Dag Hrubý

Matematická cvičení

PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

Prometheus

Publikace byla připravena ve spolupráci s JČMF
Zpracoval RNDr. Dag Hrubý
Lektoroval doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
Revizi výsledků provedli doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
a Mgr. Lenka Kadlecová

1. vydání
© Dag Hrubý, 2008

ISBN 978-80-7196-374-5

Věnuji Milušce

OBSAH

PŘEDMLUVA

Milí studenti středních škol,
milé kolegyně, vážení kolegové, učitelé matematiky,

dostáváte do rukou sbírku 1 200 úloh, která je doplněna 300 úlohami pro maturanty. Téměř u všech úloh jsou uvedeny v hranatých závorkách také výsledky. I když sbírka svým obsahem vychází z řady učebnic matematiky pro gymnázia, které vydalo již v několika vydáních nakladatelství Prometheus, je dobře použitelná i pro studenty a učitele odborných škol. Všech 1 200 úloh je členěno do 240 cvičení, z nichž každé obsahuje 5 úloh různé náročnosti. Sbírka je komplexní v tom smyslu, že pokrývá všechny klasické partie středoškolské matematiky. Otázkou je, do jaké míry je náročná. Na to lze vždy alibisticky odpovědět, že pro někoho ano, pro jiného ne. Proto jsou ve sbírce u některých úloh, které autor pokládá za náročnější, uvedeny návody k jejich řešení. Rád bych v této souvislosti poznamenal, že sbírka svým obsahem překračuje požadavky kladené na matematiku v Rámcových vzdělávacích programech pro gymnázia a střední odborné školy. Snad nebude přehnané tvrzení, že může být užitečná také v prvních semestrech bakalářských studijních programů na vysokých školách.

Se sbírkami to nebývá jednoduché. Není problém ukázat, že řada úloh se opakuje celá desetiletí. Není tomu jinak ani v této sbírce, určitě najdete úlohy, které vám budou povědomé.

Děkuji recenzentům doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc., doc. RNDr. Leo Bočkovi, CSc., a Mgr. Lence Kadlecové za jejich připomínky a doporučení, které významně přispěly k zlepšení obsahu knihy jak po stránce odborné, tak metodické. Tato sbírka by nevznikla bez velkého porozumění mé ženy, která mně vytvořila nejen dobré zázemí pro práci, ale také pomohla po stránce odborné a metodické. Za tuto podporu jí děkuji.

Vám, vážení studenti a kolegové přeji, aby vám práce se sbírkou přinášela radost a uspokojení při studiu matematiky.

Jevíčko, srpen 2008 *Dag Hrubý*

Struktura učiva matematiky na gymnáziu

Tato sbírka vychází z jistého konkrétního pojetí výuky matematiky na čtyřletém gymnáziu všeobecného zaměření. Učební plán výuky je následující:

Ročník	Povinná výuka	Volitelná výuka	Celkem hodin
1	4	0	4
2	4	0	4
3	4	2	6
4	4	2	6

Rozdělení učiva do jednotlivých ročníků

Ročník	Tematické celky
1	Základní poznatky z matematiky Rovnice a nerovnice Planimetrie Opakování a písemné práce
2	Funkce Stereometrie Opakování a písemné práce
3	Analytická geometrie Komplexní čísla Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika Opakování a písemné práce
4	Posloupnosti a řady Základy diferenciálního počtu Základy integrálního počtu Závěrečné opakování a písemné práce

Z uvedeného rozvržení učiva vycházejí pak tematické plány pro jednotlivé ročníky.

Tematický plán pro 1. ročník

4 hodiny týdně, 132 za rok, z toho 33 hodin cvičení

Opakování (4)

1 Základní poznatky z matematiky (40)

1.1 Číselné obory
- 1.1.1 Obor čísel přirozených
- 1.1.2 Obor čísel celých
- 1.1.3 Obor čísel racionálních
- 1.1.4 Obor čísel reálných
- 1.1.5 Druhá a třetí odmocnina
- 1.1.6 Absolutní hodnota reálného čísla
- 1.1.7 Mocniny s celým exponentem

1.2 Základní poznatky z teorie množin
- 1.2.1 Pojem množiny
- 1.2.2 Operace s množinami
- 1.2.3 Binární relace

1.3 Základní poučení o výrocích
- 1.3.1 Pojem výroku
- 1.3.2 Výrokové formy
- 1.3.3 Matematické věty

1.4 Elementární teorie čísel
- 1.4.1 Číselné soustavy
- 1.4.2 Prvočísla a čísla složená
- 1.4.3 Dělitelnost

1.5 Algebraické výrazy
- 1.5.1 Pojem algebraického výrazu
- 1.5.2 Mnohočleny
- 1.5.3 Lomené výrazy
- 1.5.4 Vyjádření neznámé ze vzorce

2 Rovnice a nerovnice (40)

2.1 Algebraické rovnice
- 2.1.1 Pojem algebraické rovnice

2.1.2 Lineární rovnice
2.1.3 Kvadratické rovnice
2.1.4 Rovnice vyšších stupňů
2.1.5 Soustavy rovnic
2.2 Algebraické nerovnice
2.2.1 Lineární nerovnice
2.2.2 Kvadratické nerovnice
2.2.3 Nerovnice vyšších stupňů
2.2.4 Soustavy nerovnic
2.3 Speciální rovnice a nerovnice
2.3.1 Rovnice a nerovnice s neznámou ve jmenovateli
2.3.2 Rovnice a nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě
2.3.3 Rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou
2.3.4 Rovnice a nerovnice s parametry

3 **Planimetrie** (36)

3.1 Základy planimetrie
3.1.1 Základní planimetrické pojmy
3.1.2 Úsečka, úhel, dvojice úhlů
3.1.3 Polohové a metrické vlastnosti bodů a přímek
3.2 Základní útvary v rovině
3.2.1 Trojúhelníky
3.2.2 Mnohoúhelníky
3.2.3 Kružnice a kruh
3.2.4 Obvody a obsahy rovinných útvarů
3.2.5 Množiny bodů dané vlastnosti
3.3 Konstrukční úlohy
3.3.1 Pojem konstrukční úlohy
3.3.2 Základní geometrické konstrukce
3.3.3 Konstrukce trojúhelníků, čtyřúhelníků a kružnice
3.4 Geometrická zobrazení
3.4.1 Shodná zobrazení v rovině
3.4.2 Stejnolehlost
Opakování (4)
Písemné práce (8)

Tematický plán pro 2. ročník

4 hodiny týdně, 132 za rok, z toho 33 hodin cvičení

Opakování (4)

1 **Funkce** (76)

1.1 Základní poznatky o funkcích
- 1.1.1 Pojem funkce
- 1.1.2 Vlastnosti funkcí
- 1.1.3 Funkce inverzní
- 1.1.4 Funkce složená
- 1.1.5 Speciální funkce
- 1.1.6 Transformace soustavy souřadnic

1.2 Algebraické funkce
- 1.2.1 Polynomické funkce
- 1.2.2 Lineární funkce
- 1.2.3 Kvadratické funkce
- 1.2.4 Mocninné funkce s přirozeným exponentem
- 1.2.5 Racionální lomené funkce
- 1.2.6 Lineární lomená funkce
- 1.2.7 Mocninné funkce s celým exponentem

1.3 Transcendentní funkce
- 1.3.1 Exponenciální funkce
- 1.3.2 Exponenciální rovnice a nerovnice
- 1.3.3 Logaritmické funkce
- 1.3.4 Logaritmy a jejich vlastnosti
- 1.3.5 Logaritmické rovnice a nerovnice
- 1.3.6 Goniometrické funkce
- 1.3.7 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi
- 1.3.8 Goniometrické rovnice
- 1.3.9 Cyklometrické funkce

1.4 Trigonometrie
- 1.4.1 Řešení pravoúhlého trojúhelníku
- 1.4.2 Sinová a kosinová věta
- 1.4.3 Řešení obecného trojúhelníku
- 1.4.4 Užití trigonometrie v praxi

2 **Stereometrie** (40)

2.1 Základy stereometrie
- 2.1.1 Základní stereometrické pojmy
- 2.1.2 Základní útvary v prostoru
- 2.1.3 Volné rovnoběžné promítání

2.2 Polohové vlastnosti útvarů v prostoru
- 2.2.1 Vzájemná poloha dvou přímek
- 2.2.2 Vzájemná poloha přímky a roviny
- 2.2.3 Vzájemná poloha rovin
- 2.2.4 Průnik přímky a tělesa
- 2.2.5 Průnik roviny a tělesa

2.3 Metrické vlastnosti útvarů v prostoru
- 2.3.1 Odchylka přímek
- 2.3.2 Kolmost přímek a rovin
- 2.3.3 Odchylka přímek a rovin
- 2.3.4 Vzdálenost bodu od přímky a roviny
- 2.3.5 Vzdálenost přímek a rovin

2.4 Mnohostěny a rotační tělesa
- 2.4.1 Objem a povrch tělesa
- 2.4.2 Hranoly
- 2.4.3 Jehlany
- 2.4.4 Pravidelné mnohostěny
- 2.4.5 Válec a kužel
- 2.4.6 Koule a její části

Opakování (4)

Písemné práce (8)

Tematický plán pro 3. ročník

4 hodiny týdně, 132 za rok, z toho 33 hodin cvičení

Opakování (4)

1 **Analytická geometrie** (60)

1.1 Základy vektorové algebry
- 1.1.1 Soustava souřadnic
- 1.1.2 Pojem vektoru
- 1.1.3 Sčítání vektorů
- 1.1.4 Násobení vektorů reálným číslem
- 1.1.5 Skalární součin vektorů
- 1.1.5 Vektorový součin vektorů
- 1.1.6 Smíšený součin vektorů

1.2 Lineární útvary
- 1.2.1 Lineární útvary v rovině
- 1.2.2 Polohové vlastnosti lineárních útvarů v rovině
- 1.2.3 Metrické vlastnosti lineárních útvarů v rovině
- 1.2.4 Lineární útvary v prostoru
- 1.2.5 Polohové vlastnosti lineárních útvarů v prostoru
- 1.2.6 Metrické vlastnosti lineárních útvarů v prostoru

1.3 Kvadratické útvary
- 1.3.1 Pojem kuželosečky
- 1.3.2 Kružnice
- 1.3.3 Elipsa
- 1.3.4 Parabola
- 1.3.5 Hyperbola
- 1.3.6 Vyšetřování množin bodů analytickou metodou
- 1.3.7 Některé kvadratické útvary v prostoru

2 **Komplexní čísla** (24)

2.1 Pojem komplexního čísla
- 2.1.1 Uspořádané dvojice reálných čísel
- 2.1.2 Algebraický tvar komplexního čísla

3 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika (32)

Tematický plán pro 4. ročník

4 hodiny týdně, 120 za rok, z toho 30 hodin cvičení

Opakování (4)

1 **Posloupnosti a řady** (20)

1.1 Posloupnosti
- 1.1.1 Pojem posloupnosti
- 1.1.2 Matematická indukce
- 1.1.3 Aritmetická posloupnost
- 1.1.4 Geometrická posloupnost

1.2 Řady
- 1.2.1 Limita posloupnosti
- 1.2.2 Pojem nekonečné řady
- 1.2.3 Nekonečná geometrická řada

2 **Základy diferenciálního počtu** (40)

2.1 Spojitost
- 2.1.1 Okolí bodu
- 2.1.2 Spojitost funkce v bodě
- 2.1.3 Spojitost funkce v intervalu
- 2.1.4 Užití vlastností spojitých funkcí

2.2 Limita funkce
- 2.2.1 Pojem limity funkce
- 2.2.2 Vlastnosti limity funkce
- 2.2.3 Základní typy limit
- 2.2.4 Důležité limity
- 2.2.5 Tečny a asymptoty grafu funkce

2.3 Derivace funkce
- 2.3.1 Pojem derivace funkce
- 2.3.2 Pravidla pro počítání derivací
- 2.3.3 Derivace elementárních funkcí

2.4 Průběh funkce
- 2.4.1 Monotónnost
- 2.4.2 Extrémy

2.4.3 Inflexe
2.4.4 Vyšetřování průběhu funkce
2.5 Užití diferenciálního počtu
2.5.1 Užití diferenciálního počtu v geometrii
2.5.2 Užití diferenciálního počtu ve fyzice

3 Základy integrálního počtu (24)

3.1 Primitivní funkce
3.1.1 Pojem primitivní funkce
3.1.2 Integrační metody
3.2 Určitý integrál
3.2.1 Pojem určitého integrálu
3.2.2 Vlastnosti určitého integrálu
3.3 Užití integrálního počtu
3.3.1 Obsah rovinného útvaru
3.3.2 Objem rotačního tělesa
3.3.3 Užití integrálního počtu ve fyzice

Závěrečné opakování (24)

Úvod do studia matematiky
Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika
Aritmetika a algebra
Elementární geometrie
Analytická geometrie
Základy matematické analýzy
Písemné práce (6)
Závěrečná práce (2)

Požadavky k maturitní zkoušce z matematiky

Úvod do studia matematiky

Základy logiky

Pojem matematického výrazu. Výrok, pravdivostní hodnota výroku, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, negování složených výroků, negace výroků obsahujících výrazy: „nejvýš n, aspoň n, právě n“. Výrokové formy, obor proměnné, definiční obor a obor pravdivosti výrokové formy. Axiomy, definice, matematické věty a jejich důkazy, důkaz přímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí.

Základy teorie množin

Pojem množiny, zadání množiny, podmnožina, potenční množina. Vztahy mezi množinami, rovnost, inkluze, ekvivalence, množiny spočetné a nespočetné. Operace s množinami, doplněk, sjednocení, průnik, rozdíl. Vennovy diagramy. Uspořádané dvojice, kartézský součin, binární relace, grafy relací, zobrazení, geometrická zobrazení, funkce, skládání zobrazení. Pojem operace, vlastnosti operací, uzavřenost, asociativnost, neutrální a inverzní prvky, komutativnost, distributivnost.

Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

Kombinatorika

Základní kombinatorické pojmy, faktoriály, kombinační čísla a jejich vlastnosti, binomická věta. Základní kombinatorická pravidla. Variace, permutace, kombinace bez opakování, variace, permutace, kombinace s opakováním, smíšené úlohy.

Pravděpodobnost a statistika

Náhodné jevy a množiny jevů, množina elementárních jevů, jev jistý a jev nemožný, jev opačný. Pojem pravděpodobnosti, klasická pravděpodobnost, vlastnosti pravděpodobnosti. Nezávislé jevy, Bernoulliova posloupnost nezávislých pokusů. Matematická statistika, statistický soubor, jednotka, znak, četnosti a jejich vlastnosti, znázornění četností, spojnicový diagram, histogram, kruhový diagram. Charakteristiky polohy, průměr, vážený průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, modus, medián. Charakteristiky variability, rozptyl a směrodatná odchylka.

Aritmetika a algebra

Elementární teorie čísel

Číslo, číslice, číselné soustavy, dekadický poziční systém, zápisy přirozených čísel. Prvočísla a čísla složená, základní věta aritmetiky, násobek a dělitel, společný násobek a dělitel, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel, čísla soudělná a nesoudělná, kritéria dělitelnosti, důkazové úlohy o dělitelnosti.

