsme tedy posloupnost $\{y_{n_k}\}$ vybranou z $\{y_n\}$, která konverguje k $y_0 \in F(A)$. To znamená, že $F(A)$ je kompaktní množina. □

5.5.5 Důsledek (Weierstrassovy věty)

Reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.

D.: Uzavřený interval $[a, b]$ je podle 5.4.8 kompaktní v $(\mathbb{R}, \rho_1)$ a tedy podle 5.5.4 je $f([a, b])$ kompaktní. Podle 5.4.8 je $f([a, b])$ ohraničená a uzavřená.
K $\frac{1}{n} > 0$ existuje $y_n \in f([a, b])$ takové, že $\sup f([a, b]) - \frac{1}{n} < y_n$, $y_n \to \sup f([a, b])$ a podle 5.3.7 je $\sup f([a, b]) \in f([a, b])$. Funkce f nabývá na $[a, b]$ svého suprema, tedy své největší hodnoty.
Analogicky ukážeme, že funkce f nabývá na $[a, b]$) i své nejmenší hodnoty. □

5.5.6 Věta

Buďte (P, ρ), (Q, σ), (R, τ) metrické prostory, $F : P \to Q$, $G : Q \to R$. Je-li zobrazení F spojité v bodě $x_0 \in P$ a zobrazení G je spojité v bodě $F(x_0) \in Q$, pak je složené zobrazení $G \circ F : P \to R$ spojité v bodě x_0. Je-li zobrazení F spojité na P a zobrazení G je spojité na Q, pak je složené zobrazení $G \circ F : P \to R$ spojité na P.

D.: K $\mathcal{O}(G(F(x_0))) \subseteq R$ existuje $\mathcal{O}(F(x_0)) \subseteq Q$, že $G(\mathcal{O}(F(x_0))) \subseteq \mathcal{O}(G(F(x_0)))$, poněvadž G je spojité v $F(x_0)$.
K $\mathcal{O}(F(x_0)) \subseteq Q$ existuje $\mathcal{O}(x_0) \subseteq P$, že $F(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(F(x_0))$, neboť F je spojité v x_0.
Nyní $G \circ F(\mathcal{O}(x_0)) = G(F(\mathcal{O}(x_0))) \subseteq G(\mathcal{O}(F(x_0))) \subseteq \mathcal{O}(G(F(x_0)))$.
Druhé tvrzení je důsledkem prvního. □

5.5.7 Definice

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *stejnoměrně spojité na* P, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dva body $x, y \in P$ taková, že $\rho(x, y) < \delta$ platí $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$.

Stejnoměrně spojité zobrazení je zřejmě spojité.

5.5.8 Věta (Heine - Cantor)

Buď (P, ρ) kompaktní metrický prostor, (Q, σ) metrický prostor, $F : P \to Q$ spojité zobrazení. Pak je F stejnoměrně spojité.

D.: Nechť (P, ρ) je kompaktní a $F : P \to Q$ spojité.
Připusťme, že F není stejnoměrně spojité. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existují $x, y \in P$ tak, že $\rho(x, y) < \delta$ a $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$.
K $\delta = \frac{1}{n}$ existují $x_n, y_n \in P$, že $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(F(x_n), F(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Poněvadž P je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in P$.

Dále $\rho(x_0, y_{n_k}) \leq \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$ pro $k \to \infty$ a tedy také $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$.

Podle 5.5.3 platí $\sigma(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \leq \sigma(F(x_{n_k}), F(x_0)) + \sigma(F(x_0), F(y_{n_k})) \to 0$ pro $k \to \infty$, což je spor s $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$. $\square$

5.5.9 Definice

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$.
Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ taková, že pro všechny $x, y \in P$ je $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y)$. Konstanta L se nazývá *Lipschitzova konstanta*.
Řekneme, že zobrazení F je *kontrakce*, je-li lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

5.5.10 Věta

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$. Je-li zobrazení F lipschitzovské, pak je stejnoměrně spojité (a tedy také spojité).

D.: Nechť F je lipschitzovské s konstantou L. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položíme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$.

Jsou-li $x, y \in P$ libovolné body takové, že $\rho(x, y) < \delta$, pak $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y) < L\delta = L\dfrac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. $\square$

5.5.11 Příklady

1. Buď f reálná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na tomto intervalu ohraničenou první derivaci. Pak f je lipschitzovská s konstantou $L = \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$.

   D.: Podle 2.3.4.1 ke každým $x, y \in [a, b]$ existuje ξ z intervalu o krajních bodech x a y takové, že $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$.
   Odtud $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y| \leq L|x - y|$. $\square$

2. $(\mathrm{C}[a, b], \rho_C)$, $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $F : \mathrm{C}[a, b] \to \mathbb{R}$ definované předpisem $F(f) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

   - $\rho_1(F(f), F(g)) = \left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \leq$
     $\leq \int\limits_a^b \max\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in [a, b]\}\mathrm{d}x = \max\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in [a, b]\} \int\limits_a^b \mathrm{d}x =$
     $= (b - a)\rho_C(f, g)$
     (první nerovnost platí podle 3.3.9, druhá podle 3.3.6.)
     Zobrazení F je tedy lipschitzovské s konstantou $b - a$, což podle 5.5.10 znamená, že je spojité.
   - Z 5.5.3 plyne: Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých na intervalu $[a, b]$ konverguje k funkci f v prostoru $(\mathrm{C}[a, b], \rho_C)$ (stejnoměrně konverguje k funkci f, sr. 5.3.2.3), pak platí
     $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$

5.5.12 Definice

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$ a $x_0 \in P$ hromadný bod. Řekneme, že zobrazení F *má v bodě* $x_0 \in P$ *limitu* $y_0 \in Q$ a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = y_0$, jestliže ke každému okolí V bodu y_0 v (Q, σ) existuje okolí U bodu x_0 v (P, ρ) tak, že $F(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.

Zřejmě platí:

- $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = y_0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in P)(0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon)$.
- Jestliže má zobrazení F v bodě x_0 limitu $F(x_0)$, pak je v tomto bodě spojité.
- $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = y_0$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \neq x_0$ a $x_n \to x_0$ v (P, ρ) platí $F(x_n) \to y_0$ v (Q, σ).

5.5.13 Definice

Nechť P je množina a $F : P \to P$. Bod $x \in P$ se nazývá *pevný bod zobrazení* F, jestliže $F(x) = x$.

5.5.14 Věta (Banach [1892–1945], o kontrakci)

Buď (P, ρ) úplný metrický prostor, $F : P \to P$ kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F. Tento pevný bod je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_1 \in P$ je libovolný bod a $x_{n+1} = F(x_n)$.

D.:
- Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{x_n\},\ x_{n+1} = F(x_n)$ je cauchyovská:
  Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho\left(F(x_{n-1}), F(x_n)\right) \le L\rho(x_{n-1}, x_n) = L\rho\left(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})\right) \le$
  $\le L^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \cdots \le L^{n-1}\rho(x_1, x_2)$.
  Odtud a z (M3) plyne, že pro libovolná $n, p \in \mathbb{N}$ platí
  $\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$
  $\le L^{n-1}\rho(x_1, x_2) + L^n\rho(x_1, x_2) + L^{n+1}\rho(x_1, x_2) + \cdots + L^{n+p-2}\rho(x_1, x_2) =$
  $= \left(L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{n+p-2}\right)\rho(x_1, x_2) = \left(1 + L + L^2 + \cdots + L^{p-1}\right)L^{n-1}\rho(x_1, x_2) =$
  $= \dfrac{1 - L^p}{1 - L}L^{n-1}\rho(x_1, x_2) \le L^{n-1}\dfrac{\rho(x_1, x_2)}{1 - L} \to 0$ pro $n \to \infty$, neboť $L^{n-1} \to 0$ pro $n \to \infty$.
- Poněvadž (P, ρ) je úplný, existuje $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in P$.
- $\rho(x_0, F(x_0)) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, F(x_0)) = \rho(x_0, x_n) + \rho(F(x_{n-1}), F(x_0)) \le$
  $\le \rho(x_0, x_n) + L\rho(x_{n-1}, x_0) \to 0$ pro $n \to \infty$ neboť $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_0, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_{n-1}, x_0) = 0$ pro $n \to \infty$.
- Je-li y jiný pevný bod zobrazení F, pak $\rho(y, x_0) = \rho(F(y), F(x_0)) \le L\rho(y, x_0)$.
  Odtud plyne, že $(1 - L)\rho(y, x_0) \le 0$ a poněvadž $O < L < 1$, musí být $\rho(y, x_0) = 0$. □

5.5.15 Aplikace (Newtonova iterační metoda)

Nechť reálná funkce g má na uzavřeném intervalu I druhou derivaci a nenulovou první derivaci. Jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $\dfrac{|g(x)g''(x)|}{\left(g'(x)\right)^2} < 1 - \varepsilon$, pak rovnice $g(x) = 0$ má na intervalu I jediný kořen x_0 a platí $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, kde posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně:

$$x_1 \in I \text{ je libovolné číslo,} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\,.$$

D.: Uvažujme metrický prostor (I, ρ) s přirozenou metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$. Tento prostor je podle 5.4.8 kompaktní.

