6A: Uveďte příklad reálné matice A splňující $A^3 = O$, ale $A^2 \neq O$ (symbol O označuje nulovou matici). Pokud taková matice neexistuje, zdůvodněte.

Řešení: Jedná se o tzv. *nilpotentní matici* (tj. matice splňující $A^k = O$ pro nějaké přirozené číslo k. Číslo k, pro které $A^k = O$, ale $A^{k-1} \neq O$ pak nazýváme *stupeň nilpotence*). Hledáme tedy nilpotentní matici stupně tři (v pokročilejším kurzu algebry se dozvíte, že musí být alespoň řádu tři nebo vyššího). Takovou maticí je například

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matic existuje nekonečně mnoho (pro třetí řád jsou to právě všechny matice, které získáme jako TAT^{-1}, kde T je regulární.

Jak bylo možné postupovat bez znalosti odpovídající teorie? Stačilo si položit otázku: **Které lineární zobrazení ve vektorovém prostoru bude nulové, když jej aplikujeme třikrát po sobě, a přitom nebude nulové po dvou působeních?** Je to například derivace plynomu druhého stupně:

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b, \quad (2ax + b)' = 2a, \quad (2a)' = 0,$$

které je reprezentováno maticovým násobením

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matice vystupující v předchozím výpočtu opět splňuje předpoklady zadání.

6B: Uveďte příklad reálné matice splňující $A^4 = I$, ale $A^2 \neq I$ (symbol I označuje jednotkovou matici). Pokud taková matice neexistuje, stručně zdůvodněte.

Řešení: Opět si stačilo položit otázku: **Které lineární zobrazení ve vektorovém prostoru vede po čtyřech opakováních**

k identitě, ale není identitou po dvou opakováních? Můžeme vzít například otočení o devadesát stupňů v dourozměrném euklidovském prostoru, tj. po dosazení do matice rotace odpovídající úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

získáme příklad splňující zadání (opět takových matic existuje nekonečně mnoho).

6C: Uveďte příklad reálných matic A a B, pro které platí $h(AB) = 0$, $h(BA) = 2$ (písmeno h označuje hodnost). Pokud takové matice neexistují, stručně zdůvodněte.

Řešení: Dokázat, že čtvercové matice druhého řádu splňující výše uvedené neexistují, zvládnete jistě všichni snadno (například z Cauchyovy věty o součinu determinantů). Musíme tedy hledat u matic větších rozměrů (tady je příklad):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice mohou být i čtvercové řádu čtyři — stačí doplnit první matici dvěma nulovými řádky a druhou dvěma nulovými sloupci.

Pokud jste úlohy nevyřešili, nic si z toho nedělejte — i když teď vidíte, jak jednoduché to mohlo být, nevyřešil je žádný ze dvou generací studentů fyziky, kterým byly zadány, a nevyřešila je ani umělá inteligence:-).