Číselné obory

Pojem číselného oboru, obor čísel přirozených, celých, racionálních a reálných, čísla iracionální, číselná osa, znázornění čísel na číselné ose. Základní operace v číselných oborech a jejich vlastnosti, uzavřenost, asociativnost, neutrální a inverzní prvky, komutativnost, distributivnost, mocniny, odmocniny a operace s nimi. Vztahy mezi reálnými čísly, absolutní hodnota reálného čísla a její vlastnosti, geometrická interpretace, intervaly.

Komplexní čísla

Množina uspořádaných dvojic reálných čísel, operace s dvojicemi reálných čísel a jejich vlastnosti. Absolutní hodnota komplexního čísla, Gaussova rovina. Algebraický tvar komplexního čísla, čísla komplexně sdružená, komplexní jednotky, operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru. Goniometrický tvar komplexního čísla, modul a argument, Moivreova věta, násobení, dělení, umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru. Lineární, kvadratické a binomické rovnice v množině komplexních čísel, n-té odmocniny z jedné včetně geometrické intepretace. Výrokové formy s absolutními hodnotami.

Algebraické výrazy

Pojem algebraického výrazu, definiční obor výrazu, hodnota výrazu, rovnost výrazů. Pojem mnohočlenu, operace s mnohočleny, rozklady mnohočlenů, nulové body. Lomené výrazy, krácení a rozšiřování lomených výrazů, rozklady na parciální zlomky. Výrazy s absolutními hodnotami, mocninami a odmocninami. Význam a užití algebraických výrazů v praxi.

Algebraické rovnice

Pojmy rovnost, rovnice. Algebraické rovnice, definiční obor rovnice, kořen rovnice, vlastnosti kořenů, úpravy rovnic, zkouška. Grafické řešení rovnic. Polynomy, funkce a rovnice, souvislosti. Lineární a kvadratické rovnice, některé rovnice vyšších stupňů. Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě, rovnice s neznámou pod odmocninou, rovnice s parametry. Soustavy rovnic. Význam a užití algebraických rovnic v praxi.

Algebraické nerovnice

Pojmy nerovnost a nerovnice, nerovnosti mezi reálnými čísly. Pojem algebraické nerovnice, definiční obor nerovnice, součinový a podílový tvar nerovnic. Lineární a kvadratické nerovnice, některé nerovnice vyšších stupňů. Lineární nerovnice se dvěma neznámými. Úpravy nerovnic, grafické řešení nerovnic. Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě, nerovnice s neznámou pod odmocninou, nerovnice s parametry. Soustavy nerovnic. Význam a užití algebraických nerovnic v praxi.

Elementární geometrie

Základy planimetrie

Základní planimetrické pojmy a vztahy mezi nimi. Polopřímka, polorovina, úhel. Vzájemná poloha bodů a přímek v rovině. Množiny bodů dané vlastnosti. Konvexní a nekonvexní útvary. Míra geometrických útvarů, délka úsečky, velikost úhlu, vzdálenost geometrických útvarů, obvody a obsahy rovinných útvarů. Pojem konstrukční úlohy, eukleidovské konstrukce, metody řešení konstrukčních úloh, základní geometrické konstrukce, konstrukce algebraických výrazů, dělení úsečky v daném poměru, zlatý řez. Shodná zobrazení v rovině, samodružný bod, samodružný útvar, identita, osová souměrnost, středová souměrnost, rotace, translace, skládání shodných zobrazení. Stejnolehlost.

Trojúhelníky a mnohoúhelníky

Trojúhelník, strany a úhly v trojúhelníku, těžiště, těžnice, výšky, střední příčky, kružnice opsaná, kružnice vepsaná. Obvod a obsah trojúhelníku. Shodnost a podobnost trojúhelníků. Konstrukce trojúhelníku. Čtyřúhelníky, různoběžníky, lichoběžníky, rovnoběžníky. Strany a úhly ve čtyřúhelníku, čtyřúhelník tečnový, tětivový a dvojstředový. Konstrukce čtyřúhelníků. Mnohoúhelník konvexní a nekonvexní, pravidelný n-úhelník, strany, úhly, úhlopříčky n-úhelníku. Obvod a obsah pravidelného n-úhelníku. Konstrukce pravidelného n-úhelníku.

Kružnice a kruh

Kružnice, úhly v kružnici, obvodový, středový, úsekový úhel, Thaletova kružnice. Vzájemná poloha přímky a kružnice, vzájemná poloha kružnic, stejnolehlost kružnic, mocnost bodu ke kružnici. Konstrukce kružnice, konstrukce tečny ke kružnici. Délka kružnice, délka kružnicového oblouku. Kruh, kruhová výseč, kruhová úseč. Obvod a obsah kruhu, kruhové výseče a úseče.

Trigonometrie

Geometrie pravoúhlého trojúhelníku, goniometrické funkce ostrého úhlu, vztahy mezi stranami a úhly v pravoúhlém trojúhelníku. Věta Pythagorova, věty Eukleidovy. Řešení pravoúhlého trojúhelníku. Obecný trojúhelník, sinová věta, kosinová věta. Základní trigonometrické úlohy.

Základy stereometrie

Základní stereometrické pojmy. Volné rovnoběžné promítání. Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru. Průsečík přímky a roviny, průsečnice dvou rovin, řez tělesa rovinou. Odchylka přímek, kolmost přímek, kolmost rovin, odchylka přímky a roviny, odchylka dvou rovin. Vzdálenost bodů, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost přímek, vzdálenost rovin. Pojem tělesa, konvexní a nekonvexní tělesa, hranice tělesa, síť tělesa. Míra geometrických útvarů v prostoru, objem tělesa, povrch tělesa, Cavalieriho princip.

MNOHOSTĚNY A ROTAČNÍ TĚLESA

Konvexní mnohostěny. Eulerova věta o mnohostěnech. Hranol, kvádr, krychle, vrcholy, stěny, hrany, stěnové a tělesové úhlopříčky mnohostěnu, povrch a objem hranolu, kvádru, krychle. Jehlan, komolý jehlan, povrch a objem jehlanu a komolého jehlanu. Pravidelné mnohostěny, Platonova tělesa, tetraedr, hexaedr, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr. Rotační tělesa, válec, kužel, komolý kužel, koule, kulová plocha. Polokoule, kulová úseč, kulová výseč, kulová vrstva, vrchlík. Povrch a objem válce, kužele, komolého kužele, koule.

Analytická geometrie

ZÁKLADY VEKTOROVÉ ALGEBRY

Soustava souřadnic na přímce, v rovině, v prostoru. Střed dvojice bodů, vzdálenost dvou bodů. Pojem vektoru, souřadnice vektoru, velikost vektoru. Sčítání vektorů, násobení vektorů reálným číslem. Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů. Skalární součin vektorů a jeho vlastnosti, odchylka vektorů. Vektorový součin a jeho vlastnosti, smíšený součin, geometrická interpretace.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

Parametrické rovnice přímky, polopřímky, úsečky, obecná rovnice přímky, směrový a normálový vektor, směrnicový a úsekový tvar rovnice přímky, směrnice přímky. Rovnice přímky dané bodem a směrnicí, rovnice přímky dané dvěma body. Vzájemná poloha bodů a přímek, odchylka dvou přímek, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímek.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU

Parametrické vyjádření přímky, parametrické vyjádření roviny, obecná rovnice roviny, normálový vektor roviny. Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin. Vzdálenost bodů, přímek a rovin, odchylka přímek, odchylka přímky a roviny, odchylka dvou rovin.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

Transformace soustavy souřadnic v rovině. Pojem kuželosečky, analytické vyjádření kružnice, elipsy, paraboly a hyperboly, vlastnosti kuželoseček. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky, rovnice tečny. Analytické vyšetřování množin bodů.

Základy matematické analýzy

ZÁKLADNÍ POZNATKY O FUNKCÍCH

Pojem funkce, rozdělení funkcí, základní charakteristiky funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce. Rovnost funkcí, funkce sudá, lichá, periodická. Monotónnost a omezenost funkce, extrémy funkce. Funkce inverzní a složená. Funkce absolutní hodnota, funkce celá část, funkce signum.

POLYNOMICKÉ FUNKCE

Pojem polynomické funkce, definiční obor, obor hodnot, graf, vlastnosti polynomických funkcí. Funkce konstantní, lineární funkce, funkce kvadratická. Mocninné funkce s přirozeným exponentem.

RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE

Racionální lomené funkce, definiční obor, obor hodnot, graf, vlastnosti racionálních lomených funkcí. Funkce nepřímá úměrnost, lineární lomená funkce. Mocninné funkce s celým záporným exponentem, mocninné funkce s necelým racionálním exponentem. Ostatní racionální lomené funkce.

EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE

Exponenciální funkce, definiční obor, obor hodnot, graf, vlastnosti exponenciálních fukcí. Funkce $y = \mathrm{e}^x$, funkce $y = 10^x$. Exponenciální rovnice a nerovnice. Logaritmické funkce, definiční obor, obor hodnot, graf, vlastnosti logaritmických funkcí. Funkce $y = \log x$, $y = \ln x$. Pojem logaritmu, vlastnosti logaritmů. Logaritmické rovnice a nerovnice.

GONIOMETRICKÉ A CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens, definiční obory, obory hodnot, vlastnosti goniometrických funkcí. Goniometrické funkce složeného argumentu. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Goniometrické rovnice a nerovnice. Cyklometrické funkce arcsin, arccos, arctg, arccotg, definiční obory, obory hodnot, grafy.

Posloupnosti a řady

Pojem posloupnosti, zadání posloupnosti vzorcem pro n-tý člen, rekurentně, graf posloupnosti, vlastnosti posloupnosti, monotónnost, omezenost. Posloupnost aritmetická a geometrická. Limita posloupnosti. Posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Nekonečná geometrická řada.

Spojitost a limita funkce

Okolí bodu, přírůstek argumentu, přírůstek funkce. Funkce spojitá v bodě, funkce spojitá v uzavřeném intervalu. Základní vlastnosti funkcí spojitých v uzavřeném intervalu. Využití vlastností spojitých funkcí při řešení rovnic a nerovnic. Limita funkce, pravidla pro počítání limit, nevlastní limity a limity v nevlastních bodech, důležité limity. Asymptoty a tečny grafu funkce.

Derivace funkce

Pojem derivace funkce, geometrická a fyzikální interpretace derivace funkce, rovnice tečny a normály grafu funkce, úhel dvou křivek. Derivace funkce a spojitost funkce. Pravidla pro počítání derivací, derivace inverzní a složené funkce. Derivace elementárních funkcí. Druhá derivace funkce, diferenciál funkce, derivace funkce v implicitním tvaru. L'Hospitalovo pravidlo.

Užití diferenciálního počtu

Věta Rolleova, věta Lagrangeova, monotónnost a derivace funkce, lokální extrémy a derivace, globální extrémy funkce, funkce konvexní a konkávní, inflexní body. Vyšetřování průběhu funkce, slovní úlohy na extrémy funkcí.

Základy integrálního počtu

Pojem primitivní funkce, primitivní funkce k elementárním funkcím. Integrační metody, přímá integrace, metoda substituční, integrace per partes, rozklady na parciální zlomky. Pojem určitého integrálu a jeho vlastnosti, výpočet určitých integrálů, substituce a metoda per partes při výpočtu určitého integrálu. Výpočet obsahu rovinného útvaru, výpočet objemu rotačního tělesa.

Otázky k maturitní zkoušce z matematiky

1. Základy matematické logiky
2. Základy teorie množin
3. Kombinatorika
4. Pravděpodobnost a statistika
5. Elementární teorie čísel
6. Číselné obory
7. Komplexní čísla
8. Algebraické výrazy
9. Algebraické rovnice
10. Algebraické nerovnice
11. Základy planimetrie
12. Trojúhelníky a mnohoúhelníky
13. Kružnice a kruh
14. Trigonometrie
15. Základy stereometrie
16. Mnohostěny a rotační tělesa
17. Základy vektorové algebry
18. Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině
19. Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru
20. Analytická geometrie kvadratických útvarů
21. Základní poznatky o funkcích
22. Polynomické funkce
23. Racionální lomené funkce
24. Exponenciální a logaritmické funkce
25. Goniometrické a cyklometrické funkce
26. Posloupnosti a řady
27. Spojitost a limita funkce
28. Derivace funkce
29. Užití diferenciálního počtu
30. Základy integrálního počtu

Úlohy z matematiky

Základní poznatky z matematiky

Cvičení 1

1 Vypočtěte co nejúsporněji:

a) $68 + 372 + 32$

b) $4 \cdot 78 \cdot 25$

c) $8 \cdot 392 + 2 \cdot 392$

d) $19 \cdot 58 - 9 \cdot 58$

2 Vypočtěte:

a) $50 - [60 - (25 - 8)]$

b) $[42 + (35 - 12)] - (54 - 18)$

c) $56 - (23 + 15) - 18$

d) $56 - (23 - 15) - 18$

3 Vypočtěte:

a) $(3 - 5) \cdot (2 - 7)$

b) $(3 - 5) \cdot 2 - 7$

c) $3 - 5 \cdot (2 - 7)$

d) $3 - 5 \cdot 2 - 7$

4 Vypočtěte:

a) $3 \cdot (2 - 6) \cdot 5 - 4 \cdot 7$

b) $[3 \cdot (2 - 6) \cdot 5 - 4] \cdot 7$

c) $3[(2 - 6) \cdot 5 - 4 \cdot 7]$

d) $3 \cdot [(2 - 6) \cdot 5 - 4] \cdot 7$

5 Řešte algebrogram:

KRK
<u>KRA</u>
RAK

[**1.** a) 472; b) 7 800; c) 3 920; d) 580 **2.** a) 7; b) 29; c) 0; d) 30 **3.** a) 10; b) −11; c) 28; d) −14 **4.** a) −88; b) −448; c) −144; d) −504 **5.** A = 0; K = 2; R = 5]

Cvičení 2

1 Daná čísla zapište zlomkem v základním tvaru:

a) $\dfrac{36}{84}$ b) $\dfrac{1\,859}{1\,001}$

c) $\dfrac{476}{408}$ d) $\dfrac{24\,948}{16\,632}$

2 Dané zlomky uspořádejte podle velikosti:

a) $\dfrac{14}{17}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{11}{15}, \dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{14}{23}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{29}{48}, \dfrac{21}{34}$

3 Vypočtěte:

a) $\dfrac{1}{7} - \dfrac{16}{210} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{12} : \dfrac{1}{2}\right)\right]$

c) $\dfrac{11}{4} : \dfrac{11}{11{,}6}$ d) $\dfrac{(2{,}1 - 1{,}965) : (1{,}2 \cdot 0{,}045)}{0{,}003\,25 : 0{,}013} - \dfrac{1 : 0{,}25}{1{,}6 \cdot 0{,}625}$

4 Daná čísla zapište zlomkem v základním tvaru:

a) $0{,}036$ b) $0{,}\overline{30}$

c) $0{,}6\overline{81}$ d) $7\dfrac{3}{11}$

5 Dané zlomky zapište ve tvaru desetinného čísla nebo nekonečného desetinného rozvoje s vyznačením periody:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{9}{200}$

c) $\dfrac{256}{1024}$ d) $\dfrac{3}{7}$

[**1.** a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{13}{7}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $\frac{3}{2}$ **2.** a) $\frac{11}{15} < \frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{14}{17}$; b) $\frac{3}{5} < \frac{29}{48} < \frac{14}{23} < \frac{21}{34}$ **3.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{16}$; c) $\frac{29}{10}$; d) 6 **4.** a) $\frac{9}{250}$; b) $\frac{10}{33}$; c) $\frac{15}{22}$; d) $\frac{80}{11}$ **5.** a) $0{,}\overline{6}$; b) $0{,}045$; c) $0{,}25$; d) $0{,}\overline{428\,571}$]

Cvičení 3

1 Na číselné ose vyznačte obrazy čísel:

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}$

d) $-1-\sqrt{3}$

2 Usměrněte zlomky:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

Poznámka. Usměrnit zlomek znamená „odstranit" ze jmenovatele iracionální číslo.