Definujme funkci $f : I \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Číslo x_0 je kořenem rovnice $g(x) = 0$ právě tehdy, když je pevným bodem zobrazení (funkce) f. Podle 2.3.3 platí $\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y|$, kde ξ je nějaké číslo mezi x a y. Označme $L = \sup\{|f'(\xi)| : \xi \in I\}$. Podle předpokladu

$$|f'(\xi)| \;=\; \left|1 - \frac{\left(g'(\xi)\right)^2 - g(\xi)g''(\xi)}{\left(g'(\xi)\right)^2}\right| \;=\; \left|\frac{g(\xi)g''(\xi)}{\left(g'(\xi)\right)^2}\right| \;<\; 1 - \varepsilon$$

pro každé $\xi \in I$. Funkce f je tedy kontrakcí a tvrzení plyne z 5.5.14. □

5.6 Cvičení

1) Ověřte, že $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ a $\sigma(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ jsou metriky na $\mathbb{R}$. Jsou tyto metriky ekvivalentní?

2) Vypočítejte vzdálenost funkcí $f(x) = \ln(1 + x)$ a $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e} - 1}$ v prostoru $\mathrm{C}[0, 1]$ s metrikami ρ_C a ρ_I.

3) Vypočítejte vzdálenost množiny $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} : y \ge \sqrt{|x|^3}\right\}$ od bodu $(\frac{1}{2}, 0)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$

4) Vypočítejte vzdálenost bodu $(3,2)$ od množiny $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + bx \leq 0\right\}$, kde $b \geq 0$, v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$.
5) Vypočítejte průměr množiny $M = \{f(x) = x^n : n \in \mathbb{N}\}$ v prostoru $(\mathrm{C}[0,1], \rho_I)$.
6) Najděte vnitřek, uzávěr, hranici a derivaci množiny $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [1,2) \cup ((2,3) \cap \mathbb{Q})$ v prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$.
7) Rozhodněte, zda platí tvrzení: Jsou-li množiny A, B uzavřené a $\rho(A,B) = 0$, pak $A \cap B \neq \emptyset$. Pokud ano, dokažte; pokud ne, uveďte protipříklad.
8) Mohou existovat neprázdné podmnožiny A, B metrického prostoru takové, že $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\overline{A} \neq \overline{B}$ a $A \cap B = \emptyset$? Pokud ne, dokažte; pokud ano, udejte příklad.
9) Nechť F je zobrazení prostoru $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$ do prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$ dané předpisem $F(f) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení spojité. Je stejně definované zobrazení spojité na prostoru $(\mathrm{C}[a,b], \rho_I)$?
10) Nechť A, B jsou neprázdné uzavřené a disjunktní množiny v prostoru (P, ρ). Najděte spojité zobrazení $F : P \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ uvažujeme s přirozenou metrikou ρ) takové, že $F(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \end{cases}$.
11) Rozhodněte, zda zobrazení $F : [0,1] \to [0,1]$ dané předpisem $F(x) = \sqrt{x}$ je Lipschitzovské. Existuje pevný bod tohoto zobrazení?
12) Najděte kořen rovnice $\cos x = x$ s přesností na čtyři desetinná místa.

Výsledky: 1) Ano 2) $\ln(\mathrm{e}-1) - \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \doteq 0.1233$, $2\ln 2 - \frac{1-2\mathrm{e}}{2-2\mathrm{e}} \doteq 0.0953$ 3) $\sqrt{\frac{7}{108}}$ 4) $2+3b$ pokud $b<1$, $3+\frac{2}{b}$, pokud $b \geq 1$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) $A^\circ = (1,2) \cup (2,3)$, $\overline{A} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [1,3]$, $\partial A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [2,3]$, $A' = \{0\} \cup [1,3]$ 7) Ne. Např. v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ jsou množiny $A = \{(x,0) : x \geq 1\}$, $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \geq 1\right\}$ uzavřené a $\rho(A,B) = 0$. 8) Ano. Např. v prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$ množiny $A = [0,1] \cap \mathbb{I}$, $B = [0,2] \cap \mathbb{Q}$. 9) Ano, ne 10) $F(x) = \frac{\rho(x,B)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$ 11) Ne. Dokonce dva: 0 a 1 12) 0.7391

Kapitola 6

Fourierovy řady a integrální transformace

6.1 Hilbertův prostor

6.1.1 Definice

Buď V reálný vektorový prostor a $(\ \cdot\ |\ \cdot\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ zobrazení, které pro všechna $u, v, w \in V$ splňuje podmínky:

(U1) $u \neq 0 \Rightarrow (\ u\ |\ u\ ) > 0$,

(U2) $(\ u\ |\ v\ ) = (\ v\ |\ u\ )$,

(U3) $(\ \alpha u\ |\ v\ ) = \alpha(\ u\ |\ v\ )$,

(U4) $(\ u + v\ |\ w\ ) = (\ u\ |\ w\ ) + (\ v\ |\ w\ )$.

Zobrazení $(\ \cdot\ |\ \cdot\ )$ se nazývá *skalární* (nebo též *vnitřní*) *součin vektorů*.

6.1.2 Poznámky

1. $u = 0 \Leftrightarrow (\ u\ |\ u\ ) = 0$

   D.: Je-li $u = 0$ pak $u = 0v$ pro libovolný vektor $v \in V$ a tedy podle (U3) je
   $(\ u\ |\ u\ ) = (\ 0v\ |\ u\ ) = 0(\ v\ |\ u\ ) = 0$
   Je-li $(\ u\ |\ u\ ) = 0$, podle (U1) nemůže být $u \neq 0$. $\Box$

2. $(\ u\ |\ \alpha v\ ) = \alpha(\ u\ |\ v\ )$

   D.: $(\ u\ |\ \alpha v\ ) = (\ \alpha v\ |\ u\ ) = \alpha(\ v\ |\ u\ ) = \alpha(\ u\ |\ v\ )$
   První rovnost plyne z (U2), druhá z (U3) a třetí opět z (U2). $\Box$

3. $(\ u\ |\ v + w\ ) = (\ u\ |\ v\ ) + (\ u\ |\ w\ )$

   D.: $(\ u\ |\ v + w\ ) = (\ v + w\ |\ u\ ) = (\ v\ |\ u\ ) + (\ w\ |\ u\ ) = (\ u\ |\ v\ ) + (\ u\ |\ w\ )$
   První rovnost plyne z (U2), druhá z (U4) a třetí opět z (U2). $\Box$

6.1.3 Věta (Cauchyova [1789 – 1857] - Bunjakovského [1804 – 1889] - Schwarzova [1843 – 1921] nerovnost)

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot\ |\ \cdot\ )$. Pak pro všechna $u, v \in V$ platí

$$\left|(\ u\ |\ v\ )\right| \leq \sqrt{(\ u\ |\ u\ )(\ v\ |\ v\ )},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory u, v jsou lineárně závislé.

D.: Nechť $(\ u \mid v\ ) \neq 0$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ podle (U1), 6.1.2.1 a pravidel pro počítání se skalárním součinem platí

$$0 \leq (\ \alpha u + v \mid \alpha u + v\ ) = \alpha^2 (\ u \mid u\ ) + 2\alpha (\ u \mid v\ ) + (\ v \mid v\ ),$$

což znamená, že kvadratická rovnice s neznámou α

$$(\ u \mid u\ )\,\alpha^2 + 2\,(\ u \mid v\ )\,\alpha + (\ v \mid v\ ) = 0 \tag{6.1}$$

má nejvýše jeden reálný kořen, tedy $4\,(\ u \mid v\ )^2 - 4\,(\ u \mid u\ )\,(\ v \mid v\ ) \leq 0$, neboť koeficient u α^2 je kladný. Odtud plyne dokazovaná nerovnost.

Ukážeme, že jsou-li vektory $u,\ v$ lineárně závislé, nastane ve Schwarzově nerovnosti rovnost. Nechť tedy $v = \beta u$, pak

$$\begin{aligned} |(\ u \mid v\ )| &= |\beta (\ u \mid u\ )| = \sqrt{\beta^2 (\ u \mid u\ )(\ u \mid u\ )} = \sqrt{(\ u \mid u\ )(\ \beta u \mid \beta u\ )} = \\ &= \sqrt{(\ u \mid u\ )(\ v \mid v\ )}. \end{aligned}$$

Nakonec ukážeme, že nastává-li ve Schwarzově nerovnosti rovnost, jsou vektory $u,\ v$ lineárně závislé. Nechť tedy $(\ u \mid v\ )^2 = (\ u \mid u\ )(\ v \mid v\ )$.

