PRACOVNÍ LIST 1 – VEKTOROVÉ PROSTORY

CÍL: POROZUMĚT VÝBĚRU AXIOMŮ V DEFINICI VEKTOROVÉHO PROSTORU, VYTVOŘIT SI GRAFICKOU PŘEDSTAVU PROJMU VEKTOROVÝ PODPROSTOR V NÁZORNÉ ROVINĚ A PROSTORU. PODOBNĚ S OSTATNÍMI POJMY NÍŽE. VYMYSLET NÁVODY, JAK ZOBECNIT POSTUP FUNGUJÍCÍ V ROVINĚ NA OBECNÉ VEKTOROVÉ PROSTORY.

POJMY: VEKTOROVÝ PROSTOR, VEKTOROVÝ PODPROSTOR, LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ, LINEÁRNÍ OBAL VEKTORŮ, LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ - PROPEDEUTIKA

SKRIPTA: KAPITOLA 1: §1. VEKTOROVÉ PROSTORY, PODPROSTORY

ÚKOL 1: OPERACE

Jaké dvě základní operace definujeme na množině reálných čísel? Jakou algebraickou strukturu tak vytvářejí?

Nápověda: Doplň chybějící znaky pro algebraické operace: $1 \quad 3 = 4, 3 \quad 6 = 18$.

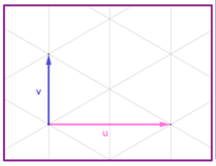
Proč nepotřebujeme algebraické operace čtyři? Které by to mohly být? Vysvětli, jak pomocí dvou základních operací chápeš zápis

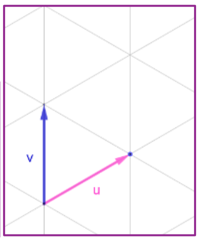
$4 - 2 = 2$ a $8:4 = 2$.

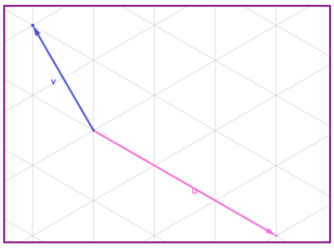
ÚKOL 2: VEKTOROVÝ PROSTOR

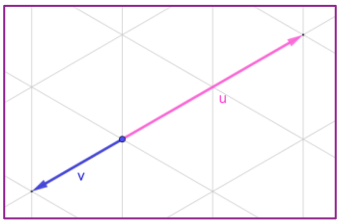
Pracujme nyní s vektory v rovině a s prostorem$\mathbb{R}_2[x]$ (prostor všech polynomů stupně nejvýše dva). Jaké algebraické operace definujeme na množině všech vektorů v rovině? Bude to stejn0 v prostoru $\mathbb{R}_2[x]$? Existují nějaká pravidla pro operaci mezi vektorem a reálným číslem? Umíme takovou operaci provádět? Na odpovědi přijdeš vyřešením následujících úkolů.

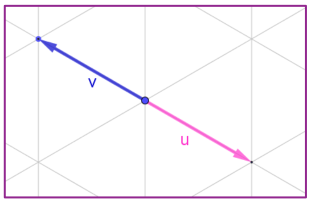
1. Sečti $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Jaký objekt vznikne? Vektor? Číslo? Zapiš vždy k výsledku.

