MIN401 Matematika IV - jaro 2022)

1 Cvičení – středoškolská dělitelnost

Cvičení konané 14. 2. 2021.

Příklad 1.1: Jak poznáme, že je celé číslo dělitelné 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11? Svá tvrzení zdůvodněte.

Příklad 1.2: Ukažte, že součin pěti po sobě jdoucích čísel je dělitelný 120.

Příklad 1.3: Nejdříve pro $n = 2, 3$ a potom pro další $n \in \mathbb{N}$ si připomeňte

a) vzorec pro rozdíl n-tých mocnin dvou čísel,

b) vzorec pro součet n-tých mocnin dvou čísel,

c) vzorec pro n-tou mocninu součtu, tzv. binomický vzorec.

Příklad 1.4: [10.2] Dokažte, že pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ platí:

(i) a^2 dává po dělení čtyřmi zbytek 0 nebo 1,

(ii) a^2 dává po dělení osmi zbytek 0, 1 nebo 4,

(iii) a^4 dává po dělení šestnácti zbytek 0 nebo 1.

Příklad 1.5:

(i) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $3|4^n - 1$.

(ii) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $5|n^5 - n$.

(iii) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $5|3^{3n+1} + 2^{n+1}$.

Příklad 1.6: [10.1] Určete, pro která přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ je číslo $n^3 + 1$ dělitelné číslem $n - 1$.

Příklad 1.7: Dokažte, že pro přirozená čísla a, k a n platí: jestliže $k \mid n$, pak $a^k - 1 \mid a^n - 1$. Pomocí toho dokažte: Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, pak n musí být také prvočíslo. Proto se "největší" prvočísla hledají ve tvaru $2^p - 1$, kde p je prvočíslo.

Příklad 1.8: Dokažte, že $25 \mid 4^{2n+1} - 10n - 4$.

Příklad 1.9:

(i) Nechť $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že čísla $a + n$ a $b + n$ jsou nesoudělná.

(ii) Nechť má číslo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ následující vlastnost: pro každou dvojici dělitelů $a > 1$, $b > 1$ čísla n platí, že $(a, b) > 1$. Co můžeme říci o číslu n?

Příklad 1.10: [10.10]

(i) Dokažte, že jsou-li čísla $m, n \in \mathbb{N}$ nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla

$$m^2 + mn + n^2 \quad \text{a} \quad m^2 - mn + n^2.$$

(ii) Dokažte, že jsou-li lichá čísla $m, n \in \mathbb{N}$ nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla

$$m + 2n \quad \text{a} \quad m^2 + 4n^2.$$