Je-li $(\ u \mid u\ ) \neq 0$, má rovnice (6.1) kořen $\alpha = -\dfrac{|(\ u \mid v\ )|}{(\ u \mid u\ )}$ a pro takové α je $(\ \alpha u + v \mid \alpha u + v\ ) = 0$, což podle 6.1.2.1 znamená, že $\alpha u + v = 0$, neboli $v = -\alpha u$.

Je-li $(\ u \mid u\ ) = 0$, je tvrzení triviální. $\square$

6.1.4 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$. Pro $u \in V$ položme $\|u\| = \sqrt{(\ u \mid u\ )}$. Pak pro všechna $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$ platí

(N1) $u \neq 0 \Leftrightarrow \|u\| > 0$,

(N2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$,

(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

D.: Jediné netriviální tvrzení je (N3). S využitím 6.1.3 dostaneme:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (\ u+v \mid u+v\ ) = (\ u \mid u\ ) + 2\,(\ u \mid v\ ) + (\ v \mid v\ ) = \\ &= \|u\|^2 + 2|(\ u \mid v\ )| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\sqrt{(\ u \mid u\ )(\ v \mid v\ )} + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned}$$

$\square$

Cauchyovu - Bunjakovského - Schwarzovu nerovnost lze zapsat:

$$|(\ u \mid v\ )| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \text{nebo} \quad (\ u \mid v\ )^2 \leq \|u\|^2\,\|v\|^2 .$$

6.1.5 Definice

Buď V reálný vektorový prostor a $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ zobrazení, které pro všechna $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (N1), (N2), (N3) z 6.1.4. Pak $\|\cdot\|$ se nazývá *norma* (*na vektorovém prostoru* V).

6.1.6 Věta

Buď V reálný vektorový prostor s normou $\|\cdot\|$. Definujme zobrazení $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ předpisem $\rho(u, v) = \|u - v\|$. Pak ρ je metrika na V.

D.: Axiomy totožnosti a symetrie jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost plyne z (N3):
$\rho(u, w) = \|u - w\| = \|u - v + v - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = \rho(u, v) + \rho(v, w)$. $\square$

Je-li V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$, budeme V uvažovat současně s normou zavedenou v 6.1.4 a s metrikou zavedenou v 6.1.6.

6.1.7 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$, pak zobrazení $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right) : V \times V \to \mathbb{R}$ je spojité.

D.: Na $V \times V$ zavedeme metriku ρ_2 předpisem $\rho_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sqrt{\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2}$.
Pro všechny dvojice $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V \times V$ platí

$$\|u_1 - u_2\| \le \rho_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)), \; \|v_1 - v_2\| \le \rho_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \,.$$

Buď $(u_0, v_0) \in V \times V$ libovolná dvojice a $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Položme

$$\delta = \frac{\sqrt{(\|u_0\| + \|v_0\|)^2 + 2\varepsilon} - \|u_0\| - \|v_0\|}{2} \,.$$

Pak $\delta > 0$ a $\delta^2 + (\|u_0\| + \|v_0\|)\,\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Buď dále $(u_1, v_1) \in V \times V$ libovolná dvojice taková, že $\rho_2((u_1, v_1), (u_0, v_0)) < \delta$. Pak s využitím 6.1.3 dostaneme

$$\begin{aligned}
\left|\left(u_1 \,\middle|\, v_1 \right) - \left(u_0 \,\middle|\, v_0 \right)\right| &= \left|\left(u_1 - u_0 \,\middle|\, v_1 - v_0 \right) + \left(u_0 \,\middle|\, v_1 - v_0 \right) + \left(u_1 - u_0 \,\middle|\, v_0 \right)\right| \le \\
&\le \left|\left(u_1 - u_0 \,\middle|\, v_1 - v_0 \right)\right| + \left|\left(u_0 \,\middle|\, v_1 - v_0 \right)\right| + \left|\left(u_1 - u_0 \,\middle|\, v_0 \right)\right| \le \\
&\le \|u_1 - u_0\|\,\|v_1 - v_0\| + \|u_0\|\,\|v_1 - v_0\| + \|v_0\|\,\|u_1 - u_0\| \le \\
&\le \delta^2 + \|u_0\|\,\delta + \|v_0\|\,\delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

což znamená, že zobrazení $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$ je spojité v (u_0, v_0). Poněvadž (u_0, v_0) byla libovolná dvojice z $V \times V$, je toto zobrazení spojité na $V \times V$. □

6.1.8 Důsledek

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$ a $\{v_n\}_{n1}^{\infty}$ posloupnost vektorů taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\| = \|v\|$ a pro libovolný vektor $u \in V$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \left(v_n \,\middle|\, u \right) = \left(v \,\middle|\, u \right)$.

D.: Plyne z 5.5.3. □

6.1.9 Definice

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$. Řekneme, že vektory $u, v \in V$ jsou *ortogonální* a píšeme $u \perp v$, jestliže $u \neq 0 \neq v$ a $\left(u \,\middle|\, v \right) = 0$.
Řekneme, že množina $S \subseteq V$ je *ortogonální*, jestliže pro každé dva různé vektory $u, v \in S$ je $u \perp v$. Jestliže navíc pro každý vektor $u \in S$ platí $\|u\| = 1$, nazývá se množina S *ortonormální.*

Je-li množina S ortogonální, je množina $\left\{ \dfrac{1}{\|u\|} u : \, u \in S \right\}$ zřejmě ortonormální.

Označení: Je-li V vektorový prostor a $S \subseteq V$, pak podprostor generovaný množinou S (lineární obal množiny S, množinu všech lineárních kombinací vektorů z S) označíme $\mathrm{Lin}(S)$.
Mohutnost množiny M označíme $\mathrm{card}\, M$.

6.1.10 Věta (Gramova [1850–1916] - Schmidtova [1876–1959] ortogonalizace)

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$ a $S \subseteq V$ konečná nebo spočetná lineárně nezávislá množina. Pak existuje ortonormální množina $R \subseteq V$ taková, že $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(R)$ a $\mathrm{card}\, S = \mathrm{card}\, R$.

D.: Nechť $S = \{u_1, u_2, \dots\}$. Definujme vektory $x_1, x_2, \dots$ a $u_1, u_2, \dots$ takto:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 & v_1 &= \frac{1}{\|x_1\|} x_1 \\
x_2 &= u_2 - \left(u_2 \,\middle|\, v_1 \right) v_1 & v_2 &= \frac{1}{\|x_2\|} x_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{k+1} &= u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, v_i \right) v_i & v_{k+1} &= \frac{1}{\|x_{k+1}\|} x_{k+1} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Tento postup končí, je-li množina S konečná vyčerpáním všech jejích prvků. Jinak můžeme neomezeně pokračovat. Položíme $R = \{v_1, v_2, \dots\}$. Zřejmě je $\operatorname{card} S = \operatorname{card} R$.
Úplnou indukcí ověříme, že vektor v_n je lineární kombinací vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ a naopak, vektor u_n je lineární kombinací vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$. Tedy $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(R)$.
Je-li množina $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ortogonální, tak pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí

$$\begin{aligned}
\left(x_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) &= \left(u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, v_i \right) v_i \,\middle|\, x_j \right) = \\
&= \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, v_i \right) \left(v_i \,\middle|\, x_j \right) = \\
&= \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_i \right) \frac{1}{\|x_i\|^2} \left(x_i \,\middle|\, x_j \right) = \\
&= \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) - \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) = 0 \,.
\end{aligned}$$

Tedy $x_{k+1} \perp x_j$ pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, což znamená, že množina $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ je ortogonální. Z principu matematické indukce plyne, že množina $\{x_1, x_2, \dots\}$ je ortogonální a tedy množina R je ortonormální. □

6.1.11 Poznámka

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$ a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost vektorů z V. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Řekneme, že *nekonečná řada vektorů* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konverguje k vektoru* s a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ v prostoru s metrikou zavedenou v 6.1.4.

6.1.12 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V a $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel.

- Je-li prostor V úplný a číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ konverguje, pak také řada vektorů $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ konverguje.
- Jestliže řada vektorů $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ konverguje k vektoru $v \in V$, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ konverguje a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\gamma_n = \left(v \,\middle|\, u_n \right)$.

D.: Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k$.

Nechť V je úplný a $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ konverguje. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 4.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro

$n \geq n_0,\ m \in \mathbb{N}$ je $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \gamma_k^2 \right| < \varepsilon$. Pro $n \geq n_0,\ p \geq n_0,\ p > n$ je tedy

$$\begin{aligned} \|s_p - s_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k u_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k u_k \,\middle|\, \sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k u_k \right) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} \sum_{j=n+1}^{p} \gamma_k \gamma_j \left(u_k \mid u_j \right) = \sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k^2 < \varepsilon , \end{aligned}$$

což znamená, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a protože je V úplný, je tato posloupnost konvergentní.
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n = v \in V$. Kdyby $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = \infty$, pak by z analogického výpočtu jako v předchozím kroku vyplynulo, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ by nebyla cauchyovská, což by byl spor s její předpokládanou konvergencí.
S využitím 6.1.8 dostaneme

$$\left(v \mid u_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \,\middle|\, u_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left(u_i \mid u_k \right) = \lim_{n\to\infty} \gamma_k = \gamma_k .$$

□

6.1.13 Definice

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \mid \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V a $v \in V$. Čísla $\gamma_n = \left(v \mid u_n \right)$ se nazývají *Fourierovy koeficienty vektoru v vzhledem k ortonormální posloupnosti* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ se nazývá *Fourierova řada vektoru v vzhledem k ortonormální posloupnosti* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

6.1.14 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \mid \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V, $v \in V$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost Fourierových koeficientů vektoru v vzhledem k posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost reálných čísel. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \right\| \leq \left\| v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\|$$

(mezi všemi lineárními kombinacemi vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ má od vektoru v nejmenší vzdálenost ta, jejíž koeficienty jsou Fourierovými koeficienty vektoru v) a

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2$$

(Besselova identita).