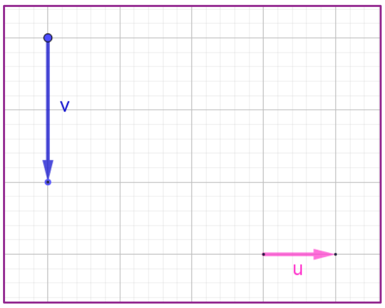


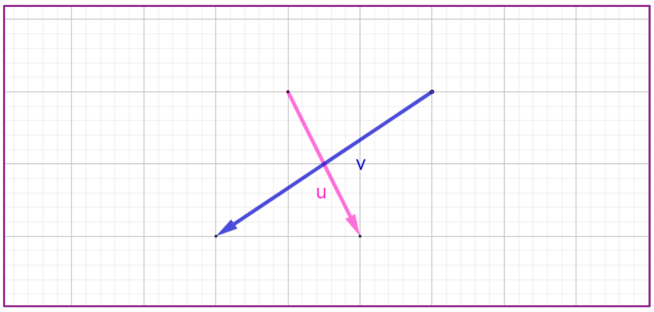








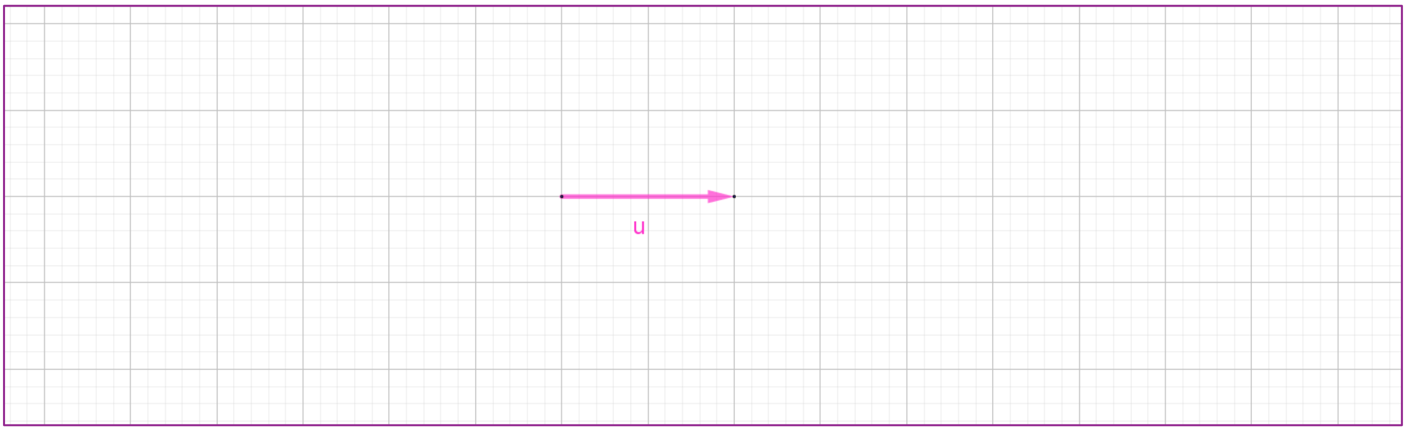




1. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$:
   a) $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = 2x$ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} =$ ... je to ___________.
   b) $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = x + 1$
   c) $\boldsymbol{u} = x^2 + 1, \boldsymbol{v} = 2x^2 + 2$
   d) $\boldsymbol{u} = x + 1, \boldsymbol{v} = -x - 1$
   e) $\boldsymbol{u} = 4, \boldsymbol{v} = 6$

2. Proveď následující operaci ve tvaru $t \cdot \boldsymbol{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{u}$ je vektor. Jaký objekt vznikne? Vektor? Číslo? Zapiš. Jaké objekty spolu násobíme? Doplň: Součin ___________ s ___________ je ____________

f) $2\boldsymbol{u}, -3\boldsymbol{u}, 0{,}5\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{u}, 0 \cdot \boldsymbol{u}$ pro



g) $2\boldsymbol{u}, -3\boldsymbol{u}, 0{,}5\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{u}, 0 \cdot \boldsymbol{u}$ pro $\boldsymbol{u} = 4x^2 + 2x - 1$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_2[x]$)

3. Doplň vymazaná místa definice vektorového prostoru, která zadává pravidla operaci tvaru $t \cdot \boldsymbol{u}$ (součinu čísla s vektorem).

Definice.
Nechť V je komutativní grupa (jejíž prvky nazýváme) a T je číselné těleso. Nechť pro každé číslo $t \in T$ a každý vektor $\boldsymbol{u} \in$ je definován vektor $t \cdot \boldsymbol{u} \in$ tak, že pro libovolné $t, s \in T$ a $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ platí:

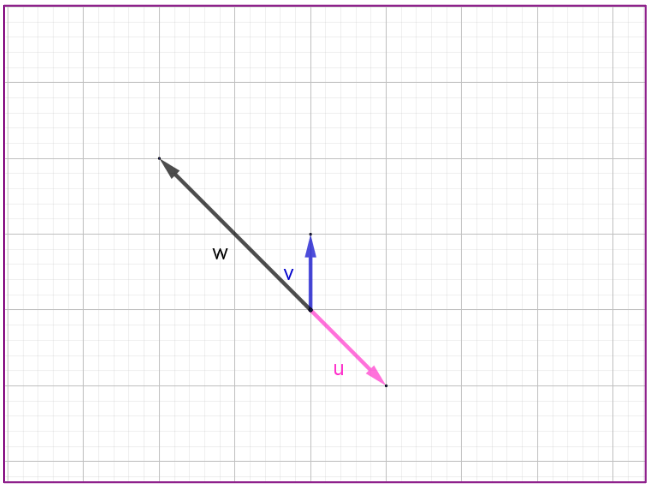
1. $t \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = t \cdot \boldsymbol{u} +$
2. $(t + s) \cdot \boldsymbol{u} = \quad + \quad ,$
3. $(t \cdot s) \cdot \boldsymbol{u} = \quad \cdot (\quad \cdot \quad),$
4. $\quad \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Potom V se nazývá *vektorový prostor nad tělesem* T.

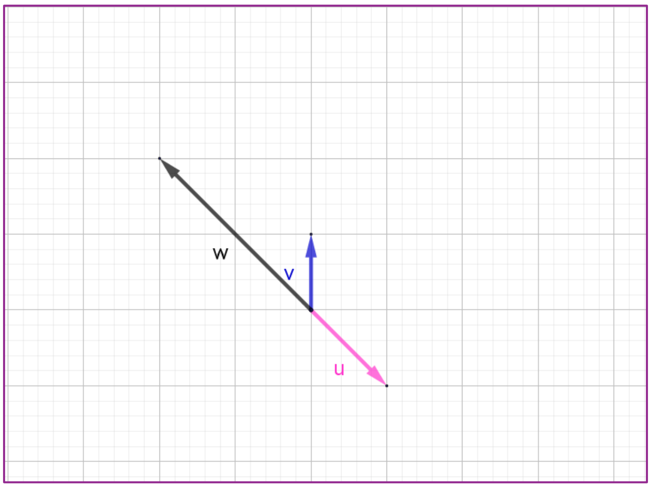
ÚKOL 3: LINEÁRNÍ KOMBINACE

Proveď lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ se zadanými koeficienty, koeficienty vypiš. Jaký objekt je výsledkem? Vektor? Číslo?

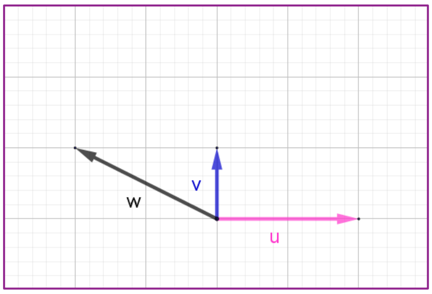
a. $2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ ... koeficient u vektoru $\boldsymbol{u}$ je ___, u vektoru ____



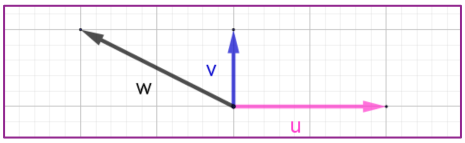
nebo



b. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ ... koeficienty:



c. $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$

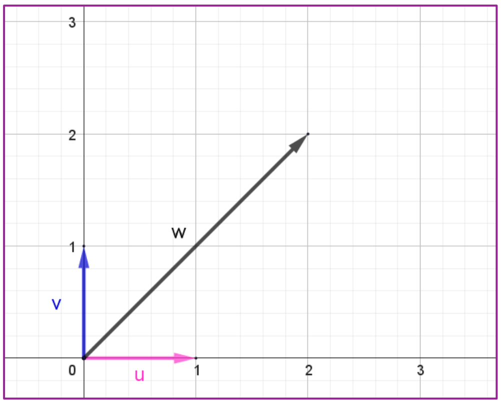


... není místo? Potřebuješ ho?

