Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

- Mocnina a^x je definována v těchto případech:

  (i) $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{N}$,

  (ii) $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $x \in \mathbb{Z}$,

  (iii) $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^+$,

  (iv) $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

- Základní vlastnosti mocnin:

$$a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad (a^x = a^y \iff (a = 1 \vee x = y)).$$

- Číslo $x = \log_a b$ definujeme vztahem $a^x = b$ pro všechna $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a $b \in \mathbb{R}^+$. Místo $\log_{10} a$ píšeme pouze $\log a$ a místo $\log_e a$ píšeme $\ln a$.

- Základní vlastnosti logaritmů:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1;$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y; \quad \log_a (x^y) = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x; \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad b^{\log_a c} = c^{\log_a b}.$$

- *Exponenciální* funkcí rozumíme libovolnou funkci f tvaru $f(x) = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Platí $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}^+$. Exponenciální funkce je pro $a \in (0;1)$ *klesající*, pro $a > 1$ *rostoucí*. To znamená, že každá exponenciální funkce je *prostá*, a proto k ní existuje funkce *inverzní*. Exponenciální funkce není *sudá*, *lichá* ani *periodická*.

- *Logaritmickou* funkcí rozumíme libovolnou funkci g tvaru $g(x) = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Logaritmická funkce je *inverzní* funkcí k funkci exponenciální (tj. $g(x) = f^{-1}(x)$), to znamená, že pro stejné a jsou grafy funkcí f a g souměrné podle přímky $y = x$. Z uvedené skutečnosti vyplývají i další vlastnosti logaritmické funkce, tedy $D(g) = \mathbb{R}^+$, $H(g) = \mathbb{R}$, pro $a \in (0;1)$ je logaritmická funkce *klesající*, pro $a > 1$ *rostoucí*, logaritmická funkce není *sudá*, *lichá* ani *periodická*. Inverzní funkcí k logaritmické funkci je opět funkce exponenciální, tj. $f(x) = g^{-1}(x)$.

- Při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic lze v mnoha případech užít vhodné substituce a převést je na základní rovnici $a^x = b$, resp. $\log_a x = b$, nebo na základní nerovnici $a^x > b$, resp. $\log_a x > b$. U takových nerovnic využíváme následující pravidla:

  – je-li $a > 1$, pak

$$a^x < a^y \iff x < y; \quad \log_a x < \log_a y \iff x < y;$$

  – je-li $0 < a < 1$, pak

$$a^x < a^y \iff x > y; \quad \log_a x < \log_a y \iff x > y.$$

Úlohy:

1. Porovnejte čísla
$$\left(-\frac{49}{16}\right)^{160} \quad \text{a} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-320}.$$

2. Určete definiční obory následujících funkcí
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{2^x}{1 - \sqrt{\log_8 (x-1)^3}}.$$

3. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je funkce f definovaná předpisem
$$f(x) = \left(\frac{1 - a^2}{2 + a}\right)^x$$
klesající exponenciální funkcí.

4. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která nabývá funkce
$$f(x) = \log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{x - 3}$$
nezáporných hodnot.

5. Nechť jsou dány funkce
$$f_1 : \, y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \quad \text{a} \quad f_2 : \, y = 2^{x-2} - 5.$$
Do jednoho obrázku načrtněte věrně jejich grafy (vyznačte v nich důležité body, případné prvky souměrnosti, průsečíky se souřadnicovými osami) a určete jejich definiční obory a obory hodnot. Na základě těchto grafů najděte všechna řešení rovnice
$$\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = 2^{x-2} - 5.$$
Zdůvodněte přitom, proč má tato rovnice Vámi uváděný počet řešení.

6. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice
$$3^{-5x-1} = 81, \quad \frac{1}{2^{y-3}} = 1, \quad 10^{1-3z} = 5, \quad 2^{u+1} + 2^{u+2} = 96.$$

7. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice
$$2^{(x-4)\cdot\sqrt{x^2+x-6}} = 1, \quad 3^y - 2^y = 2^{y+1} + 3^{y-2}, \quad 4 \cdot 9^{\frac{1}{z}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{z}} = 5 \cdot 6^{\frac{1}{z}}.$$

8. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice
$$\log_5(6x + 1) = 2, \quad \log_{\frac{1}{2}} \log_3(1 + 20 \log_2 y) = -2, \quad \frac{2 \log 3z}{\log(2 - 7z)} = 1$$

9. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice
$$3 \log 2x^2 + 2 \log 3x^3 = 5 \log x + 2 \log 6x^3, \quad \log_2^2 y + 2 \log_2 y = 3, \quad \log_2 z - \log_4 z + \log_{16} z = \frac{3}{4}.$$

10. V $\mathbb{R}^2$ vyřešte soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \log x + \log y &= 2, & \sqrt[3]{5^u} \cdot \sqrt{3^v} &= 45, \\ 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} &= \sqrt{54}, & uv &= 12. \end{aligned}$$

11. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

$$2^x \cdot 4^x \le 64, \quad 25^y - 9 \cdot 5^y + 20 < 0, \quad 2^{\sqrt{z-6}} \le 8 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{4-\frac{z}{3}}}.$$

12. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) \ge -3, \quad \log_y 2 > 1, \quad \log z \cdot \log(z+1) \le 0, \quad \log^2_{\frac{1}{3}} u + \log_{\frac{1}{3}} u \ge 2.$$

Výsledky úloh:

1. $\left(-\frac{49}{16}\right)^{160} > \left(\frac{3}{5}\right)^{-320}$,
2. $D(f) = (-2;\infty) - \{1\}$, $D(g) = \langle 2;\infty) - \{3\}$ (návod: $0 \le \log_8 (x-1)^3 \ne 1$),
3. $a \in (-1;1)$ (návod: $0 < \frac{1-a^2}{2+a} < 1$),
4. $x \in \langle 8;\infty)$.
5. Protože f_1 je klesající funkce a f_2 naopak rostoucí funkce v celém svém definičním oboru, mohou se jejich grafy protnout nejvýše v jednom bodě. Na základě vlastností obou funkcí snadno najdeme x-ovou souřadnici jejich průsečíku, což je kořen řešené rovnice: $x = 4$.
6. $x = -1$, $y = 3$, $z = \frac{1-\log 5}{3}$, $u = 4$,
7. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$,
8. $x = 4$, $y = 16$, $z = \frac{2}{9}$,
9. $x = \frac{1}{2}$, $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{8}$, $z = 2$,
10. $x = \sqrt{10}$, $y = 10\sqrt{10}$, $u_1 = 3$, $v_1 = 4$, $u_2 = 6 \log_5 3$, $v_2 = 2 \log_3 5$,
11. $x \in (-\infty; 2\rangle$, $y \in (\log_5 4; 1)$, $z \in \{6\} \cup \langle 10;\infty)$,
12. $x \in (-2; 2\rangle$, $y \in (1;2)$, $z \in (0;1\rangle$, $u \in \left(0; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 9;\infty)$.