D.: Dokazovaná nerovnost i Besselova identita plynou z rovnosti

$$\begin{aligned}
\left\| v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\|^2 &= \left(v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \,\middle|\, v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right) = \\
&= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(u_i \,\middle|\, v \right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(v \,\middle|\, u_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \left(u_i \,\middle|\, u_j \right) = \\
&= \|v\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i^2 - 2\beta_i \gamma_i) = \\
&= \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left((\beta_i - \gamma_i)^2 - \gamma_i^2 \right) = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \gamma_i)^2 .
\end{aligned}$$

□

6.1.15 Důsledek (Besselova [1784 – 1846] nerovnost)

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V, $v \in V$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost Fourierových koeficientů vektoru v vzhledem k posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \le \|v\|^2 .$$

Z Besselovy nerovnosti a z 6.1.12 plyne, že v úplném prostoru Fourierova řada libovolného vektoru konverguje.

6.1.16 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$, který je úplný, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V a $v \in V$. Fourierova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ vektoru v vzhledem k $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru v právě tehdy, když platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = \|v\|^2$$

(Parsevalova rovnost).

D.: Podle 6.1.8 a 6.1.14 platí

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \left\| v - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \left(\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \right) = \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 .$$

□

6.1.17 Definice

Reálný vektorový prostor, který je úplný a v němž existuje nekonečná ortonormální podmnožina se nazývá *Hilbertův prostor*.

6.1.18 Příklad

Nechť ℓ^2 je množina posloupností $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ takových, že řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ konverguje.

Jsou-li $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ pak řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i$ konverguje absolutně.

D.: $|\alpha_i\beta_i| \le \max\{\alpha_i^2, \beta_i^2\}$

$\sum\limits_{i=1}^{k} \max\{\alpha_i^2, \beta_i^2\} \le \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i^2 \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 < \infty.$

Řada s nezápornými členy $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \max\{\alpha_i^2, \beta_i^2\}$ má ohraničenou posloupnost částečných součtů. Podle 4.2.1 tato řada konverguje, takže podle 4.2.4 konverguje i řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i\beta_i|$. □

ℓ^2 tvoří reálný vektorový prostor a lze snadno ověřit, že zobrazení $(\,\cdot \mid \cdot\,) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ definované pro $u = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2,\ v = \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ předpisem $(\,u \mid v\,) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\beta_i$ je skalární součin.

Položme $e_n = \{\delta_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$, kde $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases}$. Pak zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_n \in \ell^2,\ \|e_n\| = 1$, $(\,e_n \mid e_m\,) = 0$ pro $n \ne m$. Tedy $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální posloupnost v ℓ^2.

Buď $u = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ libovolný vektor. Fourierovy koeficienty tohoto vektoru vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou

$$\gamma_n = (\,u \mid e_n\,) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\delta_{ni} = \alpha_n\,.$$

Dále

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left(\, u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \,\middle|\, u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \,\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((\,u \mid u\,) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,(\,u \mid e_i\,) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\,(\,e_i \mid e_j\,) \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^2 = 0\,,
\end{aligned}$$

takže Fourierova řada libovolného vektoru $u \in \ell^2$ konverguje k u.

6.2 Prostor $\mathcal{L}^2(a, b)$

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b$.

Symbolem $\mathcal{C}^2(a, b)$ označíme množinu všech funkcí f spojitých na intervalu (a, b), pro něž $\int\limits_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x < \infty$. Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to b-} f(x) \in \mathbb{R}$, je nerovnost triviální. V opačném případě říká, že příslušný nevlastní integrál konverguje.

6.2.1 Poznámky

1. Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}^2(a, b)$, pak $\int\limits_a^b |f(x)g(x)| \mathrm{d}x < \infty$ a $-\infty < \int\limits_a^b f(x)g(x) \mathrm{d}x < \infty$.

   D.: Nechť uvažované integrály jsou nevlastní. (V opačném případě by tvrzení bylo triviální.)

   $$\int_a^b |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \le \int_a^b \max\{(f(x))^2, (g(x))^2\} \mathrm{d}x \le \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2 \mathrm{d}x < \infty\,.$$

   Druhá nerovnost plyne z 3.5.8. □

2. Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}^2(a, b)$, pak také $f + g \in \mathcal{C}^2(a, b)$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha f \in \mathcal{C}^2(a, b)$.

D.:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \mathrm{d}x &= \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2 \mathrm{d}x \ \le \\
&\le \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x + 2\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b (g(x))^2 \mathrm{d}x \ \le \\
&\le \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2 \mathrm{d}x \ < \ \infty\,, \\
\int_a^b (\alpha f(x))^2 \mathrm{d}x &= \alpha^2 \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x \ < \ \infty\,.
\end{aligned}$$

□

3. $\mathcal{C}^2(a,b)$ tvoří reálný vektorový prostor, nulovým vektorem je funkce $f \equiv 0$. (Budeme ji značit 0.)

   D.: Plyne bezprostředně z předchozího tvrzení. □

4. Zobrazení $\Phi : \mathcal{C}^2(a,b) \times \mathcal{C}^2(a,b) \to \mathbb{R}$ dané předpisem $\Phi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ je skalárním součinem.

   D.: Nejprve poznamenejme, že zobrazení Φ je podle 1. definováno korektně.
   Ověříme platnost podmínky (U1):
   Nechť $f \neq 0$. Pak existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $f(x_0) \neq 0$ a ze spojitosti funkce f plyne existence okolí $\mathcal{O}(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ bodu x_0 takového, že $(f(x_0))^2 \ge \varepsilon > 0$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
   Podle 3.3.1 je $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (f(x))^2 \mathrm{d}x \ge 2\varepsilon\delta$ a tedy
   $\Phi(f,f) = \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x = \int_a^{x_0-\delta} (f(x))^2 \mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (f(x))^2 \mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} (f(x))^2 \mathrm{d}x \ge 0 + 2\varepsilon\delta + 0 > 0.$
   Platnost podmínek (U2) – (U4) je zřejmá. □

5. Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}^2(a,b)$, pak $\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2 \mathrm{d}x}\,.$

   D.: Plyne z předchozího tvrzení a z 6.1.3. □

6.2.2 Definice

Buď f funkce definovaná na intervalu (a,b).
Řekneme, že funkce f je *po částech spojitá*, je-li množina jejich bodů nespojitosti konečná.
Řekneme, že funkce f je *po částech monotonní*, existují-li čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ a funkce f je monotonní na každém z intervalů (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Symbolem $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ označíme množinu všech po částech spojitých funkcí f definovaných na intervalu (a,b), pro něž $\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x < \infty$.

Pro každou funkci $f \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ označíme symbolem $N(f)$ množinu jejích bodů nespojitosti.

6.2.3 Poznámky

1. Na množině $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ definujme relaci $\sim$ předpisem: $f \sim g \ \Leftrightarrow \int_a^b (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x = 0$. Pak $\sim$ je relací ekvivalence na množině $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$.

D.: Reflexivita a symetrie jsou zřejmé.
Nechť $f \sim g,\ g \sim h$. Buďte $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ a $N(f) \cup N(g) \cup N(h) \subseteq \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Pak každá z funkcí $f,\ g,\ h$ je spojitá v každém intervalu (x_{i-1}, x_i) a platí $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$.
S využitím 6.2.1.5 dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \quad &\le \quad \int_a^b (f(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x \ = \ \int_a^b (f(x)-g(x)+g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x \ = \\
&= \quad \int_a^b (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b (f(x)-g(x))(g(x)-h(x)) \mathrm{d}x + \int_a^b (g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x \ = \\
&= \quad 0 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))(g(x)-h(x)) \mathrm{d}x + 0 \ \le \\
&\le \quad 2\sum_{n=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))(g(x)-h(x)) \mathrm{d}x \right| \ \le \\
&\le \quad 2\sum_{n=1}^{n} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x} \ = \ 0\,.
\end{aligned}$$

takže $\int\limits_a^b (f(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x = 0$, což znamená $f \sim h$. □

2. Jsou-li $f, g, f_1, g_1 \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ a platí $f \sim f_1,\ g \sim g_1$, pak $-\infty \ < \ \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x \ < \ \infty$.