3 Rozhodněte, které z čísel je větší:

a) $a = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $c = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$, $d = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

4 Zaokrouhlete čísla

a) 36,6; 564; 5,013 4; 0,021 4 na dvě platné číslice,

b) 5 555; 232,4; 2,725; 0,002 339 na tři platné číslice.

5 Určete číslo a tak, aby platilo:

a) $\dfrac{a}{10^n} < \dfrac{37}{59} < \dfrac{a+1}{10^n}$

b) $\dfrac{a}{10^n} < \sqrt{5} < \dfrac{a+1}{10^n}$

c) $\dfrac{a}{10^n} < \sqrt{3} < \dfrac{a+1}{10^n}$

d) $\dfrac{a}{10^n} < \pi < \dfrac{a+1}{10^n}$

Ve všech případech volte postupně $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

2. a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; d) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ **3.** a) $a < b$; b) $c > d$ **4.** a) 37; 560; 5,0; 0,021; b) 5 560; 232; 2,73; 0,002 34 **5.** a) $n = 1$, $a = 6$; $n = 2$, $a = 62$; $n = 3$, $a = 627$; b) $n = 1$, $a = 22$; $n = 2$, $a = 223$; $n = 3$, $a = 2\,236$; c) $n = 1$, $a = 17$; $n = 2$, $a = 173$; $n = 3$, $a = 1\,732$; d) $n = 1$, $a = 31$; $n = 2$, $a = 314$; $n = 3$, $a = 3\,141$

Cvičení 4

1 Vypočtěte bez použití tabulek a kalkulačky:

a) $\sqrt{1{,}44}$ b) $\sqrt[3]{0{,}064}$

c) $\sqrt{3\,600}$ d) $\sqrt[3]{343\,000}$

2 Vypočtěte:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$ b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}$

c) $\sqrt{48}:\sqrt{3}$ d) $\sqrt{320}:\sqrt{5}$

3 Částečně odmocněte:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt[3]{54}$

c) $\sqrt{192}$ d) $\sqrt[3]{128}$

4 Vyjádřete ve tvaru součinu racionálního čísla a odmocniny z co nejmenšího přirozeného čísla:

a) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ b) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$

5 Sečtěte:

a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ b) $3\sqrt{12}-\sqrt{48}$

c) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$ d) $5\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{108}$

[**1.** a) 1,2; b) 0,4; c) 60; d) 70 **2.** a) $2+\sqrt{6}$; b) $\sqrt{6}+3$; c) 4; d) 8 **3.** a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt[3]{2}$; c) $8\sqrt{3}$; d) $4\sqrt[3]{2}$ **4.** a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{6}\sqrt{30}$; c) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$ **5.** a) $5\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) $5\sqrt[3]{3}$; d) $4\sqrt[3]{4}$]

Cvičení 5

1 Vypočtěte:

a) $|3| + |-3|$ b) $|3| - |-3|$

c) $|3-5| - |5-3|$ d) $|3-5| + |5-3|$

2 Vypočtěte:

a) $\left|\dfrac{3-|3|+1}{1-|-3|-3}\right|$ b) $\dfrac{\big||-2|-(-2)\big|}{1+\big|-2-|-2|\big|}$

c) $\dfrac{\big|8-|8|+|-8|\big|}{\big||-8|\big|}$ d) $\dfrac{1+\big|3-|3|\big|}{\big||-3|-(-3)\big|}$

3 Vypočtěte:

a) $|1-\sqrt{2}| + |2-\sqrt{2}|$ b) $|2-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-2|$

c) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| - |\sqrt{2}+\sqrt{3}|$ d) $|\sqrt{5}-\sqrt{3}| - |\sqrt{3}-\sqrt{5}|$

4 Určete hodnoty daných výrazů pro $x > 0$ a pro $x < 0$:

a) $x + |x|$ b) $x - |x|$

c) $x \cdot |x|$ d) $\dfrac{x}{|x|}$

5 Dokažte:

a) $\forall x, y \in \mathsf{R}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ b) $\forall x \in \mathsf{R}\colon |x| = |-x|$

c) $\forall x \in \mathsf{R}\colon |x|^2 = x^2$ d) $\forall x, y \in \mathsf{R}\colon |x-y| = |y-x|$

[**1.** a) 6; b) 0; c) 0; d) 4 **2.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{4}{5}$; c) 1; d) $\frac{1}{6}$ **3.** a) 1; b) 0; c) $-2\sqrt{2}$; d) 0
4. a) $2x$, 0; b) 0, $2x$; c) x^2, $-x^2$; d) 1, -1]

Cvičení 6

1 Vypočtěte:

a) $\dfrac{3^4 \cdot 3^6}{3^9}$ b) $\dfrac{(3^2 \cdot 2^3)^2}{(2 \cdot 3)^4}$ c) $\dfrac{(-2)^3}{(-3)^2} : \dfrac{-4^2}{3^3}$ d) $\dfrac{2^5 \cdot 3^7}{8^2 \cdot 9^3}$

2 Vypočtěte:

a) $\dfrac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^{-5}}$ b) $\dfrac{2^{-6} \cdot 3^{-2} \cdot 5^3}{(2^{-4} \cdot 5^3)^2 : 3^4}$

c) $\dfrac{-4^3}{3^2} : \dfrac{(-2)^4}{3^5}$ d) $\dfrac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

3 Upravte:

a) $\dfrac{2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (yx)^2}{x^3y^4} \cdot (-x^4y^5)$ b) $\left(\dfrac{x \cdot y^2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{x^2 \cdot y}{4}\right)^2$

c) $\left(\dfrac{2x^2y}{x^3y}\right) : \left(\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{x^3}{y^2}\right)$ d) $\left(x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{2y}\right)^{-2} \cdot \left(-\dfrac{2x^2}{2y}\right)^{-4}$

4 Upravte:

a) $\dfrac{a^{n+1} \cdot b}{a \cdot b^{n+1}} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ b) $x^{n+2} \cdot \left(\dfrac{1}{y}\right)^{n+2} - \dfrac{x^2}{y^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^n$

c) $\left[\dfrac{(x-5)^2}{x-2}\right]^k \cdot \left[\dfrac{x^2-4}{x-5}\right]^k$ d) $\dfrac{(a-b)^{x+y+1} \cdot (a+b)^{x+y+1}}{(a^2-b^2)^{x+y}}$

5 Upravte:

a) $\left[\left(\dfrac{3a^2}{b}\right)^3 : \left(\dfrac{2a^2}{b}\right)\right] \cdot \dfrac{2b^2}{27a^4}$ b) $\left[a^{2r}b^s : \left(\dfrac{3a^r}{b^{3s}}\right)^2\right] \cdot \dfrac{9}{b^{7s}}$

c) $\left[\left(\dfrac{x^2y}{t^2z}\right)^{-1} : \left(\dfrac{xy}{zt}\right)^{-2}\right] \cdot \dfrac{z}{y}$ d) $\left[\left(\dfrac{x^2y}{z^3}\right)^k : \left(\dfrac{xz^2}{y}\right)^{2k}\right] \cdot \dfrac{z^{7k}}{y^{3k}}$

1. a) 3; b) 4; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{3}{2}$ **2.** a) 100; b) $\frac{36}{125}$; c) -108; d) $\frac{4}{5}$ **3.** a) $-8x^9y^3$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; b) $\frac{9x^2}{16y^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; c) $\frac{2y^3}{x^4}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; d) $\frac{4}{x^{10}}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ **4.** a) $\frac{2a^n}{b^n}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) 0, $y \neq 0$; c) $[(x+2)(x-5)]^k$, $x \neq 2$, $x \neq 5$; d) $a^2 - b^2$, $a \neq b$ **5.** a) 1, $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) 1, $a \neq 0$, $b \neq 0$; c) 1, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $t \neq 0$; d) 1, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$

Cvičení 7

1 Zapište všechny podmnožiny dané množiny:

a) $\{2, 7\}$ b) $\{\emptyset\}$ c) $\{5, 7, 9\}$ d) $\{0\}$

2 Určete doplněk množiny B vzhledem k množině A, jestliže:

a) $\mathsf{A} = \mathsf{N}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{N};\ |x| > 2\}$,
b) $\mathsf{A} = \mathsf{R}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{R};\ |x-1| < 0\}$,
c) $\mathsf{A} = \mathsf{Z}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ |x| > 2\}$,
d) $\mathsf{A} = \mathsf{R}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{R};\ |x-2| \geqq 0\}$.

3 Určete průnik a sjednocení množin A, B, jestliže:

a) $\mathsf{A} = \{-2, 0, 5, 7\}$, $\mathsf{B} = \{-3, -1, 0, 4, 7, 9\}$,
b) $\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{Z};\ x < -5\}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x \leqq -1\}$,
c) $\mathsf{A} = \mathsf{N}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ |x| < 3\}$,
d) $\mathsf{A} = \mathsf{N}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x < 1\}$.

4 Určete podmínky platnosti následujících vztahů:

a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A}$ b) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$ c) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A}$ d) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \emptyset$

5 Určete rozdíly $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}$ a $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A}$, jestliže:

a) $\mathsf{A} = \{-3, -1, 0, 5\}$, $\mathsf{B} = \{-1, 0, 1\}$,
b) $\mathsf{A} = \mathsf{N}$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ |x| \leqq 2\}$,
c) $\mathsf{A} = \mathsf{Z}$, $\mathsf{B} = \mathsf{N}$,
d) $\mathsf{A} = \mathsf{Z}^-$, $\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ |x-1| < 3\}$.

1. a) $\emptyset$, $\{2\}$, $\{7\}$, $\{2,7\}$; b) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$; c) $\emptyset$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$, $\{5,7\}$, $\{5,9\}$, $\{7,9\}$, $\{5,7,9\}$; d) $\emptyset$, $\{0\}$ **2.** a) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{1,2\}$; b) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{-2,-1,0,1,2\}$; d) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \emptyset$ **3.** a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{0,7\}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{-3,-2,-1,0,4,5,7,9\}$; b) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{B}$; c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{1,2\}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N} \cup \{-2,-1,0\}$; d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{Z}$ **4.** a) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$; b) $\mathsf{B} = \emptyset$; c) $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$; d) $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ **5.** a) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{-3,5\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{1\}$; b) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{N};\ x > 2\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{-2,-1,0\}$; c) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x \leqq 0\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \emptyset$; d) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x \leqq -2\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{0,1,2,3\}$

Cvičení 8

1 Na číselné ose znázorněte a jako interval zapište tyto množiny:

a) $\{x \in \mathsf{R}; -2 \leqq x \leqq 3\}$ b) $\{x \in \mathsf{R}; -7 < x \leqq -1\}$
c) $\{x \in \mathsf{R}; 5 \leqq x < 9\}$ d) $\{x \in \mathsf{R}; -1 < x < 0\}$

2 Zapište jako interval množinu všech

a) reálných čísel, b) záporných reálných čísel,
c) nezáporných reálných čísel, d) reálných čísel větších než -7.

3 Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

a) $\{x \in \mathsf{Z};\ x > 0\}$ b) $\{x \in \mathsf{R};\ x \geqq 3\}$
c) $\{x \in \mathsf{R};\ 1 \leqq x < 2\}$ d) $\{x \in \mathsf{N};\ x < 8\}$

4 Dané množiny zapište pomocí intervalů:

a) $\{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq 1\}$ b) $\{x \in \mathsf{R};\ |x| > 2\}$
c) $\{x \in \mathsf{R};\ |x| < 3\}$ d) $\{x \in \mathsf{R};\ |x| \geqq 0\}$

5 Určete sjednocení a průnik intervalů:

a) $\langle -2, 1\rangle$, $\langle 0, 3\rangle$ b) $(-3,-1)$, $(-1, 4\rangle$
c) $\langle -2, 3)$, $\langle 3, 5)$ d) $\langle -4, 0\rangle$, $\langle 0, 2)$

1. a) $\langle -2;3\rangle$; b) $(-7;-1\rangle$; c) $\langle 5;9)$; d) $(-1;0)$ **2.** a) $(-\infty;+\infty)$; b) $(-\infty;0)$; c) $\langle 0;+\infty)$; d) $(-7;+\infty)$ **3.** a) není interval; b) $\langle 3;+\infty)$; c) $\langle 1;2)$; d) není interval **4.** a) $\langle -1;1\rangle$; b) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; c) $(-3;3)$; d) $(-\infty;+\infty)$ **5.** a) $(-2;3\rangle$, $\langle 0;1\rangle$; b) $(-3;-1)\cup(-1;4)$, $\emptyset$; c) $\langle -2;5)$, $\emptyset$; d) $\langle -4;2)$, $\{0\}$

Cvičení 9

1 Rozhodněte, které z následujících výrazů jsou výroky:

a) $x+2$

b) $\forall x \in \mathsf{R}\colon x+2=3$

c) $x+2=3$

d) $1+1=2$

2 Zapište negace následujících výroků:

a) Existuje aspoň jedno reálné číslo x, pro které platí $x^2<0$.

b) Každé prvočíslo je liché číslo.

c) Rovnice $|x|=2$ má v množině R právě dva kořeny.

d) Rovnice $ax^2+bx+c=0$ má v množině R nejvýš dva kořeny.

Rozhodněte, které z uvedených negací jsou pravdivé výroky.

3 Rozhodněte, zda dané výrokové formule jsou tautologiemi:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

d) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

4 Dokažte, že neexistuje uspořádaná dvojice celých čísel $[x,y]$, která by splňovala rovnici $x^3+y^3=13xy+2$.

5 Dokažte, že existuje právě jedno prvočíslo p takové, že p^2+2 je také prvočíslo.

1. a) ne; b) ano; c) ne; d) ano **2.** a) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 \geqq 0$, pravdivý výrok. b) Existuje aspoň jedno prvočíslo, které je sudé, pravdivý výrok. c) Rovnice $|x| = 2$ má v množině R aspoň tři kořeny nebo nejvýš jeden kořen, nepravdivý výrok. d) Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má v množině R aspoň tři kořeny, nepravdivý výrok. **3.** a) ano; b) ne; c) ano; d) ne **4.** Návod. Rozlište 4 případy podle toho, zda jsou jednotlivá čísla x, y sudá či lichá. **5.** Návod. Uvažujte o dělitelnosti třemi.

Cvičení 10

1 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^3$. Dokažte.

