5. domácí úloha z MIN401, jaro 2024

Příklad 1. Pomocí Gröbnerovy báze vyřešte soustavu polynomiálních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y + z &= 1 \\ x + y^2 + z &= 1 \\ x + y + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

tj. najdětě *všechna* řešení této soustavy.

Řešení. Začneme s polynomy

$$\begin{array}{lll} f_1 = x^2 + y + z - 1, & f_2 = x + y^2 + z - 1, & f_3 = x + y + z^2 - 1 \\ x^2 \to -y - z + 1, & x \to -y^2 - z + 1, & x \to -y - z^2 + 1 \end{array}$$

Použijeme třetí redukci na redukci druhého polynomu,

$$f_2 \to (-y - z^2 + 1) + y^2 + z - 1 = y^2 - y - z^2 + z$$

a položíme tedy

$$\begin{aligned} \overline{f}_2 &= y^2 - y - z^2 + z \\ y^2 &\to y + z^2 - z \end{aligned}$$

Nyní s použitím $\overline{f}_2$ a f_3 zredukujeme první polynom:

$$\begin{aligned} f_1 &\to (-y - z^2 + 1)^2 + y + z - 1 = y^2 + 2yz^2 - y + z^4 - 2z^2 + z \\ &\to (y + z^2 - z) + 2yz^2 - y + z^4 - 2z^2 + z = 2yz^2 + z^4 - z^2 \end{aligned}$$

a položíme tedy

$$\begin{aligned} \overline{f}_1 &= yz^2 + \tfrac{1}{2}z^4 - \tfrac{1}{2}z^2 \\ yz^2 &\to \tfrac{1}{2}(-z^4 + z^2) \end{aligned}$$

Jediné dva polynomy z $\overline{f}_1, \overline{f}_2, f_3$ se soudělnými vedoucími členy jsou první dva, spočítáme a zredukujeme tedy S-polynom

$$\begin{aligned} S(\overline{f}_1, \overline{f}_2) &= y(yz^2 + \tfrac{1}{2}z^4 - \tfrac{1}{2}z^2) - z^2(y^2 - y - z^2 + z) \\ &= \tfrac{1}{2}yz^4 + \tfrac{1}{2}yz^2 + z^4 - z^3 \\ &\to \tfrac{1}{4}(-z^4 + z^2)z^2 + \tfrac{1}{4}(-z^4 + z^2) + z^4 - z^3 \\ &= \tfrac{1}{4}(-z^6 + 4z^4 - 4z^3 + z^2) \end{aligned}$$

a položíme tedy

$$\begin{aligned} f_4 &= z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 \\ z^6 &\to 4z^4 - 4z^3 + z^2 \end{aligned}$$

Případně ještě zkontrolujeme $S(\overline{f}_1, f_4) \to 0$, abychom mohli říct, že Gröbnerovou bází ideálu (f_1, f_2, f_3) je čtveřice polynomů $\overline{f}_1$, $\overline{f_2}$, f_3, f_4. Soustavu vyřešíme „odzadu", tj. prvně řešíme $f_4 = 0$, přičemž

$$f_4 = z^2(z-1)^2(z^2 + 2z - 1)$$

a dostaneme tak řešení $z = 0$, $z = 1$, $z = -1 \pm \sqrt{2}$. Dosazením do $\overline{f}_2 = 0$ v prvních dvou případech a do $\overline{f}_1$ v posledních dvou případech pak obdržíme

$$y^2 - y = 0, \quad \text{resp.} \quad y = \frac{1 - z^2}{2} = z = -1 \pm \sqrt{2};$$

v prvních dvou případech jsou řešeními $y = 0$ a $y = 1$, přičemž řešením $\overline{f}_1$ budou pouze ty kombinace, ve kterých $y = 0$ nebo $z = 0$; v posledních dvou případech je $y = -1 \pm \sqrt{2}$ zároveň i řešením $\overline{f}_2$. Zbývá proto vyřešit $f_3 = 0$, přičemž příslušné x existuje jediné

$$x = -y - z^2 + 1$$

a dostáváme tak ve finále těchto pět řešení:

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}), (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$.

$\square$