D.: Buďte $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ a $N(f) \cup N(g) \cup N(f_1) \cup N(g_1) \subseteq \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
Pak $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ a $f, g \in \mathcal{C}^2(x_{i-1}, x_i)$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Z 6.2.1.1 tedy plyne $-\infty < \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < \infty$.
Dále podle 6.2.1.2 $f, g_1, f-f_1, g-g_1 \in \mathcal{C}^2(x_{i-1}, x_i)$ a $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-g_1(x))^2 \mathrm{d}x = 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. S využitím 6.2.1.5 dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \ \le \ &\left| \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x \right| \ = \ \left| \int_a^b (f(x)g(x) - f_1(x)g_1(x))\mathrm{d}x \right| \ = \\
&= \ \left| \int_a^b (f(x)g(x) - f(x)g_1(x) + f(x)g_1(x) - f_1(x)g_1(x))\mathrm{d}x \right| \ = \\
&= \ \left| \int_a^b f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x \right| \ \le \\
&\le \ \left| \int_a^b f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x \right| \ =
\end{aligned}$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x))^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(g(x)-g_1(x))^2\mathrm{d}x} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f_1(x))^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(g_1(x))^2\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Odtud plyne rovnost mezi integrály. □

3. Jsou-li $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ takové, že $f_1 \sim f_2,\ g_1 \sim g_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ a $\alpha f_1 \sim \alpha f_2$.

D.: $0 = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2\mathrm{d}x = \int_a^b ((f_1(x) - f_2(x)) - 0)^2\mathrm{d}x$, takže $f_1 - f_2 \sim 0$. Podle předchozího je $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))(g_1(x) - g_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b 0(g_1(x) - g_2(x))\mathrm{d}x = 0$, tedy

$$\int\limits_a^b ((f_1(x)+g_1(x)) - (f_2(x)+g_2(x)))^2\mathrm{d}x = \int\limits_a^b ((f_1(x)-f_2(x)) + (g_1(x)-g_2(x)))^2\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))^2\mathrm{d}x + 2\int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))(g_1(x)-g_2(x))\mathrm{d}x + \int\limits_a^b (g_1(x)-g_2(x))^2\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dále

$$\int\limits_a^b (\alpha f_1(x) - \alpha f_2(x))^2\mathrm{d}x = \alpha^2\int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))^2\mathrm{d}x = 0\,.$$

□

Pro každé $f \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ položme $\langle f\rangle = \{h \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b) : f \sim h\}$. Neboli: množiny $\langle f\rangle$ jsou třídy rozkladu množiny $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ podle ekvivalence $\sim$, $\langle f\rangle \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)/\sim$; $\langle f\rangle = \langle g\rangle \Leftrightarrow f \sim g$.

Označme $\mathcal{L}^2(a,b) = \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)/\sim$.

Dále pro $\langle f\rangle, \langle g\rangle \in \mathcal{L}^2(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ klademe

$$\begin{aligned} \langle f\rangle + \langle g\rangle &= \langle f_1 + g_1\rangle && \text{(součet)}\\ \alpha\langle f\rangle &= \langle \alpha f\rangle && \text{(násobení skalárem)} \end{aligned}$$

přičemž $f_1 \in \langle f\rangle,\ g_1 \in \langle g\rangle$. Podle 6.2.3.3 součet ani násobení skalárem nezávisí na výběru representantů f_1, g_1.

Množina $\mathcal{L}^2(a,b)$ tvoří reálný vektorový prostor. Jeho nulovým prvkem $\langle 0\rangle$ je třída obsahující funkci $f \equiv 0$.

Zobrazení $(\ \cdot \mid \cdot\ ) : \mathcal{L}^2(a,b) \times \mathcal{L}^2(a,b) \to \mathbb{R}$ definované pro $\langle f\rangle, \langle g\rangle \in \mathcal{L}^2(a,b)$ předpisem

$$(\ \langle f\rangle \mid \langle g\rangle\ ) = \int\limits_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x\,,$$

kde $f_1 \in \langle f\rangle$, $g_1 \in \langle g\rangle$, nezávisí podle 6.2.3.2 na výběru representantů f_1, g_1.

Nechť $f_1 \in \langle f \rangle$. Pak platí

$$\big(\ \langle f \rangle \ \big|\ \langle f \rangle\ \big) = \int\limits_a^b (f_1(x))^2 \mathrm{d}x \geq 0\,,$$

$$\big(\ \langle f \rangle \ \big|\ \langle f \rangle\ \big) = 0 \ \Rightarrow\ \int\limits_a^b (f_1(x))^2 \mathrm{d}x = 0 \ \Rightarrow\ f_1 \sim 0 \Rightarrow\ 0 \in \langle f \rangle \Rightarrow\ \langle f \rangle = 0\,.$$

Je tedy splněna podmínka (U1) z 6.1.1. Platnost podmínek (U2) – (U4) je zřejmá. Zobrazení $\big(\ \cdot \ \big|\ \cdot\ \big)$ je skalárním součinem na $\mathcal{L}^2(a,b)$.

V dalším budeme pro zjednodušení zápisu prvky množiny $\mathcal{L}^2(a,b)$ značit stejně jako funkce z množiny $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$. (Třídy rozkladu ztotožňujeme s representanty.)

Vzdálenost dvou funkcí $f,\ g$ v prostoru $\mathcal{L}^2(a,b)$ je

$$\|f-g\| \ = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x}$$

a nazývá se *střední odchylka funkcí* $f,\ g$.

Konvergence posloupnosti funkcí v prostoru $\mathcal{L}^2(a,b)$ se nazývá *konvergence (posloupnosti funkcí) podle středu.*

6.3 Fourierovy řady vzhledem k trigonometrickému systému

Uvažujme prostor $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ a posloupnost funkcí

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}.$$

Platí

$$\big(\ 1 \ \big|\ 1\ \big) \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \ = \ 2\pi\,,$$

$$\big(\ \cos nx \ \big|\ \cos nx\ \big) \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} \mathrm{d}x \ = \ \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} \ = \ \pi\,,$$

$$\big(\ \sin nx \ \big|\ \sin nx\ \big) \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \mathrm{d}x \ = \ \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} \ = \ \pi\,,$$

$$\big(\ 1 \ \big|\ \cos nx\ \big) \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x \ = \ \left[\frac{1}{n} \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} \ = \ 0\,,$$

$$\big(\ 1 \ \big|\ \sin nx\ \big) \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x \ = \ \left[-\frac{1}{n} \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} \ = \ -\frac{1}{n}\left((-1)^n - (-1)^n\right) \ = \ 0\,,$$

$$\big(\ \sin nx \ \big|\ \cos mx\ \big) \ = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) \mathrm{d}x \ = \ 0\,.$$

Odtud plyne, že uvažovaná posloupnost funkcí je ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ a tedy posloupnost funkcí

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots\right\}$$

je ortonormální posloupností funkcí v prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Tato posloupnost se nazývá *trigonometrický systém funkcí.*

Je-li $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$, pak Fourierova řada této funkce vzhledem ke zmíněné ortonormální posloupnosti je

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \beta_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

kde

$$\alpha_0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \alpha_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x, \quad \beta_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tuto řadu lze zapsat v přehlednějším tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

kde

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x\,,\; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad b_n \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x\,,\; n = 1, 2, \ldots.$$

Z 6.1.16 a 4.3.13 plyne

6.3.1 Věta

Buď $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Fourierova řada funkce f vzhledem k trigonometrickému systému konverguje k funkci f podle středu (v metrice prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$) právě tehdy, když

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \;=\; \|f\|^2\,.$$

Z 6.1.4 a 4.1.5 plyne

6.3.2 Věta

Nechť $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ a $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou Fourierovy koeficienty této funkce vzhledem k trigonometrickému systému. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

6.3.3 Věta (Dirichlet [1805 – 1859])

Nechť funkce f je ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi,\pi]$. Pak její Fourierova řada vzhledem k trigonometrickému systému bodově konverguje na intervalu $[-\pi,\pi]$ k funkci $\tilde{f}$, přičemž

$$\tilde{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi,\pi),\; f \text{ je spojitá v } x \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to x-} f(t) + \lim\limits_{t\to x+} f(t) \right), & x \in (-\pi,\pi),\; f \text{ není spojitá v } x \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to -\pi+} f(t) + \lim\limits_{t\to \pi-} f(t) \right), & x \in \{-\pi,\pi\} \end{cases}.$$

D.: Viz V. Novák, Nekonečné řady.
Poznamenejme jen, že podle 1.6.15 příslušné jednostranné limity existují. □

Zřejmě $\tilde{f} \sim f$, t.j. $\tilde{f} = f$ v prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$.

(Bodový) součet Fourierovy řady vzhledem k trigonometrickému systému je 2π-periodická funkce. Tedy (bodový) součet Fourierovy řady je 2π-periodické rozšíření funkce, která je na intervalu $(-\pi,\pi)$ ekvivalentní (ve smyslu 6.2.3.1) funkci f.