4. Zapiš vektor $\boldsymbol{w}$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

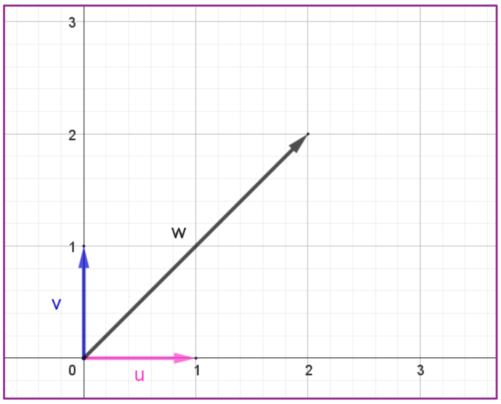
$\boldsymbol{w}=$

Zkouška pomocí souřadnic:

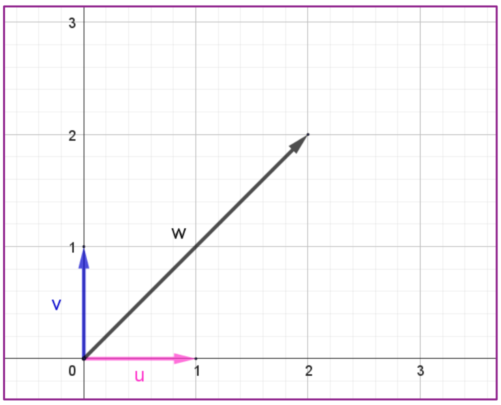


5. Zapiš vektor $\boldsymbol{u}$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$.

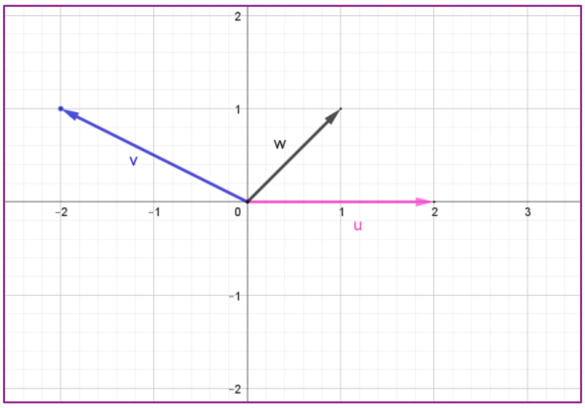
$\boldsymbol{u}=$



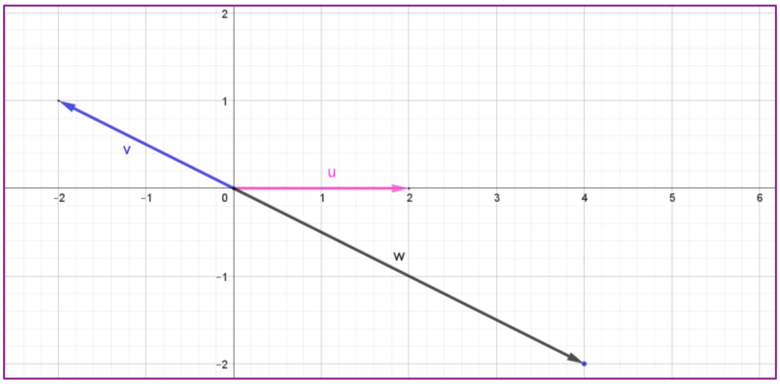
6. Zapiš vektor $\boldsymbol{v}$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{w}$.



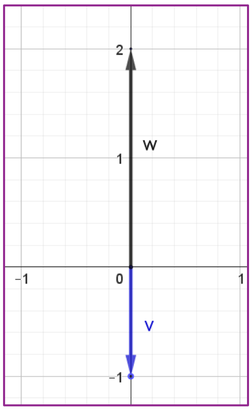
7. Zapiš vektor $\boldsymbol{u}$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$. Koeficienty lineární kombinace najdi přesně. Kolik existuje řešení této úlohy?

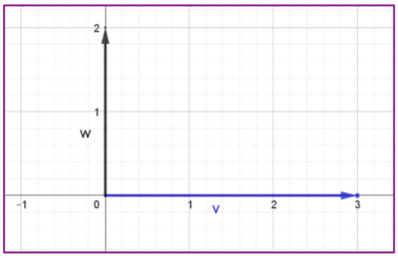


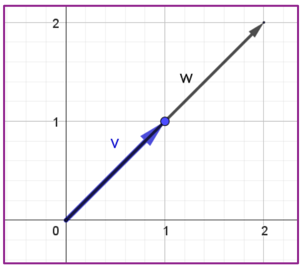
8. Zapiš vektor $\boldsymbol{u}$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$. Koeficienty lineární kombinace najdi přesně.