2 $\forall a \in \mathsf{R}^+, \forall b \in \mathsf{R}^+\colon \sqrt{ab} \leqq \dfrac{a+b}{2}$. Dokažte.

3 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 6 \mid (n^3 - n)$. Dokažte.

4 $\forall a, b, c \in \mathsf{N}\colon a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$. Dokažte.

5 $\forall a, b, c \in \mathsf{R}^+\colon (a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geqq 9$. Dokažte.

5. Návod. Po roznásobení využijte třikrát vlastnost, že součet dvou kladných navzájem převrácených čísel není menší než 2.

Cvičení 11

1 Napište v rozvinutém tvaru čísla:

a) 327

b) 6 305

c) 12 826

d) 74 068

2 Napište zkrácený zápis čísel:

a) $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7$
b) $2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10$
c) $3 \cdot 10^6 + 5$
d) $8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6$

3 Určete ciferné součty daných čísel:

a) 8 023
b) 100
c) 1 000
d) 286 325

4 Dané zlomky zapište v základním tvaru:

a) $\dfrac{360}{504}$
b) $\dfrac{520}{1\,880}$
c) $\dfrac{8\,640}{15\,552}$
d) $\dfrac{192\,375}{415\,125}$

5 Pomocí proměnné $k \in \mathsf{N}$ vyjádřete

a) libovolné přirozené číslo, které je násobkem 6,
b) libovolné liché a libovolné sudé přirozené číslo,
c) všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná 5,
d) součin dvou po sobě jdoucích lichých čísel.

[**1.** a) $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$; b) $6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5$; c) $10^4 + 2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$; d) $7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10 + 8$ **2.** a) 3 517; b) 208 060; c) 3 000 005; d) 856 **3.** a) 13; b) 1; c) 1; d) 26 **4.** a) $\frac{5}{7}$; b) $\frac{13}{47}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{19}{41}$ **5.** a) $6k$; b) $2k - 1$, $2k$; c) $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$; d) $(2k + 1)(2k + 3)$]

Cvičení 12

1 Rozhodněte, kterými z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12 jsou dělitelná čísla:

a) 153
b) 1 460
c) 6 335
d) 454 528

2 V zápisu čísla $73*2$ doplňte na místo označené $*$ číslici tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné:

a) 3 b) 9
c) 4 d) 8

3 Vyslovte pravidla o dělitelnosti čísly:

a) 6 b) 12
c) 15 d) 18

4 Určete všechny dvojice $[x, y]$ přirozených čísel, pro něž platí:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ b) $2x + 3y = 25$
c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ d) $x^2 - y^2 = 15$

5 Dokažte:

a) Součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel je dělitelný 4.
b) Součet tří po sobě jdoucích sudých přirozených čísel je dělitelný 6.
c) Druhá mocnina lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná 8.
d) Součet dvou dvojciferných čísel, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný 11.

[**1.** a) 3, 9; b) 2, 4, 5, 10; c) 5; d) 2, 4 **2.** a) 0, 3, 6, 9; b) 6; c) 1, 3, 5, 7, 9; d) 1, 5, 9
4. a) [3; 6], [4; 4], [6; 3]; b) [11; 1], [8; 3], [5; 5], [2; 7]; c) [2; 2]; d) [8; 7], [4; 1]]

Cvičení 13

1 Zapište množinu všech dělitelů daného čísla:

a) 12 b) 48
c) 70 d) 143

2 Napište prvočíselný rozklad daného čísla:

a) 36 b) 349

c) 943 d) 105 840

3 Určete největší společný dělitel daných čísel:

a) 60, 48 b) 720, 1 080

c) 42, 66 d) 30, 42, 66

4 Určete nejmenší společný násobek daných čísel:

a) 24, 40 b) 27, 56

c) 8, 22, 26 d) 12, 18, 30

5 Určete $D(a,b)$, $n(a,b)$ a ověřte platnost vztahu $D(a,b) \cdot n(a,b) = ab$:

a) $a = 30$, $b = 40$ b) $a = 97$, $b = 37$

c) $a = 121$, $b = 66$ d) $a = 68$, $b = 76$

1. a) $\{1,2,3,4,6,12\}$; b) $\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$; c) $\{1,2,5,7,10,14,35,70\}$; d) $\{1,11,13,143\}$ **2.** a) $2^2 \cdot 3^2$; b) 349; c) $23 \cdot 41$; d) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ **3.** a) 12; b) 360; c) 6; d) 6 **4.** a) 120; b) 1 512; c) 1 144; d) 180 **5.** a) 10, 120; b) 1, 3 589; c) 11, 726; d) 4, 1 292

Cvičení 14

1 Najděte dvojciferné číslo, které má následující vlastnosti:

1. Ciferný součet čísla je 9.
2. Zaměníme-li pořadí obou číslic, dostaneme číslo, které je o 45 větší.

2 Najděte trojciferné číslo, které má následující vlastnosti:

1. Zápis čísla je zakončen číslicí 4.
2. Přesuneme-li poslední číslici čísla na první místo, dostaneme číslo, které je o 81 menší.

3 Najděte čtyřciferné číslo, které má následující vlastnosti:

1. Zápis čísla je zakončen číslicí 2.
2. Přesuneme-li poslední číslici čísla na první místo, dostaneme číslo, které je o 234 větší.

4 Které dvojciferné číslo se po vzájemné výměně obou cifer

a) zvětší o 36, b) zvětší o 37?

5 Je-li zápis čísla zakončen číslicí 5, pak jeho druhá mocnina je zakončena číslicí 25. Dokažte.

[**1.** 27 **2.** 534 **3.** 1 962 **4.** a) 15, 26, 37, 48, 59; b) žádné]

Cvičení 15

1 Je dán mnohočlen $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Vypočtěte:

a) $P(1)$ b) $P(2)$

c) $P(-1)$ d) $P(-2)$

2 Zjednodušte:

$6(2x^3 - 2x^2 + 5x - 1) - 5(3x^3 - 3x^2 + 4x + 2) + 3(x^3 - x^2 - 3x + 5)$.

3 Je dán mnohočlen $P(n) = 2n^3 - 3n^2 + 2n - 1$. Vypočtěte:

a) $P(3)$ b) $P(-4)$

c) $P(-n)$ d) $-P(n)$

4 Určete součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel, je-li nejmenší rovno

a) $3k$, b) $2k - 3$.

Určete součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel, je-li největší rovno

c) $3k - 2$, d) $2k$.

5 Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$2(a+b+c)-3 \leqq a^2+b^2+c^2.$$

[**1.** a) 0; b) -1; c) -4; d) -21 **2.** $x-1$ **3.** a) 32; b) -185; c) $-2n^3-3n^2-2n-1$; d) $-2n^3+3n^2-2n+1$ **4.** a) $9k+3$; b) $6k-6$; c) $9k-9$; d) $6k-3$ **5.** Návod. Využijte toho, že druhá mocnina libovolného reálného čísla je nezáporné číslo.]

Cvičení 16

1 Vynásobte:

a) $(x+1)(x-1)$ b) $(x+a)(x-a)$
c) $(x^2-x+1)(x+1)$ d) $(x^2+x+1)(x-1)$

2 Vynásobte:

a) $(a-b+c)(a+b-c)$ b) $(x-1)(x-2)(x-3)$
c) $(x+1)(x+1)(x+1)$ d) $(x+y+z)(x+y+z)$

3 Vydělte mnohočlen dvojčlenem:

a) $(x^3+8):(x+2)$ b) $(27x^3-8):(3x-2)$
c) $(5a^2-11a+2):(2-a)$ d) $(x^2+7x+12):(x+4)$

4 Umocněte:

a) $(x+10)^2$ b) $(m^2+n^2)^2$
c) $(x^3-1)^2$ d) $(5ab-c)^2$

5 Vydělte dané mnohočleny:

a) $(x^4 - 1) : (x^2 - 1)$,

b) $(a^6 + b^6) : (a^2 + b^2)$,

c) $(p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3) : (p^2 - 2pq + q^2)$,

d) $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b)$.

[**1.** a) x^2-1; b) x^2-a^2; c) x^3+1; d) x^3-1 **2.** a) $a^2-b^2-c^2+2bc$; b) $x^3-6x^2+11x-6$; c) x^3+3x^2+3x+1; d) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ **3.** a) x^2-2x+4; b) $9x^2+6x+4$; c) $-5a+1$; d) $x+3$ **4.** a) $x^2+20x+100$; b) $m^4+2m^2n^2+n^4$; c) x^6-2x^3+1; d) $25a^2b^2-10abc+c^2$ **5.** a) x^2+1; b) $a^4-a^2b^2+b^4$; c) $p-q$; d) $(a+b)^2$]

Cvičení 17

1 Rozložte na součin mnohočleny:

a) $a^2b - ab^2$

b) $2(a+b) + (a+b)^2$

c) $x^2 - xy - 3x + 3y$

d) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$

2 Rozložte na součin mnohočleny:

a) $8p^3 + 1$

b) $u^3 - 27v^3$

c) $x^3 - 9x$

d) $2x^5 - 16x^2$

3 Rozložte na součin mnohočleny:

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $x^2 + 5x - 6$

c) $x^2 + x - 6$

d) $x^2 - x - 6$

4 Rozložte na součin mnohočleny:

a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$

b) $2p^4 - p^3 + p - 2$

c) $x^3 - 3x^2 + 4$

d) $x^5 + x + 1$

5 Rozložte na součin mnohočleny:

a) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$
b) $t^3 + 3t^2 + 4t + 2$
c) $x^6 - y^6$
d) $x^4 + 1$

1. a) $ab(a - b)$; b) $(a + b)(a + b + 2)$; c) $(x - y)(x - 3)$; d) $(a + 3)(a^2 + 3)$ **2.** a) $(2p + 1)(4p^2 - 2p + 1)$; b) $(u - 3v)(u^2 + 3uv + 9v^2)$; c) $x(x + 3)(x - 3)$; d) $2x^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ **3.** a) $(x - 2)(x - 3)$; b) $(x + 6)(x - 1)$; c) $(x + 3)(x - 2)$; d) $(x - 3)(x + 2)$ **4.** a) $(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$; b) $(p + 1)(p - 1)(2p^2 - p + 2)$; c) $(x + 1)(x - 2)(x - 2)$; d) Návod. Mnohočlen $x^5 + x + 1$ lze zapsat ve tvaru $x^5 - x^2 + {}$ $+ x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1$; $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$ **5.** a) $(x^2 + 1)(2x^2 + x + 2)$; b) $(t + 1)(t^2 + 2t + 2)$; c) $(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$; d) Návod. Mnohočlen $x^4 + 1$ lze zapsat ve tvaru $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$; $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Cvičení 18

1 Určete definiční obory výrazů:

a) $\dfrac{2 - x}{x - 1}$
b) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$
c) $\dfrac{3x + 5}{2}$
d) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

2 Zkraťte:

a) $\dfrac{a^2 - ab}{a^2 + ab}$
b) $\dfrac{x^2 + 3xy}{x^2y + 3xy^2}$
c) $\dfrac{ac - bc + ad - bd}{ac + bc + ad + bd}$
d) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 12}$

3 Zapište jedním zlomkem:

$$\frac{1}{a - b} - \frac{3ab}{a^3 - b^3} - \frac{b - a}{a^2 + ab + b^2}.$$

4 Sečtěte: $\dfrac{1}{x-2a}+\dfrac{1}{x+2a}+\dfrac{8a^2}{4a^2x-x^3}$.

5 Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty proměnných platí:

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=1.$$

[**1.** a) $\mathsf{R}\setminus\{1\}$; b) $\mathsf{R}\setminus\{-2,2\}$; c) R; d) $\mathsf{R}\setminus\{2,3\}$ **2.** a) $\frac{a-b}{a+b}$, $a\neq 0$, $a\neq -b$; b) $\frac{1}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq 3y$; c) $\frac{a-b}{a+b}$, $a\neq -b$, $c\neq -d$; d) $\frac{x-3}{x+4}$, $x\neq 3$, $x\neq -4$ **3.** $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$, $a\neq b$, $a^2+ab+b^2\neq 0$ **4.** $\frac{2}{x}$, $x\neq 0$, $x\neq \pm 2a$]

Cvičení 19

1 Upravte:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

2 Upravte:

$$\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}\right):\left(\frac{a}{a+1}-\frac{a-1}{a}\right).$$

3 Upravte:

$$\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right).$$

4 Upravte:

$$\left[\frac{p^2-q^2}{pq}-\frac{1}{p+q}\left(\frac{p^2}{q}-\frac{q^2}{p}\right)\right]:\frac{p-q}{p}.$$

5 Upravte:

$$\left(\frac{1}{2x-y}+\frac{3y}{y^2-4x^2}-\frac{2}{2x+y}\right):\left(\frac{4x^2+y^2}{4x^2-y^2}+1\right).$$

[**1.** $\frac{a+b}{b-a}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ **2.** $\frac{a+1}{a-1}$, $a\neq \pm 1$, $a\neq 0$ **3.** $a-b$, $a\neq \pm b$ **4.** $\frac{p}{p+q}$, $p\neq 0$, $q\neq 0$, $p\neq \pm q$ **5.** $-\frac{1}{4x}$, $y\neq \pm 2x$, $x\neq 0$]

Cvičení 20

1 Ze vzorce $S=2\pi r^2+2\pi rv$ vyjádřete v.

2 Ze vzorce $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ vyjádřete r.

3 Ze vzorce $x=\dfrac{a+b}{a+d}$ vyjádřete d.

4 Ze vzorce $z=\dfrac{(a+b)xy}{ay+bx}$ vyjádřete x.

5 Ze vzorce $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ vyjádřete d.

[**1.** $v=\frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}$ **2.** $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ **3.** $d=\frac{a+b-ax}{x}$ **4.** $x=\frac{ayz}{ay+by-bz}$ **5.** $d=\frac{abc}{bc-ab-ac}$]

Rovnice a nerovnice

Cvičení 21

1 V R řešte rovnice:

a) $3(1-x)=7-3x$

b) $\dfrac{x-4}{9}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{5x-2}{6}$

c) $\dfrac{8x-5}{2}=2x-\dfrac{5x-4}{2}$

d) $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x-2}{3}=0$

2 V R řešte početně i graficky rovnice:

a) $x-4=0$

b) $2x+5=x-1$

c) $3x-1=x+1$

d) $\dfrac{x}{2}+1=\dfrac{1}{2}(x+2)$

3 V R řešte rovnice:

a) $\dfrac{7x-1}{3}+\dfrac{5+3x}{2}=5x-6$

b) $x+\dfrac{3-7x}{5}=\dfrac{x+3}{5}-\dfrac{2x-1}{3}$

c) $\dfrac{x+5}{3}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x-3}{2}$

d) $\dfrac{5x+1}{6}-\dfrac{7x-3}{8}=1-\dfrac{3x-1}{4}$

4 V R řešte rovnice:

a) $(5x-4)^2-(5-3x)^2=(3-4x)^2$,

b) $(2x-3)^2+(3x-4)^2+(4x-5)^2=29x^2-26$,

c) $(x-3)(x+2)-(x+2)(x-4)=7$,

d) $(2x-5)(8x-1)-(4x-3)^2=12(x-1)-7$.