Je-li $f \in \mathcal{L}^{\in}(-\pi,\pi)$ sudá funkce, pak $b_n = 0,\ n = 1,2,\dots$ a Fourierova řada této funkce vzhledem k trigonometrickému systému má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\dots .$$

Tato řada se nazývá *kosinová* (*řada funkce* f).

Je-li $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ lichá funkce, pak $a_n = 0,\ n = 0,1,2,\dots$ a Fourierova řada této funkce vzhledem k trigonometrickému systému má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x,\ n = 1,2,\dots .$$

Tato řada se nazývá *sinová* (*řada funkce* f).

6.3.4 Příklad

Nechť $f(x) = x$ pro $x \in [-\pi,\pi]$. Je to funkce lichá, proto $a_n = 0,\ n = 0,1,2,\dots$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx \mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi - \frac{1}{n}\pi\cos n\pi) + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \end{aligned}$$

Tedy pro $x \in (-\pi,\pi)$ je

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx .$$

Zejména pro $x = \dfrac{\pi}{2}$ je

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

tedy

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

6.3.5 Věta (Dirichlet [1805 – 1859] - Jordan [1838 – 1922])

Nechť funkce f je 2π-periodická, ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi,\pi]$. Je-li f spojitá na intervalu (a,b), pak Fourierova řada funkce f vzhledem k trigonometrickému systému konverguje stejnoměrně k funkci f na každém uzavřeném podintervalu intervalu (a,b).

D.: Viz V. Novák, Nekoneěné řady.

Poznamenejme jen, že interval (a,b) nemá žádný vztah k intervalu $[-\pi,\pi]$. □

6.3.6 Příklad

$f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi]$. S využitím výsledku 6.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\int_0^x t\mathrm{d}t = 2\int_0^x \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt\right)\mathrm{d}t = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^x \sin nt\mathrm{d}t = \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{n}[-\cos nt]_0^x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(\cos 0 - \cos nx) = \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(1 - \cos nx) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

(Výpočet je korektní, neboť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}(1 - \cos nx)$ konverguje absolutně.)
Současně platí

$$\frac{a_0}{2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6\pi}[x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Tedy pro $x \in [-\pi, \pi]$ je

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx.$$

Zejména pro $x = \pi$ je

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

z čehož

$$\pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Mimochodem také vyšlo

$$\pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

6.3.7 Fourierovy řady funkcí z prostoru $\mathcal{L}^2(a, b)$

Nechť $f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ je ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní. Položme $g(t) = f\left(\dfrac{b-a}{2\pi}t + \dfrac{a+b}{2}\right)$. Pak g je ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní funkce definovaná na intervalu $[-\pi, \pi]$ a platí $f(x) = g\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\pi\right)$. Podle 6.3.3 je

$$g(t) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt), \text{ kde}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\mathrm{d}t, \ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nx\mathrm{d}t, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Substitucí $t = \dfrac{2x-a-b}{b-a}\pi,\ \mathrm{d}t = \dfrac{2\pi}{b-a}\mathrm{d}x$ a při označení $\varphi_n = \dfrac{2}{b-a}n\pi,\ \psi_n = \dfrac{b+a}{b-a}n\pi$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\cos nt &= \cos(\varphi_n x - \psi) = \cos\varphi_n x\,\cos\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin\psi_n\,,\\
\sin nt &= \sin(\varphi_n x - \psi) = \sin\varphi_n x\,\cos\psi_n - \cos\varphi_n x\,\sin\psi_n\,,\\
\alpha_n &= \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b g(\varphi_n x - \psi)\cos(\varphi_n x - \psi)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{b-a}\left(\cos\psi_n\int\limits_a^b f(x)\cos\varphi_n x\mathrm{d}x + \sin\psi_n\int\limits_a^b f(x)\sin\varphi_n x\mathrm{d}x\right),\\
\beta_n &= \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b g(\varphi_n x - \psi)\sin(\varphi_n x - \psi)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{b-a}\left(\cos\psi_n\int\limits_a^b f(x)\sin\varphi_n x\mathrm{d}x - \sin\psi_n\int\limits_a^b f(x)\cos\varphi_n x\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}
$$

Označme

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,,\\
b_n &= \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x\,, \quad n = 1,2,\dots\,.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
f(x) = g\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\pi\right) \sim\ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\cos\psi_n + b_n\sin\psi_n)(\cos\varphi_n x\,\cos\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin\psi_n) + \\
& +(b_n\cos\psi_n - a_n\sin\psi_n)(\sin\varphi_n x\,\cos\psi_n - \cos\varphi_n x\,\sin\psi_n)] = \\
=\ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(\cos\varphi_n x\,\cos^2\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n - \\
& -\sin\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n + \cos\varphi_n x\,\sin^2\psi_n)a_n + \\
& (\cos\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin^2\psi_n + \\
& +\sin\varphi_n x\,\cos^2\psi_n - \cos\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n)b_n] = \\
=\ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\varphi_n x + b_n\sin\varphi_n x)\,.
\end{aligned}
$$

To znamená, že

$$
f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right), \tag{6.3}
$$

kde koeficienty $a_n,\ b_n$ jsou dány vztahy (6.2).

Pro bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady (6.3) platí věty analogické 6.3.3 a 6.3.5.

Vzorec (6.3) můžeme ještě upravit. Položme

$$
\omega_n = \frac{2n\pi}{b-a},\quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\quad \varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}.
$$

Pak platí

$$a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \omega_n + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \omega_n \right) =$$
$$= A_n \left(\cos \varphi_n \cos \omega_n x + \sin \varphi \sin \omega_n x \right) = A_n \cos(\omega_n x - \varphi_n)$$

a formuli (6.3) můžeme přepsat na tvar

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x - \varphi_n).$$

Hodnoty ω_n, A_n a φ_n se nazývají *frekvence, amplituda* a *fáze* n-tého členu Fourierovy řady funkce f. Rozložení frekvencí, amplitud a fází se (zejména v elektrotechnické literatuře) nazývá *frekvenční spektrum funkce* f.

6.3.8 Příklad

Definujme funkci $(\cdot)$ zvanou *vzdálenost k nejbližžšímu celému číslu* předpisem $(x) = \min\{x - [x], [x+1] - x\}$. Tato funkce má zřejmě periodu 1. Najdeme její Fourierovu řadu na intervalu $[0, 1]$.

$$a_0 = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x) \mathrm{d}x \right) = 2 \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{(1-x)^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right) = 2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos 2n\pi x \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x) \cos 2n\pi x \mathrm{d}x \right) = \\
&= 2 \left(\left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4n^2\pi^2} \cos 2n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{1}{4n^2\pi^2} \cos 2n\pi x \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right) = \\
&= 2 \left(\frac{1}{4n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{1}{4n^2\pi^2} - \frac{1}{4n^2\pi^2} + \frac{1}{4n^2\pi^2} \cos n\pi \right) = \frac{1}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & n \text{ sudé} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi^2}, & n \text{ liché} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin 2n\pi x \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x) \sin 2n\pi x \mathrm{d}x \right) = \\
&= 2 \left(\left[\frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x - \frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi x - \frac{1}{2n\pi} \cos 2n\pi x \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{1}{4n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{4n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{2n\pi} \cos n\pi \right) = 0
\end{aligned}$$

Celkem

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos 2(2n+1)\pi x.$$

Zejména pro $x = 0$ dostaneme

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{tj. } \pi^2 = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

6.3.9 Komplexní tvar Fourierovy řady

Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{L}^2(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$ vzhledem k trigonometrickému systému je podle 6.3.7 dána formulí

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi}{T}x + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}x\right),$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2k\pi}{T}x\mathrm{d}x,\ k = 0,1,2,\ldots, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2k\pi}{T}x\mathrm{d}x,\ k = 0,1,2,\ldots.$$

Přitom je splněna Parsevalova rovnost (sr. 6.1.16, 6.3.1)

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - \mathrm{i}b_k\right), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}\left(a_k + \mathrm{i}b_k\right), \quad k = 1,2,3,\ldots, \tag{6.4}$$

neboli

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}\left(c_k - c_{-k}\right), \quad k = 1,2,3,\ldots. \tag{6.5}$$

Fourierovu řadu při tomto označení můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2}(2c_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left((c_k + c_{-k})\cos\frac{2k\pi}{T}x + \mathrm{i}\left(c_k - c_{-k}\right)\sin\frac{2k\pi}{T}x\right) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}} + c_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}}\right) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}} + c_0 + \sum_{k=1}^{-1} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}}. \end{aligned}$$

Přitom

$$c_0 = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\cdot 0\pi}{T}}\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2k\pi}{T}x\mathrm{d}x - \mathrm{i}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2k\pi}{T}x\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\left(\cos\frac{2k\pi}{T}x - \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}x}\mathrm{d}x, \quad k = 1,2,3,\ldots, \end{aligned}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2k\pi}{T}x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2k\pi}{T}x\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}x}\mathrm{d}x, \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

