Goniometrické vzorce a rovnice - návody

2. Ze vzorce pro rozdíl sinů je $\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha = 2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$, ze zadané rovnosti $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = 0$ plyne $\cos(\alpha+\beta) = 0$.

3. K levé straně uplatnit vzorce pro kosinus součtu a sinus rozdílu, na pravé straně roznásobit a porovnat obě upravené strany.

4. Danou rovnost $\sin\alpha = k\sin(\alpha+\beta)$ upravit na $\sin\alpha(1-k\cos\beta) = k\cos\alpha\sin\beta$. Protože podle zadání je $1-k\cos\beta > 0$, plyne z upravené rovnosti $\cos\alpha \neq 0$, a tak existuje hodnota

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k\sin\beta}{1-k\cos\beta}.$$

Podle zadání existuje i hodnota $\operatorname{tg}\beta$ a výpočtem se přesvědčíme, že $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 0$. Proto je možné k určení hodnoty $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ použít vzorec pro tangens součtu.

5. Substituce $y = \sin x$.

6. Využít identitu $\sin x+\sin 3x = 2\sin 2x\cos x$ a pak upravit rovnici na součinový tvar.

7. Využít identitu $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ a pak upravit rovnici na součinový tvar.

8. Užitím vzorce pro sinus rozdílu upravit na $\sqrt{3}(\sin x-\cos x) = 0$.

9. Upravit na $\sin 2x-\operatorname{tg}x = 1-\cos 2x$, kde pravá strana je $2\sin^2 x$, a levá strana je rovna

$$2\sin x\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot(2\cos^2 x-1) = \frac{\sin x}{\cos x}\cos 2x.$$

Dále rozlišit případy, kdy $\sin x = 0$ a kdy $\sin x \neq 0$, ve druhém z nich z upravené rovnice plyne $\cos 2x = \sin 2x$ neboli $\operatorname{tg} 2x = 1$.

10. Levá strana je $1-\sin 2x$, takže rovnici lze upravit do tvaru $1+\operatorname{tg}x = 2\sin x(\sin x+\cos x)$, po záměně $\operatorname{tg}x$ za $\sin x/\cos x$ dostaneme na obou stranách stejný činitel $\sin x+\cos x$.

11. Levou stranu upravit na součin $2\cos x(5\sin x-3)$ a rozlišit, zda je společný činitel $(5\sin x-3)$ obou stran roven nule, či nikoli.

12. Levou stranu upravit na podíl $\cos 5x/\sin 3x$.

13. Využít identitu

$$(\operatorname{cotg}x-1)(1+\operatorname{tg}x) = \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}.$$

14. Využít identitu $2\cos^2 3x-1 = \cos 6x$.

15. Rovnici upravíme do tvaru $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$ a pak použijeme vzorec pro rozdíl dvou sinů.

16. $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$

17. Při substituci $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{10}\right)$ je $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 2y^2 - 1.$