5 V R řešte rovnice:

a) $\dfrac{1}{3}(x-2)-\dfrac{1}{7}(5x-6)=\dfrac{22x-63}{105}-\dfrac{1}{5}(3x-4)$,

b) $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)-3\right]-3\right\}=0$,

c) $5x+3{,}48-2{,}35x=5{,}381-2{,}9x+10{,}42$,

d) $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1)$.

[**1.** a) nemá řešení; b) $-\frac{8}{7}$; c) 1; d) -1 **2.** a) 4; b) -6; c) 1; d) řešením je každé číslo **3.** a) 7; b) 5; c) nemá řešení; d) 1 **4.** a) $\frac{9}{7}$; b) 1; c) 5; d) $\frac{1}{2}$ **5.** a) 1; b) 42; c) $\frac{4\,107}{1\,850}$; d) $-\frac{2}{3}$]

Cvičení 22

1 V trojúhelníku ABC je velikost úhlu β rovna jedné třetině velikosti úhlu α a současně je o 20° větší než velikost úhlu γ. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku.

2 Ze dvou míst A a B vzdálených 24 km vyrazí ve stejný okamžik proti sobě chodec rychlostí 4 km za hodinu a cyklista rychlostí 12 km za hodinu. Za kolik hodin a v jaké vzdálenosti od místa A, z něhož vyšel chodec, se setkají?

3 V továrně pracuje ve třech odděleních 1 200 dělníků. V prvním oddělení je jich dvakrát více než v druhém a ve třetím o 400 více než v prvním. Kolik dělníků je v každém oddělení?

4 Smísí-li se 5 kg kávy dražší a 10 kg kávy levnější, je cena 1 kg směsi 220 Kč. Určete cenu 1 kg dražší a 1 kg levnější kávy, liší-li se jejich ceny o 30 Kč?

5 Cyklista jede rychlostí 20 km/h. O kolik km/h musí zvýšit svou rychlost, aby projel dráhu 84 km za 3 hodiny?

[**1.** $\alpha = 120^\circ$; $\beta = 40^\circ$; $\gamma = 20^\circ$ **2.** 1,5 hod; 6 km **3.** 320; 160; 720 **4.** 240 Kč; 210 Kč **5.** o 8 km/h]

Cvičení 23

1 Láhev se zátkou stojí 4,60 Kč, láhev je o 4 Kč dražší než zátka. Kolik stojí láhev a kolik stojí zátka?

2 Ve třídě měla třetina žáků vyznamenání, 60 % žáků prospělo a dva žáci neprospěli. Kolik žáků je ve třídě?

3 Na dvoře jsou slepice a králíci. Mají dohromady 35 hlav a 94 nohy. Kolik je slepic a kolik králíků?

4 Kolik gramů 30% kyseliny dusičné je třeba přidat ke 100 g 10% kyseliny dusičné, abychom dostali 25% kyselinu dusičnou?

5 Kolik gramů pevného $NaNO_3$ musíme přidat do 450 g 15% roztoku $NaNO_3$, aby vznikl 25% roztok?

[**1.** 4,30 Kč; 0,30 Kč **2.** 30 **3.** 23 slepice; 12 králíků **4.** 300 g **5.** 60 g]

Cvičení 24

1 V R řešte rovnice:

a) $x^2 + 2x = 0$ b) $x^2 - 2x = 0$

c) $-x^2 + 2x = 0$ d) $-x^2 - 2x = 0$

2 V R řešte rovnice:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 - 4 = 0$

c) $-x^2 + 4 = 0$ d) $-x^2 - 4 = 0$

3 V R řešte rovnice:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$
b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
c) $-x^2 - 2x - 1 = 0$
d) $-x^2 + 2x - 1 = 0$

4 V R řešte rovnice:

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
c) $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$
d) $-x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

5 V R řešte rovnice:

a) $x^4 - 4x^2 = 0$
b) $x^4 + 4x^2 = 0$
c) $-x^4 + 4x^2 = 0$
d) $-x^4 - 4x^2 = 0$

1. a) 0, -2; b) 0, 2; c) 0, 2; d) 0, -2 **2.** a) nemá řešení; b) 2, -2; c) 2, -2; d) nemá řešení **3.** a) -1; b) 1; c) -1; d) 1 **4.** a) -1, 1; b) nemá řešení; c) -1, 1; d) nemá řešení **5.** a) -2, 0, 2; b) 0; c) -2, 0, 2; d) 0

Cvičení 25

1 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$
b) $x^2 - 3x + 2 = 0$
c) $x^2 + x - 2 = 0$
d) $x^2 - x - 2 = 0$

2 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $x^2 + 13x + 40 = 0$
b) $x^2 - 13x + 40 = 0$
c) $x^2 + 3x - 40 = 0$
d) $x^2 - 3x - 40 = 0$

3 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 2 = 0$
d) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

4 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$ b) $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0$

c) $-x^2 + x - \dfrac{1}{4} = 0$ d) $-x^2 - x - \dfrac{1}{4} = 0$

5 Dané rovnice řešte v R bez použití vzorce pro výpočet kořenů:

a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

c) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ d) $-4x^2 - 12x - 9 = 0$

[**1.** a) -2, 1; b) 1, 2; c) -2, 1; d) -1, 2 **2.** a) -8, -5; b) 5, 8; c) -8, 5; d) -5, 8 **3.** a) nemá řešení; b) $-\sqrt{2}$, -1, 1, $\sqrt{2}$; c) -1, 1; d) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ **4.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$ **5.** a) $\frac{3}{2}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$]

Cvičení 26

1 Rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$ řešte v R:

a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

2 Rovnici $x^2 + 2x + 1 = 0$ řešte v R:

a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

3 Rovnici $x^2 + x + 1 = 0$ řešte v R:
a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

4 Rovnici $6x^2 - 5x + 1 = 0$ řešte v R:
a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

5 Rovnici $4x^2 - 5x + 1 = 0$ řešte v R:
a) zpaměti,
b) rozkladem na součin lineárních dvojčlenů,
c) doplněním na druhou mocninu dvojčlenu,
d) užitím vzorce pro výpočet kořenů.

[**1.** a) 2, 3; b) $(x-2)(x-3) = 0$; c) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; d) $D = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ **2.** a) -1; b) $(x+1)(x+1) = 0$; c) $(x+1)^2 = 0$; d) $D = 0$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$ **3.** a) nemá řešení; b) v R nelze rozložit; c) $(x+1)^2 + \frac{3}{4} = 0$; d) $D = -3$ **4.** a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; b) $(2x-1)(3x-1) = 0$; c) $(x - \frac{5}{12})^2 = \frac{1}{144}$; d) $D = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}$ **5.** a) 1, $\frac{1}{4}$; b) $(4x-1)(x-1) = 0$; c) $(x - \frac{5}{8})^2 = \frac{9}{64}$; d) $D = 9$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$]

Cvičení 27

1 Sestavte rovnici $x^2 + px + q = 0$, která má kořeny:
a) 1, 2 b) 1, -2 c) -1, 2 d) -1, -2

2 Sestavte kvadratickou rovnici s co nejmenšími celočíselnými koeficienty, která má kořeny:

a) $\frac{1}{2}, 3$ b) $\frac{1}{2}, -3$ c) $-\frac{1}{2}, 3$ d) $-\frac{1}{2}, -3$

3 Sestavte rovnici $x^2 + px + q = 0$, která má kořeny:

a) $0, 1$ b) $0, -1$
c) $x_1 = x_2 = -1$ d) $x_1 = x_2 = 0$

4 Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny:

a) $u, \frac{1}{u}$ b) $\frac{u}{v}, \frac{v}{u}$
c) $2u, 3u$ d) $u, -2v$

5 Sestavte kvadratickou rovnici, která má za kořeny čísla, jež ve vztahu ke kořenům dané rovnice $x^2 + px + q = 0$ jsou:

a) čísla opačná, b) čísla převrácená,
c) jejich n násobky, d) čísla o n menší.

1. a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $x^2 + x - 2 = 0$; c) $x^2 - x - 2 = 0$; d) $x^2 + 3x + 2 = 0$ **2.** a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; c) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; d) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ **3.** a) $x^2 - x = 0$; b) $x^2 + x = 0$; c) $x^2 + 2x + 1 = 0$; d) $x^2 = 0$ **4.** a) $ux^2 - (u^2 + 1)x + u = 0$, $u \neq 0$; b) $uvx^2 - (u^2 + v^2)x + uv = 0$, $uv \neq 0$; c) $x^2 - 5ux + 6u^2 = 0$; d) $x^2 - (u - 2v)x - 2uv = 0$ **5.** a) $x^2 - px + q = 0$; b) $x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0$; c) $x^2 + npx + n^2q = 0$; d) $x^2 + (p + 2n)x + q + np + n^2 = 0$

Cvičení 28

1 V R řešte rovnice:

a) $x^3 + 8 = 0$ b) $x^5 + 32 = 0$
c) $x^3 - 8 = 0$ d) $x^5 - 32 = 0$

2 V R řešte rovnice:

a) $x^3 + x^2 = 0$
b) $x^3 - x^2 = 0$
c) $x^4 + x = 0$
d) $x^4 - 2x^3 = 0$

3 V R řešte rovnice:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$
c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
d) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$

4 V R řešte rovnice:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$
b) $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = 0$
c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$
d) $x^6 - x^4 - 16x^2 + 16 = 0$

5 Vhodnou substitucí řešte v R rovnice:

a) $(x^2 + 4x + 2)(x^2 + 4x + 1) - 2 = 0$,
b) $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 4x - 2) - 6 = 0$,
c) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x - 3) - 12 = 0$,
d) $(x^2 - x)^2 - 26(x^2 - x - 5) - 10 = 0$.

[**1.** a) -2; b) -2; c) 2; d) 2 **2.** a) 0, -1; b) 0, 1; c) 0, -1; d) 0, 2 **3.** a) -2, -1, 1, 2; b) -4, -1, 1; c) -2, -1, 1; d) -5, -2, 2 **4.** a) -3, -2, -1; b) -1, 1; c) -1, 1, 2, 3; d) -2, -1, 1, 2 **5.** a) -4, -3, -1, 0; b) -4, -5, 0, 1; c) -3, -2, 1, 2; d) -4, -2, 3, 5]

Cvičení 29

1 V R^2 řešte soustavy lineárních rovnic:

a) $4x + 3y = 6$
$2x + y = 4$

b) $4x + 3y = 4$
$6x + 5y = 7$

c) $3x - 5y = 14$
$6x - 10y = 17$

d) $3x - 5y = 11$
$6x - 10y = 22$

2 V R^2 řešte soustavy lineárních rovnic:

a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$
$\frac{y}{2} = 1 - \frac{1}{6}x$

b) $\frac{3x+4y}{2} - \frac{4x-7y}{4} = 1$
$\frac{4x-3y}{6} - \frac{14x-9y}{4} = 2$

c) $2{,}5x + 3{,}1y + 1 = 0$
$7{,}5x + 9{,}3y + 2 = 0$

d) $4x - \frac{1}{7}y = \frac{1}{5}y - 3x - \frac{1}{2}$
$(x+y)\frac{1}{6} = \frac{1}{5}(y-1) + x$

3 Pro které hodnoty parametru $b \in \mathsf{R}$ má soustava lineárních rovnic právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, nemá řešení?

a) $x - y = b$
$x + y = 5$

b) $x + 2y = 1$
$2x + 4y = b$

c) $2x + 3y = 4$
$4x + by = 2b$

d) $b^2x + y = 1$
$x + y = b$

4 V R^3 řešte soustavy lineárních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0\\ 2x + y - z &= 1\\ 4x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 17\\ x - y + z &= 13\\ -x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4\\ 2x + 4y + 6z &= 3\\ 3x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 1\\ 3x + 4y + 7z &= 2\\ 5x + 6y + 9z &= 3 \end{aligned}$$

5 V R^4 řešte soustavy lineárních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 2t &= 6\\ 2x - y - 2z - 3t &= 8\\ 3x + 2y - z + 2t &= 4\\ 2x - 3y + 2z + t &= -8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 10\\ 2x + y - z + 3t &= 5\\ 3x + 4y - z - t &= 5\\ 7x + 7y - 6z - 3t &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - z + t &= 2\\ x - t &= -1\\ y + z &= 0\\ x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + y &= 4\\ y + z &= 8\\ z + t &= 12\\ x + t &= 8 \end{aligned}$$

1. a) $[3; -2]$; b) $[-\frac{1}{2}; 2]$; c) nemá řešení; d) nekonečně mnoho řešení $\{[x; \frac{3x-11}{5}]; x \in \mathsf{R}\}$ **2.** a) nekonečně mnoho řešení $\{[x; \frac{6-x}{3}], x \in \mathsf{R}\}$; b) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}]$; c) nemá řešení; d) $[\frac{1}{10}; \frac{7}{2}]$ **3.** a) soustava má řešení pro každé $b \in \mathsf{R}$, $[\frac{b+5}{2}; \frac{5-b}{2}]$; b) soustava nemá řešení pro $b \neq 2$, soustava má nekonečně mnoho řešení pro $b = 2$, $\{[t; \frac{1-t}{2}]; t \in \mathsf{R}\}$; c) soustava má jedno řešení pro $b \neq 6$, $[\frac{b}{6-b}; \frac{2b-8}{b-6}]$, soustava nemá řešení pro $b = 6$; d) soustava má jedno řešení pro $b \neq 1$, $b \neq -1$, $[-\frac{1}{b+1}; \frac{b^2+b-1}{b+1}]$, soustava má nekonečně mnoho řešení pro $b = 1$, $\{[t; 1-t]; t \in \mathsf{R}\}$, soustava nemá řešení pro $b = -1$ **4.** a) $[1; 1; 2]$; b) $[15; 12; 10]$; c) nemá řešení; d) nekonečně mnoho řešení $\{[3t; \frac{1}{2} - 4t; t]; t \in \mathsf{R}\}$ **5.** a) $[1; 2; -1; -2]$; b) nemá řešení; c) $[2; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 3]$; d) nekonečně mnoho řešení $\{[8-t; -4+t; 12-t; t]; t \in \mathsf{R}\}$

Cvičení 30

1 Určete dvě čísla, jejichž rozdíl i podíl se rovná 4.

2 Dvě auta vyjela současně ze dvou míst vzdálených 30 km. Jedou-li proti sobě, setkají se za 15 minut. Jedou-li za sebou, dohoní jedno auto druhé za 1 hodinu. Určete rychlosti obou aut.

3 Otci je o osm let více, než je trojnásobek věku syna. Za 20 let bude otec dvakrát tak stár jako syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

4 Kolik kg železa a kolik kg síry obsahuje 100 kg sulfidu železnatého FeS, je-li relativní atomová hmotnost železa 56 a relativní atomová hmotnost síry 32?

5 Nádrž se plní třemi přívody A, B, C. Jsou-li otevřeny pouze přívody A a C, naplní se za 1 hodinu, jsou-li otevřeny pouze přívody A a B, naplní se za 45 minut, jsou-li otevřeny pouze přívody B a C, naplní se za 1 hodinu a 30 minut. Za jak dlouho by se naplnila nádrž každým přívodem zvlášť?