Ještě přepíšeme Parsevalovu rovnost. Ze vztahů (6.4) vidíme, že $c_{-k} = \overline{c_k}$, $|c_k| = |c_{-k}|$ a ze vztahů (6.5) vypočítáme

$$a_k^2 + b_k^2 = c_k^2 + 2c_kc_{-k} + c_{-k}^2 - \left(c_k^2 - 2c_kc_{-k} + c_{-k}^2\right) = 4c_kc_{-k} = 4c_k\overline{c_k} = 4\left|c_k\right|^2.$$

Parsevalova rovnost tedy bude mít tvar

$$\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = 2c_0^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 .$$

Z provedených výpočtů vidíme, že Fourierovu řadu funkce f vzhledem k trigonometrickému systému můžeme přepsat v komplexním tvaru

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}}, \quad \text{kde } c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}x}\mathrm{d}x, \quad k\in\mathbb{Z}; \tag{6.6}$$

přitom nutná a dostatečná podmínka konvergence této řady je Parsevalova rovnost

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x. \tag{6.7}$$

6.4 Fourierova transformace

Druhou z relací (6.6) můžeme chápat jako definici zobrazení, které funkci z množiny $\mathcal{L}^2$ přiřadí komplexní posloupnost $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ s vlastností $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2<\infty$. Jinak řečeno, označme

$$S = \left\{ \{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2<\infty \right\}$$

a definujme zobrazení $\mathcal{G}:\mathcal{L}^2\to S$ vztahem

$$\mathcal{G}(f) = \left\{ \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}x}\mathrm{d}x \right\}_{k=-\infty}^{\infty},$$

tj. při rozepsání do složek

$$\mathcal{G}(f)_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}x}\mathrm{d}x,\ k=\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots.$$

Naopak, první z relací (6.6) můžeme chápat tak, že posloupnosti $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\in S$ přiřazuje funkci $f\in\mathcal{L}^2$ takovou, že

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}}.$$

Máme tak definováno inversní zobrazení $\mathcal{G}^{-1}:S\to\mathcal{L}^2$,

$$\mathcal{G}^{-1}\left(\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\right)(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}}.$$

Integrál je podle 3.3.5 lineární funkcionál (lineární zobrazení, které funkci – vektoru – přiřadí číslo reálné nebo komplexní – skalár). To znamená, že také zobrazení $\mathcal{G}$ je lineární.

Dostali jsme tak jedno-jednoznačnou korespondenci mezi funkcemi definovanými na intervalu $\left(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T\right)$ symetrickém kolem počátku – nebo, což je totéž, mezi T-periodickými funkcemi – a komplexními posloupnostmi $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit také tak, že máme transformaci $\mathcal{G}$ vektorového prostoru $\mathcal{L}^2$ reálných funkcí na vektorový prostor S komplexních posloupností a transformaci inversní.

Definujme nyní funkci g jako analogii zobrazení $\mathcal{G}$ předpisem

$$g(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x. \tag{6.8}$$

pokud tato limita existuje; takto definovaný integrál, nazývaný *nevlastní integrál ve smyslu hlavní hodnoty*, nemusí být nevlastním integrálem ve smyslu definice 3.5.1. Funkce g je komplexní funkcí jedné reálné proměnné ξ.

Položme dále

$$\xi_k = \frac{2k\pi}{T} \tag{6.9}$$

pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Pak $D = \{\dots, \xi_{-3}, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$ představuje dělení intervalu $(-\infty, \infty)$, pro jehož normu platí

$$\nu(D) = \xi_{k+1} - \xi_k = \frac{2\pi}{T} \quad \text{a} \quad \lim_{T\to\infty} \nu(D) = 0.$$

Porovnáním s relací (6.6), vidíme, že

$$c_k = \frac{1}{T} g(\xi_k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{6.10}$$

Pro x z intervalu $\left(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T\right)$ můžeme proto psát

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} g(\xi_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\xi_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_k}(\xi_{k+1} - \xi_k).$$

Poslední sumu můžeme chápat jako integrální součet příslušný ke komplexní funkci reálné proměnné definované vztahem $x \mapsto g(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}$, dělení D a výběru reprezentantů D; pojmy „dělení intervalu“ a „integrální součet“ jsou analogiemi pojmů zavedených v 3.2.1 a 3.2.8 pro ohraničený interval a omezenou reálnou funkci. Můžeme očekávat, že bude platit

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{6.11}$$

Z rovností (6.7), (6.9) a (6.10) můžeme ještě odvodit

$$\frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2} |g(\xi_k)|^2 = \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(\xi_k)|^2 (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

a očekávat platnost rovnosti

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|g(\xi)\big|^2\mathrm{d}\xi. \tag{6.12}$$

Komplexní funkce g jedné reálné proměnné $\xi \in (-\infty, \infty)$ je zavedená formulí (6.8) pomocí reálné funkce f jedné reálné proměnné $x \in (-\infty, \infty)$. Tuto relaci můžeme interpretovat jako přiřazení komplexní funkce g funkci reálné f, nebo jako transformaci funkce f na funkci g. Formule (6.11) pak vyjadřuje zpětnou transformaci. Zatím se však jedná o vyjádření pouze formální, nevíme, zda uvedené nevlastní integrály mají skutečný význam, zda v nějakém smyslu konvergují. Lze ovšem dokázat, že pokud je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutně integrovatelná, tj.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\mathrm{d}x < \infty$$

(ve smyslu definice 3.5.1), pak příslušné integrály konvergují.

Zavedeme množiny funkcí

$$F = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x < \infty \right\} \quad \text{a} \quad G = \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) \right|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

a zobrazení

$$\mathcal{F} : F \to G, \quad f \mapsto \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

definované vztahem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x. \tag{6.13}$$

Na množinách F a G je přirozeně definován součet a vnější součin

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{pro } f, g \in F \text{ a } x \in \mathbb{R} \quad \text{nebo } f, g \in G \text{ a } x \in \mathbb{C},$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{pro } f \in F,\ \alpha, x \in \mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad f \in G,\ \alpha, x \in \mathbb{C},$$

množina F je tedy vektorovým prostorem nad polem reálných čísel a množina G je vektorovým prostorem nad polem komplexních čísel. Zobrazení $\mathcal{F}$ je podle 3.3.5 lineární.

Zobrazení $\mathcal{F}$ nazýváme *Fourierovou transformací funkce* f, komplexní funkci $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ nazýváme *Fourierovým obrazem funkce* f. Vztah funkce a jejího Fourierova obrazu je podle (6.12) dána rovností

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi,$$

kterou nazýváme *Plancherelova.*

Přísně vzato, zobrazení $\mathcal{F}$ není prosté. Například pro dvě různé funkce

$$f_1(x) = 0 \quad \text{a} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

platí $\mathcal{F}(f_1) = 0 = \mathcal{F}(f_2)$, tedy jádro lineárního zobrazení $\mathcal{F}$ není jednoprvkové. Proto (podobně jako při konstrukci prostorů $\mathcal{L}^2$) definujeme ekvivalenci $\sim$ na množinách F a G vztahy

$$\text{pro } f_1, f_2 \in F \text{ klademe } f_1 \sim f_2, \text{ pokud } \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x = 0 \text{ pro všechna } \xi \in \mathbb{R},$$

$$\text{pro } g_1, g_2 \in G \text{ klademe } g_1 \sim g_2, \text{ pokud } \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1(x) - g_2(x) \right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi = 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

a ekvivalentní funkce z množin F, G ztotožňujeme. Pak již zobrazení $\mathcal{F}$ je prosté a tedy invertovatelné.

Inversní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1} : G \to F$ je podle (6.11) definována vztahem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi. \tag{6.14}$$

6.4.1 Vlastnosti Fourierovy transformace

Uvažujme funkci $f \in F$, která je navíc diferencovatelná. Pak je tato funkce podle 2.1.3 spojitá a podle 3.5.7 platí

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Odtud s využitím 3.1.10 a skutečnosti, že funkce $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} = \cos x\xi + \mathrm{i}\sin x\xi$ má reálnou i imaginární část ohraničenou, dostaneme

$$\widehat{f'}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi).$$

To znamená, že Fourierova transformace převádí derivaci funkce na násobení jejího obrazu ryze imaginárním číslem; jinak řečeno, převádí infinitesimální operaci na operaci algebraickou.

6.5 Fourierův integrál

Buď f spojitá funkce definovaná na intervalu $(-\infty,\infty)$ taková, že $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ konverguje. Dále buď $\ell > 0$.

Podle 6.3.7 pro každé $x \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$ je

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{\ell}x\right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{\ell}t\mathrm{d}t,\;\; n = 0,1,2,\ldots \qquad b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{\ell}t\mathrm{d}t,\;\; n = 1,2,\ldots.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\left(\cos\frac{2n\pi}{\ell}t\cos\frac{2n\pi}{\ell}x + \sin\frac{2n\pi}{\ell}t\sin\frac{2n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}t \;= \\ &=\; \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\left(f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{\ell}\cos\frac{2n\pi}{\ell}(t-x)\right)\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Abychom dostali vzorec platný pro každé $x \in (-\infty,\infty)$, provedeme limitní přechod $\ell \to \infty$.

