Odsud až do nekonečna

Nevlastní integrál

Petr Liška

Masarykova univerzita

09.04.2024

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, \infty)$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a$. Definujme funkci F na intervalu $[a, \infty)$ vztahem

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

Několik poznámek

- Je-li limita $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ nevlastní, říkáme, že integrál určitě diverguje. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že integrál osciluje.
- Nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \in \mathbb{R}$, definujeme analogicky

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int\limits_{c}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- Je-li funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ a integrovatelná na každém omezeném intervalu, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ konvergují oba nevlastní integrály $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. V tomto případě klademe

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Prosté srovnávací kritérium

Věta

Nechť funkce f, g *splňují pro* $x \in [a, \infty)$ *nerovnosti* $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

(i) Konverguje-li integrál $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *konverguje i integrál* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$0 \leq \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) Diverguje-li integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *diverguje i integrál* $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

Limitní srovnávací kritérium

Věta

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a, \infty)$ a nechť existuje

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

(i) Je-li $L < \infty$ a konverguje-li integrál $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje i integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Je-li $L > 0$ a diverguje-li integrál $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje i integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f, jestliže f je ohraničená na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$, kde $0 < \varepsilon < b - a$, není ohraničená na intervalu $[b - \varepsilon, b]$ a je integrovatelná na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Nechť funkce F je definovaná na intervalu $[a, b)$ předpisem $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x \to b^-} F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$, říkáme, že integrál diverguje.