[**1.** $\frac{16}{3}$, $\frac{4}{3}$ **2.** $v_1 = 75\,\mathrm{km/h}$; $v_2 = 45\,\mathrm{km/h}$ **3.** 12; 44 **4.** $63{,}\overline{63}\,\mathrm{kg}$ Fe, $36{,}\overline{36}\,\mathrm{kg}$ S **5.** přívod A 1 hodina 12 minut; přívod B 2 hodiny; přívod C 6 hodin]

Cvičení 31

1 V R řešte nerovnice:

a) $2x + 3 \geqq 0$ b) $2x + 3 > 0$

c) $2x + 3 \leqq 0$ d) $2x + 3 < 0$

2 V R řešte nerovnice:

a) $3x + 5 < 2 - 7x$ b) $3x - 1 > 1 - 3(1 - x)$

c) $3x - 7 \leqq 5x + 6$ d) $x + 2 \geqq 2(x + 1) - 1$

3 V N řešte nerovnice:

a) $\dfrac{2}{5}x - 3 > 5x - 11$ b) $4x - \dfrac{3x + 1}{4} \leqq 18$

c) $10x + \dfrac{5}{2} \geqq 3(x - 1) + \dfrac{3}{4}x$ d) $3x - 4 > \dfrac{1}{2}x - (3x - 4)$

4 V R řešte graficky nerovnice:

a) $x + 2 < -2x + 8$ b) $2x - 3 \geqq 4 - \dfrac{3}{2}x$

c) $\dfrac{1}{2}x + 4 \geqq 10 - x$ d) $\dfrac{13x}{6} - \dfrac{2}{3} \leqq x + \dfrac{1}{2}$

5 Dokažte, že pro všechna $m \in$ R platí:

$$\frac{2m + 1}{2} < \frac{3m + 2}{3} < m + 1.$$

[**1.** a) $\langle -\frac{3}{2}; +\infty)$; b) $(-\frac{3}{2}; +\infty)$; c) $(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle$; d) $(-\infty; -\frac{3}{2})$ **2.** a) $\langle -\infty; -\frac{3}{10})$; b) R; c) $\langle -\frac{13}{2}; +\infty)$; d) $(-\infty; 1\rangle$; **3.** a) $(-\infty; \frac{40}{23})$; b) $(-\infty; \frac{73}{13}\rangle$; c) $\langle -\frac{22}{25}; +\infty)$; d) $(\frac{16}{11}; +\infty)$ **4.** a) $(-\infty; 2)$; b) $\langle 2; +\infty)$; c) $\langle 4; +\infty)$; d) $(-\infty; 1\rangle$]

Cvičení 32

1 V R řešte nerovnice:

a) $(x-1)(x+1) \geqq 0$ b) $(x-1)(x+1) > 0$

c) $(x-1)(x+1) \leqq 0$ d) $(x-1)(x+1) < 0$

2 V R řešte nerovnice:

a) $x^2 - 5x + 6 \geqq 0$ b) $x^2 - 5x + 6 > 0$

c) $x^2 - 5x + 6 \leqq 0$ d) $x^2 - 5x + 6 < 0$

3 V R řešte nerovnice:

a) $x^2 \geqq x$ b) $x^2 > x$

c) $x^2 \leqq x$ d) $x^2 < x$

4 V R řešte nerovnice:

a) $x^2 + x + 1 \geqq 0$ b) $x^2 + x + 1 > 0$

c) $x^2 + x + 1 \leqq 0$ d) $x^2 + x + 1 < 0$

5 V R řešte graficky nerovnice:

a) $x^2 + x - 1 \geqq 0$ b) $x^2 + x - 1 < 0$

c) $2x^2 - x - 1 \leqq 0$ d) $3x^2 - 2x - 2 > 0$

1. a) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty)$; b) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; c) $\langle -1; 1\rangle$; d) $(-1; 1)$
2. a) $(-\infty; 2\rangle \cup \langle 3; +\infty)$; b) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; c) $\langle 2; 3\rangle$; d) $(2; 3)$ **3.** a) $(-\infty; 0\rangle \cup$ $\cup \langle 1; +\infty)$; b) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; c) $\langle 0; 1\rangle$; d) $(0; 1)$ **4.** a) R; b) R; c) $\emptyset$; d) $\emptyset$
5. a) $\left(-\infty; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; b) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; c) $\left\langle -\frac{1}{2}; 1\right\rangle$;
d) $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$

Cvičení 33

1 Který konvexní n-úhelník má aspoň dvakrát více úhlopříček než stran?

2 Množství $10\,\mathrm{l}$ vody o teplotě $13\,^\circ\mathrm{C}$ smícháme s $12{,}5\,\mathrm{l}$ teplejší vody. Jakou teplotu musí mít přidaná voda, abychom získali vodu o teplotě větší než $25\,^\circ\mathrm{C}$ a menší než $30\,^\circ\mathrm{C}$?

3 Důl A je od dolu B vzdálen s km. Cena 1 t uhlí v dole A je q Kč a v dole B o $p\,\%$ vyšší. Do jakých vzdáleností mezi doly A a B je výhodnější dovážet uhlí z dolu B, jestliže cena za převoz jednoho metrického centu uhlí na vzdálenost 1 km je n Kč?

4 Město leží na břehu řeky. V jaké vzdálenosti od městského přístavu směrem proti toku řeky se má vybrat místo pro pláž, aby cesta tam a zpět motorovým člunem trvala nejvíce t minut, je-li vlastní rychlost člunu v km/min a rychlost toku řeky je v_1 km/min?

5 Nechť je průměrná hmotnost dospělého člověka p kg a jeho objem $v\,\mathrm{dm}^3$. Vypočtěte, kolik korkových desek o objemu $v_1\,\mathrm{dm}^3$ je třeba na záchranný pás, který by při svém úplném ponoření podržel nad povrchem hladiny nádrže aspoň $f\,\%$ objemu plavce. Hustota korku je $0{,}2\,\mathrm{kg/dm}^3$.

[**1.** Návod. Uvažte, že počet úhlopříček n-úhelníku je $\frac{1}{2}n(n-3)$; $n \geqq 7$ **2.** $34{,}6\,^\circ\mathrm{C} < x < 43{,}6\,^\circ\mathrm{C}$ **3.** Návod. Označíme-li x vzdálenost od dolu B v km, dostaneme nerovnici $\frac{q}{100}(100+p)+nx < q+(s-x)n$. $0 \leqq x < \frac{100sn-qp}{200n}$ **4.** Nejvýše $\frac{t(v^2-v_1^2)}{2v}$ km **5.** Nejméně $\frac{100p-(100-f)v}{80v_1}$ desek, hustota vody je $1\,\mathrm{kg/dm}^3$]

Cvičení 34

1 V R řešte soustavy nerovnic:

a) $-3 \leqq 2(x+2) \leqq 6$

b) $\dfrac{3}{5} \leqq 5x-1 \leqq \dfrac{7}{10}$

c) $2 \leqq 3x+1 \leqq 4$

d) $-2 \leqq \dfrac{2}{3} - x \leqq 2(x+1)$

2 V R řešte zpaměti soustavy nerovnic:

a) $0 < |x-2| \leqq 3$ b) $0 < |x-2| < 3$

c) $0 \leqq |x-2| \leqq 3$ d) $0 \leqq |x-2| < 3$

3 V R řešte soustavy nerovnic:

a) $x - 2 < 3x - 4 \ \wedge \ 2x + 3 > 5x + 1$,

b) $3x - 1 > 2x + 5 \ \wedge \ x + 3 > 2 - x$,

c) $7 - 3x \leqq x - 1 \ \wedge \ x - 3 > 2x - 6$,

d) $\dfrac{4x-3}{4} + \dfrac{3x-1}{6} \geqq \dfrac{1}{3} \ \wedge \ 3x - 2 \leqq 2(x+2)$.

4 V soustavě souřadnic zobrazte množinu všech bodů o souřadnicích $[x, y]$, pro něž platí:

a) $x + y \geqq 2 \ \wedge \ -5x + 2y \geqq 4$ b) $|x| + |y| \leqq 1$

c) $x + y \leqq 2 \ \wedge \ -2x + 3y \leqq 1$ d) $|x-2| + |y-2| \leqq 1$

5 V soustavě souřadnic zobrazte množinu všech bodů o souřadnicích $[x, y]$, pro něž platí:

a) $\begin{aligned} x + y &\geqq 3 \\ 2y - 2x &\geqq 2 \\ 3y - 2x &\leqq 9 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 2y &\geqq 6 \\ y &\geqq 0 \\ 5x + 8y &\leqq 40 \\ x &\geqq 0 \end{aligned}$

[**1.** a) $\langle -\frac{7}{2}; 1\rangle$; b) $\langle \frac{8}{25}; \frac{17}{50}\rangle$; c) $\langle \frac{1}{3}; 1\rangle$; d) $\langle -\frac{4}{9}; \frac{8}{3}\rangle$ **2.** a) $\langle -1; 2) \cup (2; 5\rangle$; b) $(-1; 2) \cup$ $\cup\, (2; 5)$; c) $\langle -1; 5\rangle$; d) $(-1; 5)$ **3.** a) nemá řešení; b) $(6; +\infty)$; c) $\langle 2; 3)$; d) $\langle \frac{5}{6}; 6\rangle$]

Cvičení 35

1 V R řešte nerovnice:

a) $x^3 \geqq x$ b) $x^3 < x$

c) $x^3 > x$ d) $x^3 \leqq x$

2 V R řešte nerovnice:

a) $x^3 \geqq x^2$

b) $x^3 < x^2$

c) $x^3 > x^2$

d) $x^3 \leqq x^2$

3 V R řešte nerovnice:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 \leqq 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$

c) $x^4 + x^2 - 2 > 0$

d) $x^4 - x^2 - 2 \geqq 0$

4 V R řešte nerovnici:
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leqq 0.$

5 V R řešte nerovnici:
$x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4 \geqq 0.$

1. a) $\langle -1; 0\rangle \cup \langle 1; +\infty)$; b) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$; c) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; d) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 0; 1\rangle$
2. a) $\{0\} \cup \langle 1; +\infty)$; b) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$; c) $(1; +\infty)$; d) $(-\infty; 1\rangle$ **3.** a) $\langle -3; -1\rangle \cup$
$\cup \langle 1; 3\rangle$; b) $(-2; -1) \cup (1; 2)$; c) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; d) $(-\infty; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}; +\infty)$
4. $(-\infty; 1\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$ **5.** $\langle -2; 1\rangle \cup \langle 2; +\infty)$

Cvičení 36

1 V R řešte rovnice:

a) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{2}{x+2} - 1 = \dfrac{6}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{2x-5}{3x-4} - \dfrac{4x-5}{6x-1} = 0$

c) $\dfrac{3+4x}{x^2+x} - 1 = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{x+1}$

d) $\dfrac{x+3}{x+5} = 3 - \dfrac{1-2x}{3-x}$

2 V R řešte rovnice:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{x^3}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+2}{x-1} = 3$

d) $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{x+3}{x+4} = \dfrac{1-x}{15x}$

3 V R řešte nerovnice:

a) $\dfrac{2x-3}{3x-7} > 0$ b) $\dfrac{6x-5}{4x+1} < 0$

c) $\dfrac{3}{x-2} < 0$ d) $\dfrac{1}{x-1} \geqq 0$

4 V R řešte nerovnice:

a) $\dfrac{4x+3}{2x-5} < 6$ b) $\dfrac{5x-6}{x+6} \leqq 1$

c) $\dfrac{5x+8}{4-x} \geqq 2$ d) $\dfrac{x-1}{x+3} > 2$

5 V R řešte nerovnice:

a) $x \leqq \dfrac{6}{x-5}$ b) $\dfrac{4}{x+2} \geqq 3-x$

c) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{x+2}$ d) $x - 17 \geqq \dfrac{60}{x}$

1. a) nemá řešení; b) -15; c) $x \in \mathrm{R} \setminus \{-1, 0\}$; d) $-\frac{31}{3}$ **2.** a) $-2,\ 1$; b) $-3,\ 2$; c) $-2,\ 3$; d) $-4-\sqrt{10},\ -4+\sqrt{10},\ 2$ **3.** a) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; b) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{6}\right)$; c) $(-\infty; 2)$; d) $(1; +\infty)$ **4.** a) $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{33}{8}; +\infty\right)$; b) $(-6; 3\rangle$; c) $\langle 0; 4)$; d) $\langle -7; -3)$ **5.** a) $(-\infty; -1\rangle \cup (5; 6\rangle$; b) $(-2; -1\rangle \cup \langle 2; +\infty)$; c) $\left(-2; 2-2\sqrt{2}\right\rangle \cup (0; 2) \cup$ $\cup \left\langle 2+2\sqrt{2}; +\infty\right)$; d) $\langle -3; 0) \cup \langle 20; +\infty)$

Cvičení 37

1 V R řešte početně a graficky rovnice:

a) $|x| = 2$ b) $|x-1| = 2$

c) $|x-1| = 0$ d) $|x+1| = 2$

2 V R řešte početně a graficky rovnice:

a) $|x| + x = 0$ b) $|x| - x = 0$

c) $|x| + x = 2$ d) $|x| - x = 2$

3 V R řešte početně a graficky rovnice:

a) $|x+1| + |x-1| = 4$ b) $|x+1| - |x-1| = 4$

c) $|x-1| = |x+1|$ d) $|x-1| = 4 + |x+1|$

4 V R řešte nerovnice:

a) $|x+2| \geqq 1$ b) $|x-2| > 1$

c) $|x+2| \leqq 1$ d) $|x-2| < 1$

5 V R řešte nerovnice:

a) $|x| < \dfrac{1}{x-1}$ b) $\dfrac{3}{|x+1|} \geqq 1$

c) $|x+2| + |x-3| > x + 5$ d) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 1$

1. a) $-2,\ 2$; b) $-1,\ 3$; c) 1; d) $-3,\ 1$ **2.** a) $(-\infty; 0\rangle$; b) $\langle 0; +\infty)$; c) 1; d) -1 **3.** a) $-2,\ 2$; b) nemá řešení; c) 0; d) nemá řešení **4.** a) $(-\infty; -3\rangle \cup \langle -1; +\infty)$; b) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; c) $\langle -3; -1\rangle$; d) $(-3; 1)$ **5.** a) $\left(1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; b) $\langle -4; -1) \cup (-1; 2\rangle$; c) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$; d) $(0; +\infty)$

Cvičení 38

1 V R řešte rovnice:

a) $\sqrt{12-x} + x = 0$ b) $\sqrt{12-x} - x = 0$

c) $\sqrt{7-x} = x - 1$ d) $\sqrt{7-x} = 1 - x$

2 V R řešte rovnice:

a) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$

b) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$

c) $\sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1}$

d) $2\sqrt{x-1}=2-\sqrt{x+3}$

3 V R řešte rovnice:

a) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$

b) $4+\sqrt{26-x^2}=x$

c) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$

d) $\sqrt{9x^2-6x+16}-2=3x$

4 V R řešte rovnice:

a) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$

b) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=12$

c) $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3$

d) $\sqrt[3]{3x+28}-\sqrt[3]{3x-28}=2$

5 V R řešte nerovnice:

a) $\sqrt{x+7}>2x-1$

b) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>1$

c) $\sqrt{x+6}<x-6$

d) $\sqrt{5x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

[**1.** a) -4; b) 3; c) 3; d) -2 **2.** a) 2; b) -1, 15; c) -1, 3; d) 1 **3.** a) 1; b) 5; c) -1; d) $\frac{2}{3}$ **4.** a) 7; b) 81; c) 27, $-\frac{1}{8}$; d) -12, 12 **5.** a) $\langle -7; 2)$; b) $\langle -1; 3\rangle$; c) $(10; +\infty)$; d) $\langle \frac{5}{2}; 15)$]