Z konvergence nevlastního integrálu $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ plyne $\lim\limits_{\ell\to\infty}\left|\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t\right| < \infty$ a tedy

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Výraz

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{2\pi}{\ell}\cos\frac{2n\pi}{\ell}(t-x)$$

je integrální součet příslušný k funkci $g(\lambda) = \cos\lambda(t-x)$, dělení $D = \left\{0, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \ldots, \frac{2m\pi}{\ell}\right\}$ intervalu $\left[0, \frac{2m\pi}{\ell}\right]$ a výběru representantů $\left\{\frac{2\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \ldots, \frac{2m\pi}{\ell}\right\}$ (sr. 3.2.8). Lze tedy očekávat, že za jistých předpokladů bude platit

$$\lim_{\ell\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{\ell}\cos\frac{2n\pi}{\ell}(t-x) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty}\cos\lambda(t-x)\mathrm{d}\lambda$$

a také

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t + \sin\lambda x\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda\,.$$

6.5.1 Věta

Nechť funkce f je definována na intervalu $(-\infty,\infty)$ s případnou výjimkou izolované množiny bodů. Je-li splněna alespoň jedna z podmínek

(i) integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ absolutně konverguje,

(ii) funkce f a její derivace jsou po částech spojité na každém konečném intervalu, přičemž případné body nespojitosti jsou prvního druhu a navíc platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

pak pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x+} f(t) + \lim_{t\to x-} f(t)\right) \;=\; \int\limits_0^\infty (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

kde

$$a(\lambda) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t, \quad b(\lambda) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t.$$

D.: V. Jarník, Integrální počet II, str. 524 – 533. (Věta je tam dokázána s poněkud obecnějšími předpoklady.) $\square$

Zejména je-li f v bodě x spojitá, platí

$$f(x) \;=\; \int\limits_0^\infty (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Je-li funkce f sudá, pak

$$a(\lambda) \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t, \quad b(\lambda) \;\equiv\; 0\,,$$

Je-li funkce f lichá, pak

$$a(\lambda) \;\equiv\; 0, \quad b(\lambda) \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t.$$

Příklad: Funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x},\ 0 < x < \infty,\ \alpha > 0$ vyjádřit Fourierovým integrálem

a) jako sudou funkci

$$\begin{aligned}
a(\lambda) \;&=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\lambda t\mathrm{d}t \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} Re\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t \;=\; \frac{2}{\pi} Re\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda-\alpha)t}\mathrm{d}t \;=\\
&=\; \frac{2}{\pi} Re\frac{1}{\mathrm{i}\lambda-\alpha}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda-\alpha)t}\right]_0^\infty \;=\; \frac{2}{\pi} Re\frac{1}{\mathrm{i}\lambda-\alpha} \;=\; \frac{2}{\pi} Re\frac{\alpha+\mathrm{i}\lambda}{\alpha^2+\lambda^2} \;=\; \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}\\
\mathrm{e}^{-\alpha x} \;&=\; \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

b) jako lichou funkci

$$b(\lambda) \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\lambda t\mathrm{d}t \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} Im\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t \;=\; \frac{2\lambda}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha x} \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda\sin\lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

6.6 Laplaceova transformace

Buď M množina reálných funkcí definovaných na intervalu $(0,\infty)$ takových, že integrál $\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ konverguje a $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$ pro všechna $p > 0$. *Laplaceova transformace* $\mathcal{L}$ převádí reálnou funkci $f \in M$ na reálnou funkci $\mathcal{L}f$ definovanou na intervalu $(0,\infty)$ vztahem

$$\mathcal{L}f(p) \;=\; \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Z uvedeného definičního vztahu plyne, že Laplaceův obraz funkce $f \in M$ je funkcí ohraničenou a že Laplaceova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{L}(c_1f_1 + c_2f_2)(p) = c_1\mathcal{L}f_1(p) + c_2\mathcal{L}f_2(p).$$

Obrazy některých funkcí v Laplaceově transformaci jsou uvedeny v tabulce 6.1.

Vypočítáme Laplaceův obraz derivace funkce:

$$\mathcal{L}\left(f'\right)(p) \;=\; \int\limits_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \;=\; \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_{t=0}^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \;=\; -\lim_{t\to 0+} f(t) + p\mathcal{L}f(p).$$

Při označení $f(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ tedy platí

$$\mathcal{L}\left(f'\right)(p) \;=\; p\mathcal{L}f(p) - f(0+). \tag{6.15}$$

6.6.1 Ukázka užití Laplaceovy transformace – negativní zpětná vazba

Uvažujme dvě veličiny x a y závislé na čase, tj. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Tyto veličiny na sebe působí tak, že růst veličiny x je úměrný velikosti veličiny y, a noaopak, pokles veličiny y je úměrný velikosti veličiny x. Navíc předpokládejme, že na počátku, tj. v čase $t = 0$, je první veličina nulová a druhá jednotková. Veličiny x a y chceme vyjádřit nějakým předpisem.

Změna veličiny je její derivace, tedy růst veličiny x je roven $x'(t)$, pokles veličiny y je roven $-y'(t)$. Označme koeficienty úměrnosti α a βů jsou to kladná reálná čísla. Hledáme tedy funkce $x = x(t)$ a $y = y(t)$, které vyhovují relacím

$$x'(t) = \alpha y(t),\; -y'(t) = \beta x(t), \quad x(0) = 0,\; y(0) = 1. \tag{6.16}$$

Pro zjednodušení zápisu označíme

$$X(p) = \mathcal{L}(x)(p), \quad Y(p) = \mathcal{L}(x)(p).$$

Využijeme linearitu Laplaceovy transformace, vztah (6.15), třetí a čtvrtou rovnost (6.16) a napíšeme Laplaceovy obrazy prvních dvou rovnic (6.16). Dostaneme

$$pX(p) = \alpha Y(p), \quad -\big(pY(p) - 1\big) = \beta X(p),$$

po úpravě

$$\begin{aligned} pX(p) - \alpha Y(p) &= 0,\\ \beta X(p) + pY(p) &= 1. \end{aligned}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}f(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$	$f(t)$	$\mathcal{L}f(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$
1	$\dfrac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^n,\ n=1,2,\dots$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t^a,\ a>-1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$\sin^2\omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$t\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	$\cos^2\omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$t^n\mathrm{e}^{at},\ n=1,2,\dots$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\sinh at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$t^\nu\mathrm{e}^{at},\ \nu>-1$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{(p-a)^{\nu+1}}$	$\cosh at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$t\sinh at$	$\dfrac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$t\cosh at$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$

Tabulka 6.1: **„Operátorový slovník“ pro Laplaceovu transformaci**

To je soustava dvou rovnic pro neznámé $X(p)$ a $Y(p)$, její řešení je

$$X(p) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{p^2+\alpha\beta}, \quad Y(p) = \frac{p}{p^2+\alpha\beta}.$$

Z osmého a devátého řádku v prvním sloupci Tabulky 6.1 nyní vidíme, že

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin\sqrt{\alpha\beta}\,t, \quad y(t) = \cos\sqrt{\alpha\beta}\,t.$$

6.7 Cvičení

Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkce
1) $f(x)=x^2$ 2) $f(x)=|x|$ 3) $f(x)=|\sin x|$

Rozviňte ve Fourierovu řadu funkce
4) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in[-h,h]$ 5) $f(x)=x,\ x\in[a,a+2l]$ 6) $f(x)=x\cos x,\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Rozviňte ve Fourierovu řadu periodické funkce
7) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 8) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 9) $f(x)=x-[x]$

Rozviňte ve Fourierovu řadu 2π-periodické funkce, jestliže
10) $f(x)=x$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je sudá,
11) $f(x)=x$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je lichá,
12) $f(x)=\frac{\pi}{4}$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je lichá,
13) $f(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi x}{4}$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je sudá,
a určete součty těchto řad.

Najděte součty řad

14) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$

15) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

16) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

17) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

18) $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots$

19) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$

Výsledky: 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$ **2)** $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$ **3)** $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cos 2kx$ **4)** $2\sinh h \left[\frac{1}{2h} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h^2+(k\pi)^2} (h \cos \frac{k\pi x}{h} - \pi k \sin \frac{k\pi x}{h} \right]$ **5)** $a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\sin \frac{k\pi a}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} - \cos \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi x}{l})$ **6)** $\frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{(4k^2-1)^2} \sin 2kx$ **7)** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)x$ **8)** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x$ **9)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k}$ **10)** $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$ **11)** $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$ **12)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ **13)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ **14)** $\frac{\pi^2}{12}$ **15)** $\frac{\pi^2}{6}$ **16)** $\frac{\pi^2}{8}$ **17)** $\frac{\pi}{4}$ **18)** $\frac{\pi}{3}$ **19)** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$