Množství, obsahy, objemy, povrchy aneb cesta tam a zase zpátky

Integrální počet

Petr Liška

Masarykova univerzita

20.02.2024

Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I*.

Věta

Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak F je spojitá na I.

Věta (O existenci primitivní funkce)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Malá odbočka

Definice

Funkce f se nazývá *darbouxovská* na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$ takové, že $f(x_1) < f(x_2)$ a každé číslo $y_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) < y < f(x_2)$, existuje v intervalu (x_1, x_2) takový bod x_0, že $f(x_0) = y_0$.

Věta

Necht' funkce f má vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak je funkce f' na I darbouxovská.

Věta

Nechť k funkci f existuje na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ funkce primitivní. Pak je funkce f darbouxovská na intervalu I.

Dvě pozorování:

- Nechť funkce F je primitivní k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je také funkce $F + c$ primitivní k funkci f.
- Nechť funkce F a G jsou primitivní k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, že platí $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta

Nechť F je nějaká primitivní funkce k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak

$$\{F + c \colon c \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I.

Definice

Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f na I a značí se

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in I.$$

Věta

Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ a nechť α je libovolná konstanta, $\alpha \neq 0$. Pak na I existuje neurčitý integrál funkce $f+g$ a neurčitý integrál funkce αf a platí

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \int 1\,\mathrm{d}x = x + c, \\
(2) & \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1, \\
(3) & \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, \\
(4) & \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c, \\
(5) & \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1, \\
(6) & \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \\
(7) & \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c, \\
(8) & \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c, \\
(9) & \int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c, \\
(10) & \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c, \\
(11) & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c, \\
(12) & \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c, \\
(13) & \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c, \\
(14) & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.
\end{array}
$$

Metoda per partes

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Substituční metoda

Věta

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F, funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + c.$$

Věta

Nechť funkce f je definovaná na intervalu J a nechť funkce φ má nenulovou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Má-li funkce $f(\varphi)\varphi$ primitivní funkci F na intervalu I, je $F(\varphi^{-1})$ primitivní funkce k funkci na intervalu J.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$