Cvičení 39

1 V R řešte rovnice s parametrem $p \in \mathsf{R}$:

a) $p^2(x-1)=2(px-2)$

b) $\sqrt{x^2+p}=p-x$

c) $\dfrac{p}{x}-\dfrac{1}{px}=1-\dfrac{1}{p}$

d) $px(1-p)=1$

2 V $\mathbb{R}$ řešte rovnice s parametrem $p \in \mathbb{R}$:

a) $p(x-1) + x(p-1) = p - 2x$

b) $p\left(2 - \frac{x}{3}\right) = 4\left(3 - \frac{x}{2}\right)$

c) $(p-1)x = 2 - \frac{2}{p}$

d) $\frac{x+1}{p} = x - 1 - \frac{x+3}{p}$

3 V $\mathbb{R}$ řešte rovnice s parametrem $p \in \mathbb{R}$:

a) $|x-p| = 3p$

b) $x + \sqrt{x^2 - p} = p$

c) $p - \frac{1}{p} = \frac{p^2-1}{x}$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = p$

4 V $\mathbb{R}$ řešte nerovnice s parametrem $p \in \mathbb{R}$:

a) $p(x-1) > x - 2$

b) $px^2 + 2x - p > 0$

c) $3x - px < 2$

d) $\sqrt{1-x^2} < x + p$

5 V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici s parametrem $p \in \mathbb{R}$:

$$2x(2p-1) - x(2p-3) \leqq p + x.$$

1. a) $p=0$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p=2$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}$; $p\neq 0$, $p\neq 2\Rightarrow \mathsf{K}=\{\frac{p+2}{2}\}$; b) $p=0$, $\mathsf{K}=(-\infty,0\rangle$; $p\neq 0$, $p\geqq -1$, $\mathsf{K}=\{\frac{p-1}{2}\}$; $p<-1$, $\mathsf{K}=\emptyset$; c) $p=1$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}\setminus\{0\}$; $p\neq 1$, $p\neq -1$, $\mathsf{K}=\{p+1\}$; $p=-1$, $\mathsf{K}=\emptyset$; d) $p=0$, $p=1$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p\neq 0$, $p\neq 1\Rightarrow \mathsf{K}=\{\frac{1}{p(1-p)}\}$ **2.** a) $p=-\frac{1}{2}$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p\neq -\frac{1}{2}$, $\mathsf{K}=\{\frac{2p}{2p+1}\}$; b) $p=6$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}$; $p\neq 6$, $\mathsf{K}=\{6\}$; c) $p=0$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p=1$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}$; $p\neq 0$, $p\neq 1$, $\mathsf{K}=\{\frac{2}{p}\}$; d) $p=0$, $p=2$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p\neq 0$, $p\neq 2$, $\mathsf{K}=\{\frac{p+4}{p-2}\}$ **3.** a) $p<0$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p=0$, $\mathsf{K}=\{0\}$; $p>0$, $\mathsf{K}=\{-2p,4p\}$; b) $p=0$, $\mathsf{K}=(-\infty;0\rangle$; $p\geqq 1$, $\mathsf{K}=\{\frac{p+1}{2}\}$; $p<1$, $p\neq 0$, $\mathsf{K}=\emptyset$; c) $p=0$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $|p|=1$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}\setminus\{0\}$; $|p|\neq 1$, $p\neq 0$, $\mathsf{K}=\{p\}$; d) $p\in(-\infty;0\rangle\cup(1;+\infty)$, $\mathsf{K}=\emptyset$; $p\in(0;1\rangle$, $\mathsf{K}=\left\{\frac{(p^2+1)^2}{4p^2}\right\}$ **4.** a) $p=1$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}$; $p>1$, $\mathsf{K}=(\frac{p-2}{p-1};+\infty)$; $p<1$, $\mathsf{K}=(-\infty;\frac{p-2}{p-1})$; b) $p=0$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}^+$; $p>0$, $\mathsf{K}=\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{1+p^2}}{p}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1+p^2}}{p};+\infty\right)$; $p<0$, $\mathsf{K}=\left(\frac{-1+\sqrt{1+p^2}}{p};\frac{-1-\sqrt{1+p^2}}{p}\right)$; c) $p=3$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}$; $p<3$, $\mathsf{K}=(-\infty;\frac{2}{3-p})$; $p>3$, $\mathsf{K}=(\frac{2}{3-p};+\infty)$; d) $p>\sqrt{2}$, $\mathsf{K}=\langle -1;1\rangle$; $p\in(1;\sqrt{2}\rangle$, $\mathsf{K}=\left\langle -1;\frac{-p-\sqrt{2-p^2}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{-p+\sqrt{2-p^2}}{2};1\right\rangle$; $p\in(-1;1\rangle$, $\mathsf{K}=\left(\frac{-p+\sqrt{2-p^2}}{2};1\right\rangle$; $p\leqq -1$, $\mathsf{K}=\emptyset$; d) $1\leqq p<\sqrt{2}$, $\mathsf{K}=\left(-1;\frac{-p-\sqrt{2-p^2}}{2}\right)\cup\left(\frac{-p+\sqrt{2-p^2}}{2};1\right)$; $p<-1$, $\mathsf{K}=\emptyset$ **5.** $p=0$, $\mathsf{K}=\mathsf{R}$; $p>0$, $\mathsf{K}=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$; $p<0$, $\mathsf{K}=\left\langle\frac{1}{2};+\infty\right)$

Cvičení 40

1 Zjistěte, pro která $a\in\mathsf{Z}$ má rovnice $ax+1=2x+5$ řešení

a) v oboru celých čísel,

b) v oboru reálných čísel.

2 Zjistěte, pro která $a\in\mathsf{Z}$ má rovnice $(2a-1)x-3=ax+2a$ řešení

a) v oboru přirozených čísel,

b) v oboru reálných čísel.

3 Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathsf{R}$, pro něž má rovnice

$$(p-2)x^2 - (3p+6)x + 6p = 0$$

a) dva reálné kořeny,
b) dva kořeny kladné,
c) dva kořeny záporné,
d) jeden kořen kladný a jeden záporný.

4 Najděte aspoň jednu dvojici čísel $[b; c] \in \mathsf{R}^2$ tak, aby rovnice

$$2x + b = cx - 1$$

měla v oboru reálných čísel
a) právě jedno řešení,
b) aspoň dvě řešení.

5 V R řešte početně i graficky rovnici $4 - |x+1| = b$ s parametrem $b \in \mathsf{R}$.

[**1.** a) $a \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$; b) $a \in \mathsf{Z} \setminus \{2\}$ **2.** a) $a \in \{-4, 2, 6\}$; b) $a \in \mathsf{Z} \setminus \{1\}$ **3.** a) $p \in \left(-\frac{2}{5}; 6\right)$, $p \neq 2$; b) $p \in (2; 6)$; c) $p \in \left(-\frac{2}{5}; 0\right)$; d) $p \in (0; 2)$ **4.** a) např. $b = 1$, $c = 1$; b) $b = -1$, $c = 2$ **5.** $b > 4$, $\mathsf{K} = \emptyset$; $b = 4$, $\mathsf{K} = \{-1\}$; $b < 4$, $\mathsf{K} = \{3 - b, b - 5\}$]

Planimetrie

Cvičení 41

1 Zapište slovy následující výroky o bodech A, B, C a přímkách p, q:

a) $A \in p$ b) $p \subset \leftrightarrow ABC$ c) $B \notin q$ d) $p \cap q = \{C\}$

2 Zapište slovy následující výroky:

a) $p = \leftrightarrow AB$

b) $B \in \mapsto pC \cap \mapsto qD$

c) $A \in \mapsto PQR$

d) $p = \mapsto CA \cup \mapsto CB$

3 Zapište pomocí vhodné symboliky následující výroky:

a) bod A neleží na přímce p;

b) bod B je průnikem přímek a, b;

c) polopřímka AB nemá s polopřímkou CD žádný společný bod;

d) úsečka AB je průnikem polopřímek AB a BA.

4 V rovině zvolte 4 různé body A, B, C, D, z nichž žádné 3 neleží v jedné přímce. Určete počet všech

a) přímek, které procházejí dvěma z daných bodů,

b) polopřímek XY, kde $X, Y \in \{A, B, C, D\}$,

c) úseček, jejichž krajními body jsou dva z daných bodů,

d) polorovin, XYZ, kde $X, Y, Z \in \{A, B, C, D\}$.

5 Spojíme-li přímkami každé dva z n daných bodů ležících v rovině, dostaneme $\frac{1}{2}n(n-1)$ přímek, neleží-li žádné tři z uvedených bodů v jedné přímce. Dokažte.

Zdůvodněte, že n navzájem různoběžných přímek ležících v jedné rovině se protíná v $\frac{1}{2}n(n-1)$ průsečících, jestliže žádné tři z těchto přímek neprocházejí týmž bodem.

1. a) bod A leží na přímce p; b) přímka p leží v rovině ABC; c) bod B neleží na přímce q; d) bod C je průsečík přímek p, q **2.** a) přímka p je určena body A, B; b) bod B leží v průniku polorovin pC, qD; c) bod A leží v polorovině PQR; d) přímka p je sjednocením polopřímek CA, CB **3.** a) $A \notin p$; b) $\{B\} = a \cap b$; c) $\mapsto AB \cap \mapsto CD = \emptyset$; d) $AB = \mapsto AB \cap \mapsto BA$ **4.** a) 6 přímek; b) 12 polopřímek; c) 6 úseček; d) 8 nebo 9 polorovin

Cvičení 42

1 Načrtněte a charakterizujte všechny možné případy průniku

a) dvou polopřímek téže roviny,

b) dvou polorovin téže roviny.

2 V rovině jsou dány dvě různé přímky a, b a přímka p, která je protíná v různých bodech A, B. Každý z plných úhlů s vrcholy A, B je tak rozdělen na čtyři konvexní úhly. Označme úhly s vrcholem A symboly α, β, γ, δ a úhly s vrcholem B symboly α', β', γ', δ'. Zapište všechny dvojice

a) souhlasných úhlů,

b) střídavých úhlů,

c) vrcholových úhlů,

d) vedlejších úhlů.

Poznámka. O výše uvedených přímkách a, b říkáme, že jsou proťaty příčkou p. Podobně o úhlech α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' říkáme, že jsou vyťaty příčkou p přímek a, b. Uvažte případy, kdy $a \parallel b$ a $a \nparallel b$.

3 Jestliže jedna dvojice souhlasných úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné, pak přímky a, b jsou rovnoběžné. Dokažte. Jestliže jsou přímky a, b rovnoběžné, pak dvojice souhlasných úhlů vyťatých příčkou p přímek a, b jsou úhly shodné. Dokažte.

4 V lichoběžníku $ABCD$, $AB \parallel CD$, jsou dány velikosti vnitřních úhlů $\alpha = 62°$, $\beta = 48°$ při vrcholech A, B. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů γ, δ při vrcholech C, D.

5 Jsou dány dva vedlejší úhly. Velikost jednoho z nich je k-násobkem velikosti druhého. Jakou velikost mají tyto úhly? Pro která $k \in \mathsf{N}$ jsou velikosti obou úhlů ve stupních dány celočíselnou hodnotou?

[**1.** a) $\emptyset$, bod, úsečka, polopřímka; b) $\emptyset$, přímka, rovinný pás, polorovina, úhel **4.** 132°, 118° **5.** $\frac{180°}{k+1}$, $\frac{k \cdot 180°}{k+1}$; $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 17, 19, 29, 35, 44, 59, 89, 179\}$]

Cvičení 43

1 V rovině jsou dány body A, B, C neležící v přímce. Bodem C veďte přímku stejně vzdálenou od bodů A, B.

2 Sestrojte osu úhlu dvou daných různoběžných přímek a, b, jejichž průsečík je nepřístupný.

3 Sestrojte osy vnitřních úhlů obdélníku a kosodélníku. Ukažte, že v případě obdélníku jsou průsečíky os vrcholy čtverce a v případě kosodélníku jsou průsečíky os vrcholy obdélníku.

4 Daným bodem neležícím na dané přímce veďte přímku s ní rovnoběžnou.

5 Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmici. Dokažte. Užijte důkaz sporem.
Pro každé tři přímky a, b, c v rovině platí: $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$. Dokažte. Užijte důkaz sporem.

Cvičení 44

1 Načrtněte a charakterizujte všechny možné případy průniku dvou
a) trojúhelníků,
b) čtverců.

2 Sestrojte trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 7\,\mathrm{cm}$, a dále sestrojte
a) jeho těžnice,
b) jeho střední příčky,
c) a kružnici jemu opsanou.

3 Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na polopřímce AC je dán bod D, $|AD| > |AC|$, $|AC| = |CD|$. Dokažte, že přímky AB a BD jsou k sobě kolmé.

4 Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod U. Dokažte, že platí:

$$|AU| + |BU| + |CU| > \frac{|AB| + |AC| + |BC|}{2}.$$

5 Délky stran trojúhelníku ABC jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly. Jakou délku má strana c, je-li $a = 2\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$?

[**1.** a) $\emptyset$, bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník; b) $\emptyset$, bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník, osmiúhelník
5. 2 cm, 3 cm, 4 cm]

Cvičení 45

1 Vnitřní úhly v trojúhelníku mají velikosti v poměru 2 : 3 : 5. V jakém poměru jsou velikosti vnějších úhlů? Zobecněte pro poměr $x : y : z$.

2 Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, platí-li pro ně vztahy $\alpha = 2\beta$, $\beta = 3\gamma$.

3 Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC se protínají v bodě S. Vyjádřete velikost úhlu ASB pomocí velikosti úhlu γ.

4 Osy vnějších úhlů při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C se protínají v bodě S. Vypočtěte velikost konvexního úhlu ASB.

5 Znovu sami dokažte základní poučku o tom, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°. Z ní pak odvoďte, že součet velikostí vnějších úhlů trojúhelníku je 360°.

[**1.** $8 : 7 : 5$; $(y+z) : (x+z) : (x+y)$ **2.** $108°$, $54°$, $18°$ **3.** $90° + \frac{1}{2}\gamma$ **4.** $45°$]

Cvičení 46

1 Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Bod O je středem základny AB. Bodem O jsou vedeny kolmice k ramenům AC a BC, jejich paty jsou označeny P a Q. Dokažte, že trojúhelník AOP je shodný s trojúhelníkem BOQ.

2 Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad stranami AC a AB jsou vně trojúhelníku ABC sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ABN. Dokažte, že platí $|BM| = |CN|$.

3 Je dán trojúhelník ABC a přímka p, v níž leží těžnice t_c daného trojúhelníku. Dokažte, že body A, B mají od přímky p stejnou vzdálenost.

