Řady funkcí

Mocninné řady

Petr Liška

Masarykova univerzita

30.04.2024 – 13.5.2024

Základní otázky o funkčních řadách jsou:

1. Je součtem řady spojitých funkcí na intervalu I také funkce spojitá na intervalu I?
2. Pro která x můžeme řadu derivovat člen po členu?
3. Pro která x můžeme řadu integrovat člen po členu?

Bodová konvergence

Definice

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu I a $x_0 \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní v bodě* x_0.
Řekneme, že posloupnost funkcí *bodově konverguje k funkci* $f(x)$ *na intervalu* I, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$.

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Nekonečná řada funkcí

Definice

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí*. Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

nazýváme *posloupností částečných součtů* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro všechny $x \in I$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *bodově konverguje* na intervalu I a funkci $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ nazýváme *součtem řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Stejnoměrná konvergence

Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a všechna $x \in I$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na I.

Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I ke svému součtu $s(x)$, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů stejnoměrně konverguje na I k funkci $s(x)$.

Jak to poznat?

Věta (Weirstrassovo kritérium)

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí na* I*. Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *taková, že řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *konverguje a platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad \text{po všechna} \quad x \in I \quad \text{a} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I*.*

Proboha proč?

Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* I *k funkci* f*. Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *spojité na* I*, je i* $f(x)$ *spojitá na* I*.*

Věta

Nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I *a má součet* $s(x)$*. Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *spojité na* I*, pak je i* $s(x)$ *spojitá na* I*.*

Mocninné řady

Definice

Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že středem mocninné řady je číslo $x_0 = 0$, jelikož pomocí substituce $x - x_0 = y$ můžeme převést řadu se středem v bodě x_0 na řadu se středem v bodě 0.

Poloměr konvergence

Věta

Nechť $\sum a_n x^n$ *je mocninná řada a nechť* $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- *Je-li* $a = 0$, *pak řada absolutně konverguje pro všechna* $x \in \mathbb{R}$.
- *Je-li* $a = \infty$, *pak řada diverguje pro všechna* $x \neq 0$.
- *Je-li* $0 < a < \infty$, *pak řada absolutně konverguje pro* $|x| < \frac{1}{a}$ *a diverguje pro* $|x| > \frac{1}{a}$.

Je-li $0 < a < \infty$, pak se číslo $r = \frac{1}{a}$ nazývá *poloměr konvergence* a interval $(-r, r)$ se nazývá *konvergenční interval. Oborem konvergence* pak rozumíme tento interval, případně tento interval s jeho krajními body, pokud zde řada konverguje.

Existuje-li limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, pak má mocninná řada $\sum a_n x^n$ poloměr konvergence

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Mohou nastat tři možnosti:

1. Je-li $0 < r < \infty$, pak řada konverguje pro $x \in (-r, r)$ a diverguje pro $|x| > r$. Pro hodnoty $x = \pm r$ musíme rozhodnout zvlášť pomocí některého z kritérií konvergence pro číselné řady.
2. Je-li $r = \infty$, pak řada konverguje pro všechna x.
3. Je-li $r = 0$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$ a říkáme, že řada vždy diverguje.

Věta

Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném podintervalu $[-\varrho, \varrho]$ intervalu $(-r, r)$.

Věta

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$*. Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu* $(-r, r)$*.*

Věta

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$*. Pak pro všechna* $x \in (-r, r)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

a

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\, \mathrm{d}t = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Přitom výrazy na pravé straně mají stejný poloměr konvergence.

Taylorova a Maclaurinova řada

Raději si připomeňme: Na intervalu I s krajními body x a x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\nu), \quad \text{kde} \quad \nu \in I, \nu \neq x, x_0 \,.$$

Definice

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0. Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*.

Věta

Nechť funkce f má v nějakém bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

na intervalu I, $x_0 \in I$, právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ zbytků platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Věta

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a nechť existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in I$ platí $\left|f^{(n)}(x)\right| < k$. Pak pro $\forall x_0 \in I$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Maclaurinovy řady elementární funkcí

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, r = \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, r = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, r = \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, r = 1$$