Matematická analýza 4

Diferenční rovnice

Petr Liška

Masarykova univerzita

17.04.2023

Lineární diferenční rovnice 1. řádu

Definice

Nechť $p(n)$ a $r(n)$ jsou posloupnosti, přičemž $p(n) \neq 0$ pro všechna n. Rovnici tvaru

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n). \tag{1}$$

nazýváme *lineární diferenční rovnice prvního řádu*. Je-li $r(n) \equiv 0$, nazývá se rovnice

$$y(n+1) - p(n)y(n) = 0. \tag{2}$$

homogenní.
Řešením rovnice (1) rozumíme posloupnost $y(n) = a(n)$ takovou, že

$$a(n+1) - p(n)a(n) = r(n)\,.$$

Obecným řešením rovnice (1) rozumíme posloupnost, která je řešením dané rovnice a závisí na konstantě c.

Věta

Nechť posloupnost $y = a(n)$ je řešením rovnice (2), *pak také posloupnost $y = c \cdot a(n)$, $c \in \mathbb{R}$, je řešením rovnice* (2).

Věta

Nechť $p(n) \neq 0$. Je-li $n \geq 1$, pak řešením rovnice (2) *je posloupnost*

$$u(n) = u(1) \prod_{k=1}^{n-1} p(k)\,. \tag{3}$$

Věta

Nechť $p(n) \neq 0$. Potom všechna řešení rovnice (1) *jsou tvaru*

$$y(n) = u(n) \left[\sum \frac{r(n)}{u(n+1)} + c \right],$$

kde $c \in \mathbb{R}$ a $u(n)$ je posloupnost daná (3).

Lineární diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice

Diferenční rovnici tvaru

$$a_0y(n) + a_1y(n+1) + \cdots + a_ky(n+k) = u(n) \tag{4}$$

kde $u(n)$ je libovolná posloupnost, $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, k$, $a_0 \neq 0$, nazýváme *lineární diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty*. Je-li $u(n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že rovnice

$$a_0y(n) + a_1y(n+1) + \cdots + a_ky(n+k) = 0 \tag{5}$$

je homogenní.

Věta

Nechť $\varphi_1(n)$ a $\varphi_2(n)$ jsou řešení rovnice (5) a nechť c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ libovolně. Pak $y(n) = c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n)$ je také řešení rovnice (5).

Definice

Řekneme, že posloupnosti $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \dots, \varphi_k(n)$ jsou *lineární závislé* v $\mathbb{N}$, jestliže existuje alespoň jedna konstanta $c_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, k$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je splněna rovnice

$$c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n) + \cdots + c_k\varphi_k(n) = 0\,.$$

V opačném případě řekneme, že posloupnosti $\varphi_1(n), \dots, \varphi_k(n)$ jsou *lineárné nezávislé* v $\mathbb{N}$.

Definice

Říkáme, že posloupnosti $\varphi_1(n), \dots \varphi_k(n)$, které jsou partikulárním řešením rovnice (5), tvoří *fundamentální systém řešení*, jestliže posloupnosti $\varphi_1(n), \dots \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{N}$.

Věta

Posloupnosti $\varphi_1(n), \dots \varphi_k(n)$ *jsou lineárně nezávislé v* $\mathbb{N}$ *právě tehdy, když existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že*

$$C = \begin{vmatrix} \varphi_1(n_0) & \varphi_2(n_0) & \cdots & \varphi_k(n_0) \\ \varphi_1(n_0+1) & \varphi_2(n_0+1) & \cdots & \varphi_k(n_0+1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(n_0+k-1) & \varphi_2(n_0+k-1) & \cdots & \varphi_k(n_0+k-1) \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Věta

Nechť posloupnosti $\varphi_1(n), \dots \varphi_k(n)$ *tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (5) *v* $\mathbb{N}$. *Pak obecné řešení rovnice* (5) *je tvaru*

$$y(n) = c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n) + \cdots + c_k\varphi_k(n),$$

kde $c_1,\, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Definice

Algebraickou rovnici

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k = 0 \tag{6}$$

nazýváme *charakteristickou rovnicí* diferenční rovnice (5).

Věta

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, *kde* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, *jsou kořeny rovnice* (6). *Pak rovnice* (5) *má v* $\mathbb{N}$ *obecné řešení*

$$y(n) = c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n) + \cdots + c_k\varphi_k(n)\,,$$

kde $c_1,\ c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Věta

Nechť má rovnice (6) *imaginární kořeny* $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i\sin\omega)$. *Pak má rovnice* (5) *lineárně nezávislá partikulární řešení*

$$\varphi_1(n) = r^n \cos\omega n, \qquad \varphi_2(n) = r^n \sin\omega n\,.$$

Věta

Nechť má charakteristická rovnice (6) s*-násobný kořen* λ_1, $1 \le s \le k$. *Pak rovnice* (5) *tato lineárně nezávislá partikulární řešení*

$$\varphi_1(n) = \lambda_1^n, \quad \varphi_1(n) = n\lambda_1^n, \quad \dots, \quad \varphi_1(n) = n^{s-1}\lambda_1^n.$$

Věta

Nechť $y(n)$ je obecné řešené rovnice (5) a $z(n)$ je partikulární řešení rovnice (4). Potom posloupnost $y(n)+z(n)$ je obecné řešení rovnice (4).

Věta

Nechť $u(n) = P_m(n)q^n \cos \alpha n$ v rovnici (4), kde $P_m(n)$ je polynom stupně m.

1. *Nechť má rovnice (6) kořeny $\lambda_j \neq q(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Pak je partikulárním řešením rovnice (4) posloupnost*

$$z(n) = [Q_m(n) \sin \alpha n + R_m(n) \cos \alpha n]\, q^n,$$

   kde $Q_m(n)$ a $R_m(n)$ jsou jisté polynomy stupně m.

2. *Nechť má rovnice (6) některý kořen $\lambda_j = q(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a to s-násobný. Pak je partikulárním řešením rovnice (4) posloupnost*

$$z(n) = n^s \,[Q_m(n) \sin \alpha n + R_m(n) \cos \alpha n]\, q^n,$$

   kde $Q_m(n)$ a $R_m(n)$ jsou jisté polynomy stupně m.