

Úlohy vedoucí k řešení lineárních rovnic a nerovnic ¹

Důležitá upozornění.

- Před tím, než učiníte závěr, zkontrolujte, zda všechny provedené úpravy byly ekvivalentní. V záporném případě si vhodně vybírejte, kdy je jednodušší provést zkoušku a kdy stanovit podmínky, které ekvivalentnost použitých úprav mohou zajistit.
- Má-li rovnice či nerovnice nekonečně mnoho řešení, není provedení zkoušky pro tolik hodnot možné a je třeba stanovit podmínky tak, aby prováděné úpravy byly ekvivalentní.
- Dávejte pozor, zda nerovnici násobíte kladným či záporným číslem, má to vliv na její znaménko.

Rovnice - zadání úloh.

V \mathbb{R} vyřešte rovnice

1.

$$(p+1)^3 - (p-1)^3 = 6(p+2)(p-1) + 9(p+1) - 9(p-1),$$

2.

$$\frac{9(2x-9)}{13} + \frac{x-4}{5} = \frac{7}{5}(3x-2) - (3x-5),$$

3.

$$1 + \frac{x}{1-2x} = \frac{x+3}{2x+1},$$

4.

$$\frac{\frac{2y}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{3y}{2} - 1} + \frac{\frac{5y}{3} - \frac{4}{3}}{y - \frac{2}{3}} = 2,$$

5.

$$\frac{\frac{x}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3x}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{6}x - \frac{7}{6}}{\frac{5}{4}x + \frac{9}{4}},$$

6.

$$\frac{(2-x)^3 + (x-1)^3}{(2-x)^2 + (1-x)^2} = \frac{3}{2},$$

7.

$$\frac{3x}{x-2} + \frac{1}{2-x} + 1 = \frac{3x+3}{x-2} + \frac{4}{2-x},$$

8.

$$\frac{x+3}{x+1} + \frac{x+2}{x-3} = 2 + \frac{7x-1}{x^2-2x-3},$$

9.

$$\frac{3}{(2x+5)^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{7}{4x^2+12x+5},$$

¹Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

10.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{6}{x^2+2x-8} - 1,$$

11.

$$\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-x},$$

12.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} = \frac{6x^2+20x-8}{x^3+3x^2+2x}.$$

Rovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

1. $K = \{-2/3\}$,
2. $K = \{24\}$,
3. $K = \{1/3\}$ (podmínky: $x \neq \pm 1/2$),
4. $K = \{2\}$,
5. $K = \{-1\}$,
6. řešením rovnice dostaneme nepravdivé tvrzení, $K = \emptyset$, všimněte si, že $(2-x)^2 + (1-x)^2 > 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, takže žádné podmínky nejsou třeba
7. řešením rovnice dostaneme $x = 2$ za podmínky $x \neq 2$, $K = \emptyset$,
8. rovnici vyhoví každé reálné číslo, které není zakázáno podmínkami $K = \mathbb{R} - \{-1; 3\}$,
9. $K = \{-17/2\}$, (podmínky: $x \neq -5/2$, $x \neq -1/2$),
10. řešením rovnice dostaneme $x = 2$ za podmínek $x \neq 2$, $x \neq -4$, $K = \emptyset$,
11. rovnici vyhoví každé reálné číslo, které není zakázáno podmínkami $K = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$,
12. $K = \{1\}$, (podmínky: $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -2$).

Nerovnice - zadání úloh.

1. V \mathbb{R} vyřešte nerovnice

a)

$$5(y - 1) - y(7 - y) \leq y^2,$$

b)

$$\frac{2x - 17}{4} - \frac{8 - x}{2} - 2 \geq x - 4 + \frac{x}{8},$$

c)

$$(z - 3)^2 + z^2 < 2z^2 - 6z + 13,$$

d)

$$\frac{(2x - 1)^2}{x^2 + 1} > 4,$$

e)

$$\frac{8x - 4}{(x - 1)^2 + (x + 5)^2} \leq 0,$$

f)

$$\frac{2x^2 - 3}{x^2 - 6x + 9} \geq 2.$$

2. Určete definiční obory následujících výrazů

a)

$$\sqrt{\frac{2x - 6}{-5}},$$

b)

$$\frac{7x}{\sqrt[4]{9 - 3x}},$$

c)

$$\sqrt{(x - 3)^2 - (x + 1)^2} - \frac{x - 1}{\sqrt{12 + 4x}}.$$

3. Vyřešte soustavy nerovnic s neznámou $x \in \mathbb{R}$

a)

$$2(3x - 1) < 3(4x + 1) + 16, \quad 4(2 + x) < 3x + 8,$$

b)

$$3 - x \leq \frac{1}{2} + 2x, \quad 2 + x > 7x + \frac{3}{2},$$

c)

$$(x + 1)^2 + 3x^2 \leq (2x - 1)^2 + 7, \quad (1 + x)^2 + 7 > (x - 4)^2,$$

d)

$$3x - 4 \leq 2x + 5 < 4x - 1,$$

e)

$$2x + 1 > 3x - 3, \quad 3x - 2 > x - 4, \quad 8x + 2 < 3x - 1.$$

Nerovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

1.
 - a) $K = \langle -5/2; \infty \rangle$,
 - b) $K = (-\infty; -50 \rangle$,
 - c) $K = \mathbb{R}$,
 - d) $K = (-\infty; -3/4)$, (násobení zadané nerovnice výrazem $x^2 + 1$ je ekvivalentní úprava, protože $x^2 + 1 > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$),
 - e) $K = (-\infty; 1/2 \rangle$, (jmenovatel zadané nerovnice je kladný, neboť je součtem dvou kvadrátů, které nemohou být současně nulové)
 - f) $K = \langle 7/4; 3 \rangle \cup (3; \infty)$, (nerovnici lze uvažovat pouze pro $x \neq 3$ a za této podmínky je jmenovatel kladný).
2.
 - a) $D = (-\infty; 3)$,
 - b) $D = (-\infty; 3)$,
 - c) $D = (-3; 1)$.
3.
 - a) $K = (-7/2; 0)$,
 - b) $K = \emptyset$,
 - c) $K = (4/5; 7/6)$,
 - d) $K = (3; 9)$,
 - e) $K = (-1; -3/5)$.