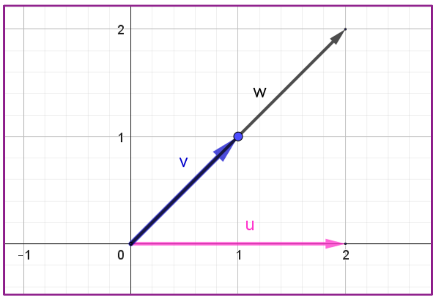
9. Zapiš vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ (nulový vektor) jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$. Koeficienty lineární kombinace najdi přesně. Kolik existuje řešení této úlohy?

a) 

b) 

c) 

10. Zapiš vektor $\boldsymbol{o}$ (nulový vektor) jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$. Koeficienty lineární kombinace najdi přesně. Kolik existuje řešení této úlohy?

a) 

b) V $\mathbb{R}_2[x]$:

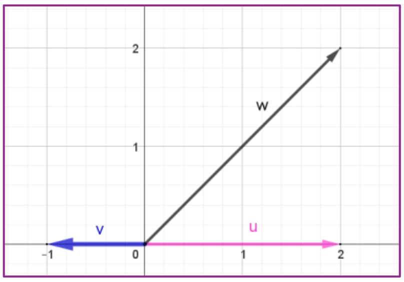
I. $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = 3x^2, \boldsymbol{w} = x + 1$

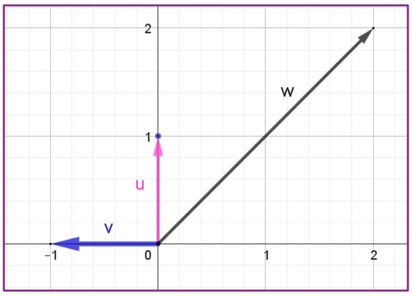
II. $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = -x^2, \boldsymbol{w} = 0$

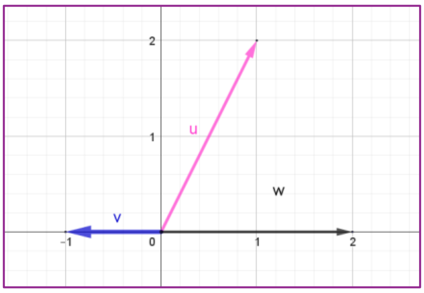
III. $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = 2x, \boldsymbol{w} = 6$

IV. $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = -3x, \boldsymbol{w} = x^2 + 2x + 1$

11. Rozhodni, zda $\boldsymbol{u} \in L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$. $L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ je lineární obal vektorů $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, tj. množina všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Svou odpověď zdůvodni a dokaž. Pomůže ti, pokud nejprve určíš, co lineárním obalem je (stačí načrtnout).

a. 

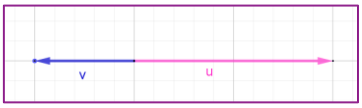
b. 

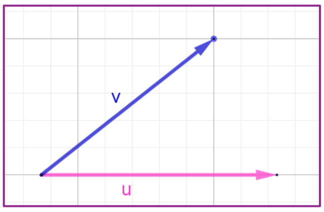
c. 

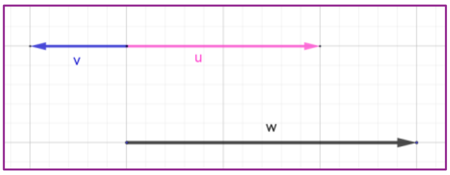
d. $\boldsymbol{u} = 3x^2 + 7x + 9, \boldsymbol{v} = x^2 + x + 2, \boldsymbol{w} = x + 3$

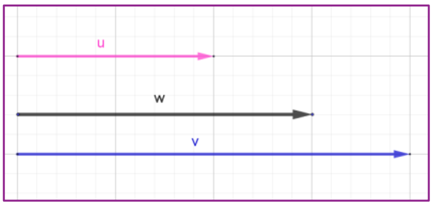
e. $\boldsymbol{u} = 3x^2 + 7x + 9, \boldsymbol{v} = x^2 + x + 1, \boldsymbol{w} = x + 3$

