

Riemannův integrál

Konečně!

Petr Liška

Masarykova univerzita

12.03.2024

19.03.2024

Dělení intervalu

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Dělením* intervalu $[a, b]$ rozumíme každou konečnou množinu $D \subseteq [a, b]$ navzájem různých bodů takovou, že $a, b \in D$.

- $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- x_k – dělicí body
- $[x_{k-1}, x_k]$ – dělicí intervaly
- $\nu(D) = \max \{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$ – norma dělení
- $\mathcal{D}([a, b])$ – množina všech dělení intervalu

Dolní/horní součet

Definice

Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$. Označme

$$m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

pro $k = 1, \dots, n$. Položme

$$s(D, f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S(D, f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Číslo $s(D, f)$ nazýváme *dolní součet* a číslo $S(D, f)$ nazýváme *horní součet* funkce f při dělení D .

Věta

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$ a necht' $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq f(x) \leq d$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak pro libovolná dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}([a, b])$ platí

$$c(b - a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq d(b - a).$$

Dolní/horní integrál

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Pak klademe

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \sup \{s(D, f) : D \in \mathcal{D}([a, b])\},$$

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \inf \{S(D, f) : D \in \mathcal{D}([a, b])\}.$$

Číslo $\int_{\bar{a}}^b f(x) dx$ nazýváme *dolním integrálem*, číslo $\int_a^{\bar{b}} f(x) dx$ *horním integrálem* funkce f přes interval $[a, b]$.

Riemannův integrál

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Jestliže platí rovnost

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx,$$

řekneme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $[a, b]$. V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál* přes interval $[a, b]$ vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx.$$

Platí-li $\int_{\bar{a}}^b f(x) dx < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$, říkáme, že funkce f *není integrovatelná* na $[a, b]$.

Alternativní (Riemannův) přístup

Definice

Posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme *nulovou* posloupnost dělení, jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$.

Definice

Nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a nechť $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ je libovolné číslo pro $k = 1, \dots, n$. Množinu $V = \{c_1, \dots, c_n\}$ nazveme *výběrem reprezentantů dělení D* .

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$, zvolme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$ a výběr reprezentantů $V = \{c_1, \dots, c_n\}$ tohoto dělení. Číslo

$$i(D, f, V) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

nazýváme *integrálním součtem* funkce f při dělení D a výběru V .

Lemma

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Pak pro každé dělení $D \in \mathcal{D}([a, b])$ a každý výběr V při dělení D platí

$$s(D, f) \leq i(D, f, V) \leq S(D, f).$$

Definice

Nechť f je ohraničená funkce. Řekneme, že f je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná, jestliže existuje číslo I takové, že

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} i(D, f, V) = I$$

a hodnota této limity nezávisí na výběru reprezentantů V dělení D , tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení D s normou $\nu(D) < \delta$ a libovolný výběr reprezentantů dělení D platí

$$|i(D, f, V) - I| < \varepsilon.$$

Pak definujeme

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Kdy je funkce integrovatelná?

Lemma

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Pak je f integrovatelná na $[a, b]$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D \in \mathcal{D}([a, b])$ tak, že platí

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Věta

Nechť funkce f je monotónní na intervalu $[a, b]$. Pak je f na intervalu $[a, b]$ integrovatelná.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak je f na intervalu $[a, b]$ integrovatelná.

Věta

Nechť f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a má na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti, pak je f na intervalu $[a, b]$ integrovatelná.

Věta

Nechť funkce f , g jsou ohraničené na intervalu $[a, b]$ a liší se na tomto intervalu pouze v konečném počtu bodů. Pak je f integrovatelná na $[a, b]$, právě když je zde integrovatelná funkce g a platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx .$$

Základní vlastnosti Riemannova integrálu

Věta

Nechť f je integrovatelná na $[a, b]$.

- Nechť $c, d \in \mathbb{R}$ a $c \leq f(x) \leq d$ pro $\forall x \in [a, b]$. Pak platí*

$$c(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq d(b - a).$$

- Je-li $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, pak $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.*
- Funkce $|f|$ je integrovatelná na $[a, b]$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Věta

Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na $[a, b]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $\alpha f + \beta g$ je integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx .$$

Věta

Nechť f, g jsou integrovatelné na $[a, b]$ a platí $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in [a, b]$. Pak je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

Věta

Nechť funkce f je integrovatelná na $[a, b]$ a necht' $[c, d] \subseteq [a, b]$. Pak je f integrovatelná i na intervalu $[c, d]$.

Věta

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ a f je integrovatelná na každém z intervalů $[a, c]$ a $[c, b]$. Pak je f integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Střední hodnota funkce

Věta

Nechť f je integrovatelná na $[a, b]$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \leq c \leq \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

a platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = c(b - a).$$

Je-li f navíc spojitá na $[a, b]$, pak existuje $x_0 \in [a, b]$ tak, že $c = f(x_0)$.

Číslo

$$c = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Integrál jako funkce horní meze

Nechť funkce f je integrovatelná na $[a, b]$, pak je integrovatelná na intervalu $[a, x]$, kde $a < x \leq b$. Můžeme tedy definovat funkci F na intervalu $(a, b]$ předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (\star)$$

Tuto definici můžeme rozšířit i na bod a tak, že položíme $F(a) = 0$ kdykoliv, kdy je funkce f v bodě a definovaná.

Věta

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak je funkce F definovaná předpisem (\star) spojitá na intervalu $[a, b]$.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce F definovaná vztahem (\star) má derivaci na intervalu $[a, b]$ a platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, přičemž v krajních bodech tohoto intervalu se zde rozumí existence příslušných derivací.

Konečně!

Věta (Newtonova-Leibnizova formule)

Nechť f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a necht' F je funkce, která je na $[a, b]$ spojitá a na (a, b) primitivní k funkci f . Pak platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Metody výpočtu určitého integrálu

Věta (Metoda per-partes pro určité integrály)

Nechť funkce u a v mají derivaci na intervalu $[a, b]$ a necht' funkce u' a v' jsou integrovatelné na $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx .$$

Věta (Substituční metoda pro určité integrály)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[c, d]$. Necht' funkce φ má derivaci na intervalu $[a, b]$, která (ta derivace) je na tomto intervalu integrovatelná a necht' $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt .$$

Numerická integrace

Lichoběžníkové pravidlo

Nechť je funkce $f \in C[a, b]$. Rozdělme interval na n subintervalů délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě x_0, x_1, \dots, x_n a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě y_0, y_1, \dots, y_n . Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Simpsonovo pravidlo

Nechť je funkce $f \in C[a, b]$. Rozdělme interval na $n = 2k$ subintervalů délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě x_0, \dots, x_n a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě y_0, \dots, y_n . Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$