Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou [1]

Absolutní hodnota.

Definice. Absolutní hodnotu čísla $x \in \mathbb{R}$ značíme $|x|$ a definujeme

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}.$$

Poznámky.

1. Z definice absolutní hodnoty ihned plyne, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $|a| = |-a|$.
2. Protože druhou odmocninu definujeme jako nezáporné číslo, platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, že $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. Geometrický význam absolutní hodnoty:
   a) $|x|$ udává vzdálenost obrazu čísla x na číselné ose od jejího počátku,
   b) $|a - b|$ udává vzdálenost obrazů čísel a a b na číselné ose.

Základní vlastnosti. Pro všechna reálná čísla a, b platí:

1. $|a - b| = |b - a|$,
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, kde $b \neq 0$,
4. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost),
5. $|a \pm b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.

Důkaz.

1. Platí $a - b = -(b - a)$, proto mají čísla $a - b$ a $b - a$ stejné absolutní hodnoty.
2. Rozlišme čtyři případy:
   a) Pokud $a \geq 0$, $b \geq 0$, pak $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.
   b) Jestliže $a < 0$, $b \geq 0$, pak $|ab| = -ab = |a| \cdot |b|$.
   c) Když $a \geq 0$, $b < 0$, pak $|ab| = a(-b) = |a| \cdot |b|$.
   d) Je-li $a < 0$, $b < 0$, pak $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| \cdot |b|$.
3. Tvrzení dokážeme podobně jako v předchozí části.
4. Platí
   $$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 .$$
   Odmocněním pak dostaneme $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.
5. Analogicky platí
   $$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \geq |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = (|a| - |b|)^2 .$$
   Odmocněním tentokrát dostaneme $|a \pm b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.

---

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

Rovnice - zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

1. $$\left|x^7-15x+2\right|+\left|x^3-6\right|=-1\,,$$
2. $$|x-3|+2\left|x^2-3x\right|=0\,,$$
3. $$\left|-x^2\right|-\left|x^2+1\right|=2\,,$$
4. $$1-|3-x|=x-2\,,$$
5. $$3\,|x-1|+2\,|x-2|=x+10\,,$$
6. $$|3x-5|=2x+10\,,$$
7. $$2\,|4+3x|=6x-11\,,$$
8. $$|x+2|+|x-2|=2x+2\,,$$
9. $$2\,|x-3|-3\,|x+1|=|-x-1|\;,$$
10. $$\left|x^2+3x-4\right|=6\,,$$
11. $$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+2x+1}=6-x\,,$$
12. $$\sqrt{x^2}+x=4\,,$$
13. $$||2x+5|+x-4|=2\,,$$
14. $$||x-1|+2x-4|=5\,,$$
15. $$|x+2-2\,|1-x||=3\,,$$
16. $$|x+4-3\,|x-2||=2\,,$$
17. $$|x+5-3\,|x+3||=2\,,$$
18. $$|3x-1-2\,|5-x||=2x+4\,,$$

19.
$$|2\,|x-4|+x-5| = 3-x\,,$$

20.
$$|2+4\,|x-3|-3x| = 10-x\,,$$

21.
$$\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right| = 5\,.$$

Rovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

1. levá strana rovnice je součtem dvou nezáporných sčítanců a nemůže se tedy rovnat zápornému číslu, $K=\emptyset$,
2. aby mohla rovnost platit, musí být na levé straně každý z nezáporných sčítanců nulový, $K=\{3\}$,
3. protože $|-x^2|=|x^2|$ a pro všechna $x\in\mathbb{R}$ platí $0\le x^2<x^2+1$, je levá strana rovnice záporná, $K=\emptyset$,
4. $K=(-\infty;3\rangle$,
5. $K=\{-1/2;17/4\}$,
6. $K=\{15;-1\}$,
7. $K=\emptyset$,
8. $K=\{1\}$,
9. $K=\{-5;1/3\}$,
10. $K=\{-5;-2;-1;2\}$,
11. $K=\{-4;2\}$,
12. $K=\{2\}$,
13. $K=\{1/3;-11;-7;-1\}$,
14. $K=\{10/3;-2\}$,
15. $K=\{\pm1;7\}$,
16. $K=\{0;1;4;6\}$,
17. $K=\{-4;-3;-1\}$,
18. $K=\{1;5\}$,
19. $K=(-\infty;3\rangle$,
20. $K=\{2/3\}\cup\langle 3;10\rangle$,
21. lze využít substituci $x^2=y\ge 0$, $K=\langle -3;-2\rangle\cup\langle 2;3\rangle$.

Nerovnice - zadání úloh.

- Uveďte příklad nerovnice s absolutními hodnotami, jejíž množina kořenů je
  1. prázdná,
  2. tříprvková,
  3. $K = \langle -4; 4 \rangle$,
  4. $K = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
- V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

1.
$$|7 - 3x| < 2 + 5x\,,$$

2.
$$|4 - 3x| \geq 5 - 3x\,,$$

3.
$$|3x - 2| < |x + 1| + 5\,,$$

4.
$$|x - 3| \leq 2x + 3\,,$$

5.
$$|x - 2| \geq 3x - 5\,,$$

6.
$$|2x + 3| + |2 - x| > 7\,,$$

7.
$$\frac{3x + 7}{|3 - x|} \geq 1\,,$$

8.
$$\left|x^2 - 9x + 14\right| |-x - 3| > 0\,,$$

9.
$$\left|x^4 + 2\right| - \left|x^4 + 1\right| > 1\,,$$

10.
$$\left|x^2 - 2x - 3\right| < x + 1\,,$$

11.
$$\left|\frac{2x + 1}{x - 3} + 1\right| < 1\,,$$

12.
$$\frac{|x - 2|}{x - 2} \leq 0\,,$$

13.
$$\frac{|x + 3| + x}{x + 2} > 1\,,$$

14.
$$\frac{1}{|x| - 3} < \frac{1}{2}\,,$$

15.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2\,|x| + 3} < 0\,,$$

16.

$$\frac{x^2 + 6x - 7}{|x + 3|} < 0\,,$$

17.

$$\left|x^2 - 2x - 3\right| < 3x - 3\,.$$

Nerovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

- Každou úlohu lze splnit nekonečně mnoha jinými příklady

1. $|x| < 0$,
2. $|x\,(x-1)\,(x-2)| \leq 0$, $K = \{0; 1; 2\}$,
3. $|x| \leq 4$,
4. $|x-1|\,|x+1| > 0$.

- Výsledky zadaných úloh:

1. $K = (5/8; \infty)$,
2. $K = \langle 3/2; \infty)$,
3. $K = (-1; 4)$,
4. $K = \langle 0; \infty)$,
5. $K = (-\infty; 7/4\rangle$,
6. $K = (-\infty; -8/3) \cup (2; \infty)$,
7. $K = \langle -1; \infty) - \{3\}$,
8. součin absolutních hodnot nebude kladný jen, když výraz v některé z nich bude nulový $K = \mathbb{R} - \{-3; 2; 7\}$,
9. výrazy v absolutních hodnotách jsou kladné $K = \emptyset$,
10. $K = (2; 4)$,
11. $K = (-1/2; 5/4)$,
12. $K = (-\infty; 2)$,
13. $K = (-5; -2) \cup (-1; \infty)$,
14. jmenovatel může být kladný i záporný, $K = (-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; \infty)$,
15. jmenovatel je kladný, $K = (2; 3)$,
16. jmenovatel je nezáporný, $K = (-7; 1) - \{-3\}$,
17. $K = (2; 5)$.