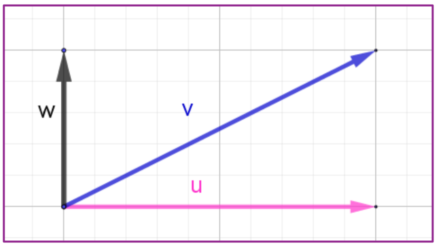
12. **HÁDEJ**, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ (podle zadání) **lineárně závislé** nebo **nezávislé**.
POTOM se pokus vytvořit jejich lineární kombinaci takovou, aby vznikl nulový vektor NEBO se pokus jeden z vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Koeficienty lineární kombinace najdi přesně, rozhodni, zda existují jednoznačně nebo zda má úloha více řešení (nezapomeň na samé nuly). Pokus se vyslovit vlastní definici lineární závislosti a nezávislosti vektorů.

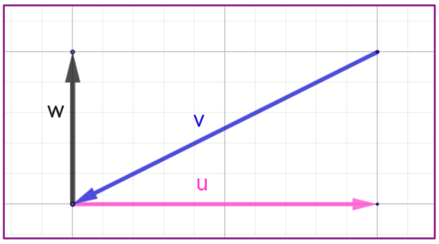
a) 

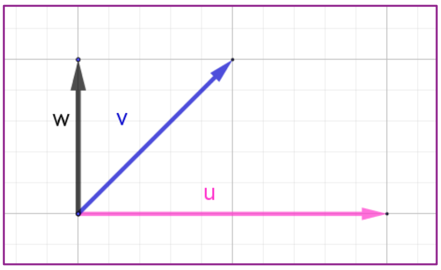
b) 

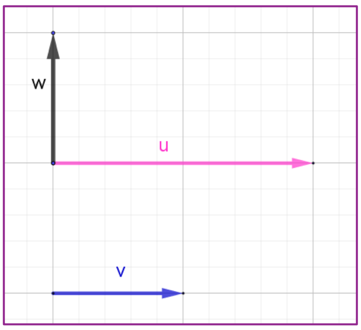
c) 

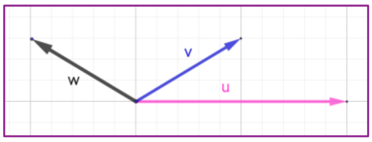
d) 

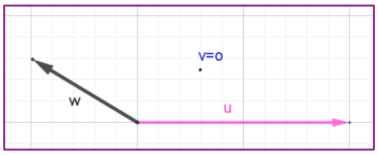
e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

j) 

k) $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (0,1,0), \boldsymbol{w} = (2,2,0)$
l) $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (0,1,0), \boldsymbol{w} = (2,2,2)$
m) $\boldsymbol{u} = (1,1,0), \boldsymbol{v} = (-1,1,0), \boldsymbol{w} = (2,2,0)$
n) $\boldsymbol{u} = (1,1,0), \boldsymbol{v} = (2,-3,0), \boldsymbol{w} = (2,2,0)$
o) $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (0,1,0), \boldsymbol{w} = (0,0,3)$
p) $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{v} = (0,1,0), \boldsymbol{w} = (6,4,3)$
q) $\boldsymbol{u} = (1,2,3), \boldsymbol{v} = (4,1,0), \boldsymbol{w} = (0,0,5)$
r) $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = x, \boldsymbol{w} = 2x^2 + 2x$
s) $\boldsymbol{u} = x^2, \boldsymbol{v} = x, \boldsymbol{w} = 2x^2 + 2x + 2$
t) $\boldsymbol{u} = x^2 + x, \boldsymbol{v} = x, \boldsymbol{w} = 2x^2 + 2x + 2$
u) $\boldsymbol{u} = x^2 + x, \boldsymbol{v} = 2x^2 - 3x, \boldsymbol{w} = 2x^2 + 2x$
v) $\boldsymbol{u} = x^2 + 2x + 3, \boldsymbol{v} = 4x^2 + x, \boldsymbol{w} = 5$