# Aplikace Riemannova integrálu

## Jiné než geometrické

Petr Liška

Masarykova univerzita

09.04.2024

# Interpretace integrálu

## Spotřeba přírodních zdrojů

Odhaduje se, že světová spotřeba stříbra (v tisíci tunách) se řídí funkcí $f(t) = 21{,}4\mathrm{e}^{0{,}01t}$, kde $t$ značí počet let, které uběhnou od současnosti. Celkové zásoby stříbra se odhaduji na 400 000 tun. Odhadněte, kdy tyto zásoby stříbra dojdou.

## Množství semen

Hustota semen kolem rodičovského stromu je

$$D(r) = D_0 \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{a^2}},$$

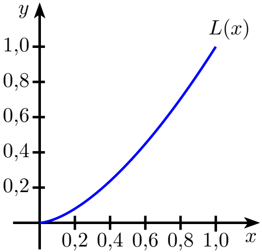
kde $r$ je vzdálenost od stromu. Určete počet semen do vzdálenost $R$ od stromu.

# Lorenzova křivka a Giniho index

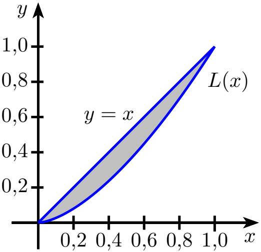
Pro měření nerovnosti ekonomové počítají jaká část celkového příjmu je získána nejchudšími dvaceti procenty populace, nejchudšími čtyřiceti procenty populace atd. Například pro Českou republiku v roce 2018 tato data vypadala takto

| část populace | část příjmů |
|---|---|
| 0,2 | 0,102 |
| 0,4 | 0,249 |
| 0,6 | 0,426 |
| 0,8 | 0,646 |
| 1,0 | 1,000 |

Graficky tato data reprezentuje tzv. *Lorenzova křivka* $L(x)$, která udává, jaká část celkového příjmu je získána nejchudší částí $x$ populace. Pro naše data je její přibližná rovnice $L(x) = x^{1,57}$.



Absolutní rovnost příjmů znamená, že všichni vydělávají stejně, tj. dolních 10 % získá 10 % všech příjmů, dolních 20 % získá 20 % všech příjmů atd. Lorenzova křivka v tomto případě je tedy graf lineární funkce $y = x$.
Ke změření nerovnosti spočítáme obsah oblasti mezi aktuální Lorenzovou křivkou $L(x)$ a její ideální verzí $y = x$ a tento výsledek vynásobíme dvěma, abychom dostali číslo mezi 0 (absolutní rovnost) a 1 (absolutní nerovnost). Tomutu číslu se říká *Giniho index*.




Matematicky tedy definujeme Giniho index jako

$$GI = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro Českou republiku dostaneme

$$GI = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x = GI = 2\int_0^1 \left(x - x^{1{,}57}\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2{,}57}}{2{,}57}\right]_0^1 = 0{,}22\,.$$

# Těžiště rovinného obrazce

## Věta

*Nechť $f$ je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$ a $M$ je množina tvořená jejím podgrafem. Je-li množina $M$ pokrytá rovnoměrně hmotou o konstantní hustotě, potom těžištěm množiny $M$ je bod $T$ o souřadnicích $[\bar{x}, \bar{y}]$, kde*

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

## Věta (Pappova-Guldinova)

*Nechť $\mathcal{R}$ je část roviny o obsahu $A$, která leží celá v jedné polorovině určené přímkou $l$. Objem tělesa, které vznikne rotací množiny $\mathcal{R}$ kolem přímky $l$, je roven součinu obsahu $A$ a vzdálenosti $d$, kterou urazí těžiště množiny $\mathcal{R}$.*