Nekonečné řady

Petr Liška

Masarykova univerzita

16.04.2024
23.04.2024
30.04.2024

Posloupnosti – pamatujete si je ještě?

Definice

Posloupnost je funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{N}$. Posloupnost označujeme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, n-tý prvek označujeme nejčastěji a_n.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > M$.

Pokud takováto limita existuje, říkáme, že posloupnost *konverguje*. Má-li posloupnost limitu ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že *diverguje*. Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.

Číselná řada

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \ldots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.

Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*.

Pravidla pro počítání s nekonečnými řadami

Věta

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady a nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = u$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = v$*. Pak je konvergentní i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = u + v$.

Věta

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$ *konverguje též řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Naopak konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$*, kde* $k \in \mathbb{R}$*,* $k \neq 0$*, konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Asociativní zákon

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní řada a nechť* $\{n_k\}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme* $n_0 = 0$ *a pro* $k \in \mathbb{N}$ *označme*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Kritéria konvergence

Věta (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta (Integrální kritérium)

Nechť funkce f *je nezáporná a nerostoucí na intervalu* $[1, \infty)$. *Nechť* $a_n = f(n)$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje integrál* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Numerická sumace

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní řada, tak její součet s lze psát ve tvaru

$$s = s_n + R_n,$$

kde s_n je n-tý částečný součet a

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

se nazývá zbytek po n-tém členu.

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy. Nechť $a_n = f(n)$ je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $[1, \infty)$. Pak pro zbytek R_n této řady platí

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $a_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Potom platí: konverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; *diverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *diverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\,.$$

Je-li $L < \infty$ *a konverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Je-li $L > 0$ *a diverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *pak diverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta (Limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je-li* $q > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (Limitní odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \textit{kde} \quad q \in \mathbb{R}^{\star}.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je číselná řada, pro kterou platí*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \leq 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. *Pak pro zbytek* R_n *této řady platí*

$$|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}\,.$$

Alternující řady aneb když nutná je i dostatečná

Definice

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Leibnitzovo kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poslední odhad zbytku

Věta

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Pak pro zbytek* R_n *alternující řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *platí*

$$|R_n| < a_{n+1}\,.$$

Absolutní konvergence

Věta

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *.*

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^\star$*, pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Věta

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R}^\star$*, pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Přerovnání řad

Definice

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$. Pak říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}\,.$$

Hodně překvapivý výsledek

Věta (Riemann)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně a nechť* $s \in \mathbb{R}$ *je libovolné. Pak existuje takové přerovnání řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$*, takové přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ *určitě diverguje a takové přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ *osciluje.*