4 Danou úsečku AB rozdělte bodem C tak, aby platilo $|AC| : |CB| = m : n$, kde m, n jsou daná přirozená čísla.

5 V rovnoramenném trojúhelníku ABC je vedena středem D ramene BC kolmice k základně AB. Její patu označme E. Dokažte, že platí $|AE| = \frac{3}{4}|AB|$.

Cvičení 47

1 Svislá metrová tyč vrhá stín 150 cm dlouhý. Vypočtěte výšku nedaleké věže, jejíž stín je ve stejném okamžiku dlouhý 36 m.

2 Určete měřítko mapy, je-li les tvaru trojúhelníku o stranách délek 1,6 km, 2,4 km a 2,7 km na mapě zakreslen jako trojúhelník, jehož strany mají délky 32 mm, 48 mm a 54 mm.

3 Úsečku AB rozdělte body C, D v poměru

$$|AC| : |CD| : |DB| = 2 : 3 : 5.$$

4 Určete délky stran a, b, c trojúhelníku ABC, je-li $a - b = 4\,\text{cm}$, $v_a = 6\,\text{cm}$, $v_b = 9\,\text{cm}$.

5 Do rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou délky a je vepsán čtverec. Vypočtěte délku strany čtverce.

[**1.** $24\,\mathrm{m}$ **2.** $1 : 50\,000$ **4.** $a = 12\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$, $c = \sqrt{208 - 48\sqrt{7}}\,\mathrm{cm}$ nebo $c = \sqrt{208 + 48\sqrt{7}}\,\mathrm{cm}$ **5.** $x = a(2\sqrt{3} - 3)$]

Cvičení 48

1 Charakterizujte dané rovnoběžníky pomocí úhlů, stran a úhlopříček:

a) čtverec

b) obdélník

c) kosočtverec

d) kosodélník

2 V obdélníku $ABCD$ je bod E střed strany AB a bod F střed strany CD. Úsečky DE a BF protínají úhlopříčku AC po řadě v bodech G, H. Dokažte, že platí $|AG| = |GH| = |HC|$.

3 Průsečíkem úhlopříček kosočtverce jsou vedeny kolmice k jeho stranám. Dokažte, že paty těchto kolmic jsou vrcholy obdélníku.

4 Ve čtverci $ABCD$ veďme dvě libovolné k sobě kolmé příčky, z nichž jedna má krajní body na stranách AD, BC a druhá má krajní body na stranách AB, CD. Dokažte, že tyto dvě příčky jsou shodné.

5 Vnitřní úhly čtyřúhelníku $ABCD$ mají velikosti v poměru

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = n : (n+1) : (n+2) : (n+3), \quad n \in \mathsf{N}.$$

Dokažte, že daný čtyřúhelník je lichoběžník.

Cvičení 49

1 Je dán oblouk kružnice, jejíž střed S není znám. Sestrojte ho.

2 Vypočítejte poloměr kruhové dráhy, kterou musí běžec proběhnout třikrát, aby uběhl 2 km.

3 Porovnejte poměrem délku kružnice o poloměru r a obvod pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do téže kružnice.

4 Vrcholy trojúhelníku ABC dělí kružnici tomuto trojúhelníku opsanou na tři oblouky, jejichž délky jsou v poměru 11 : 12 : 13. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku.

5 Spojnice číslic 1, 4 a 2, 9 na hodinkách jsou k sobě kolmé. Dokažte.

[**2.** asi 106 m **3.** $2\pi r : 12r\sqrt{2-\sqrt{3}} \doteq 1{,}012$ **4.** 55°, 60°, 65° **5.** Návod. Využijte vlastností obvodových a středových úhlů.]

Cvičení 50

1 Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $b = c = 10\,\text{cm}$, $r = 6\,\text{cm}$, r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané,
b) $a = 153\,\text{cm}$, $b = 97\,\text{cm}$, $v_c = 72\,\text{cm}$,
c) $a = 20\,\text{cm}$, $b = 65\,\text{cm}$, $c = 75\,\text{cm}$,
d) $a = b = c = 4\,\text{cm}$.

2 Vypočtěte

a) obsah čtverce, je-li délka úhlopříčky u,
b) obsah obdélníku, je-li délka úhlopříčky u a odchylka úhlopříček ω,
c) délky e, f úhlopříček kosočtverce, je-li jeho obsah $S = 150\,\text{cm}^2$ a $e : f = 3 : 4$,
d) obsah kosodélníku, jsou-li dány délky stran a, b a jejich odchylka α.

3 Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABCD$, $AB \parallel CD$, je-li dáno:
a) $b = d = 13\,\text{cm}$, $a : c = 4 : 3$, $v = 12\,\text{cm}$,
b) $a = 41\,\text{cm}$, $b = 17\,\text{cm}$, $c = 20\,\text{cm}$, $d = 10\,\text{cm}$,
c) $v : c : a = 2 : 3 : 5$, $v + c + a = 80\,\text{cm}$,
d) $\alpha = |\sphericalangle BAD| = 90°$, $a = 66\,\text{cm}$, $b = 102\,\text{cm}$, $c = 18\,\text{cm}$.

4 Vypočtěte obsah kruhové výseče a délku kružnicového oblouku, je-li:
a) $r = 1\,\text{cm}$ a $\varphi = 30°$, b) $r = 1\,\text{cm}$ a $\varphi = 2$ [rad].

5 Nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku jsou sestrojeny polokružnice neprotínající přeponu, nad ní je sestrojena polokružnice jdoucí vrcholem pravého úhlu. Tyto polokružnice omezují útvary, které se nazývají Hippokratovy měsíčky. Proveďte náčrtek a porovnejte součet obsahů Hippokratových měsíčků s obsahem trojúhelníku.

1. a) $\frac{125}{9}\sqrt{11}\,\text{cm}^2$; b) $7\,200\,\text{cm}^2$ nebo $250\,\text{cm}^2$; c) $600\,\text{cm}^2$; d) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **2.** a) $\frac{1}{2}u^2$; b) $\frac{1}{2}u^2 \sin\omega$; c) $e = 15\,\text{cm}$, $f = 20\,\text{cm}$; d) $ab\sin\alpha$ **3.** a) $420\,\text{cm}^2$; b) $244\,\text{cm}^2$; c) $512\,\text{cm}^2$; d) $3\,780\,\text{cm}^2$ **4.** a) $\frac{1}{12}\pi\,\text{cm}^2$, $\frac{1}{6}\pi\,\text{cm}^2$; b) $1\,\text{cm}$, $2\,\text{cm}$ **5.** Oba obsahy jsou stejné.

Cvičení 51

1 V rovině ϱ je dán bod S a dvě úsečky délek a a b, kde $a < b$. Určete a načrtněte množinu M všech bodů X roviny ϱ, která je určena zápisem

$$\mathsf{M} = \{X \in \varrho;\ a \leqq |SX| \leqq b\}.$$

2 V rovině ϱ jsou dány body A, B, $A \neq B$. Určete a načrtněte množinu M všech bodů X roviny ϱ, která je určena zápisem

$$\mathsf{M} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle AXB| = 30°\}.$$

3 V rovině ϱ jsou dány body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Určete a načrtněte množinu všech bodů X roviny ϱ, které mají od přímek AC a BC stejnou vzdálenost.

4 Určete a načrtněte množinu M těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků ABC v rovině ϱ, které mají společnou přeponu AB.

5 V rovině ϱ jsou dány rovnoběžky a, b, $a \neq b$. Určete a načrtněte množinu M všech bodů X roviny ϱ, která je určena zápisem

$$\mathsf{M} = \{X \in \varrho;\ |Xa| + |Xb| = c \cdot |ab|\},$$

kde $c > 0$ je dané číslo. Proveďte diskusi pro hodnoty parametru c.

1. mezikruží **2.** dva kružnicové oblouky se středy S, S' bez bodů A, B v polorovinách ABS, ABS', kde ABS, ABS' jsou rovnostranné trojúhelníky **3.** dvě navzájem kolmé přímky jdoucí bodem C, jedna z nich obsahuje osu úhlu ACB. **4.** Kružnice $k(S,r)$, $r = \frac{1}{6}|AB|$ mimo body ležící na AB, S je střed AB **5.** $0 < c < 1$, $\mathsf{M} = \emptyset$; $c = 1$, M je rovinný pás ohraničený přímkami a, b; $c > 1$, M je sjednocením dvou přímek rovnoběžných s a, b, každá z nich má od jedné z přímek a, b vzdálenost $\frac{1}{2}(c+1)|ab|$, od druhé $\frac{1}{2}(c-1)|ab|$

Cvičení 52

Poznámka. Jsou-li a, b, c, α, β, γ, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c délky stran, velikosti vnitřních úhlů, výšky, těžnice trojúhelníku ABC, máme k dispozici $\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$ úloh typu: „Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno (x, y, z)“, kde $x, y, z \in \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c\}$. Pokud přidáme poloměry ϱ, r kružnice trojúhelníku vepsané a opsané, dostáváme celkem $\binom{14}{3} = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 2\cdot 1} = 364$ úloh, tj. skoro na každý den roku jednu úlohu. Samozřejmě, že mezi výše uvedenými úlohami jsou úlohy stejného typu, např. (b, c, α) a (a, c, β). Tuto množinu úloh lze dále rozšířit o úlohy obsahující ve svém zadání délky úseček, které na trojúhelníku vytínají osy jeho vnitřních úhlů, součty a rozdíly stran a úhlů trojúhelníku apod. Je třeba si uvědomit, že některé úlohy nejsou řešitelné, což znamená, že daný útvar nelze zkonstruovat eukleidovsky, tj. pomocí pravítka a kružítka. Nejznámější úloha tohoto typu je úloha (a, b, ϱ).

1 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) a, b, t_b
b) a, b, α
c) a, v_a, t_a
d) a, β, v_b

2 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) b, c, γ
b) b, t_a, α
c) b, v_b, t_c
d) b, v_c, t_a

3 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) v_b, v_c, α
b) v_b, v_c, β
c) v_b, v_c, c
d) v_b, v_c, a

4 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) t_b, b, α
b) t_b, b, v_c
c) t_b, t_c, γ
d) t_b, t_c, α

5 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $a+b+c$, v_c, α
b) α, v_b, r
c) b, β, ϱ
d) $a+b$, c, β

Cvičení 53

Poznámka. Ve všech úlohách tohoto cvičení jsou $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ délky stran, $|AC| = e$, $|BD| = f$ jsou délky úhlopříček a ω je odchylka úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$. Dále značíme v_a výšku ke straně AB (je-li $CD \parallel AB$), v_b výšku ke straně BC (je-li $AD \parallel BC$) a $\alpha = |\sphericalangle BAD|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCD|$, $\delta = |\sphericalangle CDA|$ velikosti vnitřních úhlů, ϱ poloměr kružnice vepsané a r poloměr kružnice opsané, pokud tyto kružnice vůbec existují.

1 Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno:

a) $|\sphericalangle BAC| = 30°, e = 8\,\mathrm{cm}$
b) $a + b = 6\,\mathrm{cm}$, $\omega = 120°$
c) $a + b = 8\,\mathrm{cm}$, $e = 6\,\mathrm{cm}$
d) a, e

2 Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) e, v_a
b) f, ϱ
c) a, e
d) a, $\alpha = 30°$

3 Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno:

a) a, e, α
b) e, f, v_a
c) a, v_a, v_b
d) v_a, v_b, α

4 Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, je-li dáno:

a) b, e, f, v_a
b) b, c, f, α
c) a, b, c, e
d) a, e, f, α, β

5 Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno:

a) a, b, c, r
b) a, e, α, γ, δ
c) a, c, e, f, α
d) a, b, α, ϱ

Cvičení 54

1 Sestrojte kružnici, která je

a) opsaná danému trojúhelníku ABC,
b) vepsaná danému trojúhelníku ABC.

2 V rovině jsou dány dva různé body A, B. Sestrojte kružnici k o daném poloměru r, která prochází body A, B. Určete podmínky řešitelnosti úlohy pomocí délek r a $l = |AB|$.

3 Do čtvrtkruhu o poloměru $R = 3\,\mathrm{cm}$ vepište kružnici $k(S, r)$. Nejprve výpočtem vyjádřete r pomocí R a pak úsečku takové délky r sestrojte.

4 Dva přímé úseky silnice AB a BC téže délky l, svírají úhel velikosti φ. Tyto úseky nahraďte kružnicovým obloukem AC. Určete střed a poloměr odpovídající kružnice. Řešte obecně a potom pro hodnoty $\varphi = 120°$ a $l = 3\,\mathrm{km}$.

5 Je dána přímka p a body A, B ležící v jedné z polorovin určených přímkou p, $A \neq B$. Sestrojte kružnici k, která prochází body A, B a dotýká se přímky p.

[**4.** $r = l \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$, střed S leží v polorovině opačné k polorovině ACB ve vzdálenosti r od bodů A, C. Pro $l = 3\,\mathrm{km}$ a $\varphi = 120°$ je $r = 3\sqrt{3}\,\mathrm{km} \doteq 5{,}2\,\mathrm{km}$. **5.** Návod. Konstrukce je snadná, je-li $AB \parallel p$. V opačném případě uvažte, že platí $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|$, kde M je průsečík přímek p a AB a T je bod dotyku kružnice k s přímkou p.]

Cvičení 55

Poznámka. Shodná zobrazení v rovině značíme následovně: I — identita, O — osová souměrnost, S — středová souměrnost, R — rotace (otočení), T — translace (posunutí). Pomůcka k zapamatování: SORTI.

1 Určete všechna shodná zobrazení, ve kterých je samodružný

a) rovnostranný trojúhelník, b) čtverec.

2 V rovině jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, c proťaté přímkou p. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrcholy A, C ležely po řadě na přímkách a, c a zbývající vrcholy na přímce p.

3 Určete dráhu kulečníkové koule z dané polohy A jedním odrazem od mantinelu do dané polohy B, $A \neq B$.

4 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b + c$, α, β.

5 Přímky a, b jsou osy osových souměrností O_a, O_b. Určete zobrazení Z složené z daných osových souměrností $\mathsf{Z} = \mathsf{O}_b \circ \mathsf{O}_a$ v případě:

a) $a \neq b$, $a \parallel b$ b) $a \perp b$

c) $a = b$ d) $a \nparallel b$, $|\sphericalangle ab| = \varphi$

[**1.** a) identita, tři osové souměrnosti, dvě rotace; b) identita, středová souměrnost, čtyři osové souměrnosti, dvě rotace **5.** a) $\mathsf{O}_b \circ \mathsf{O}_a = \mathsf{T}$; b) $\mathsf{O}_b \circ \mathsf{O}_a = \mathsf{S}$; c) $\mathsf{O}_b \circ \mathsf{O}_a = \mathsf{I}$; d) $\mathsf{O}_b \circ \mathsf{O}_a = \mathsf{R}$]

Cvičení 56

1 Ve středové souměrnosti určené středem S zobrazte

a) bod X, $X \neq S$,

b) přímku p, $S \in p$,

c) přímku p, $S \notin p$,

d) trojúhelník ABC s těžištěm v bodě S.

2 Ve středové souměrnosti se středem v bodě A zobrazte pravoúhlý lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, s pravým úhlem při vrcholu B.

3 Sestrojte šestiúhelník, který není pravidelný, ale je středově souměrný.

4 Bod M je vnitřním bodem jednoho z konvexních úhlů určených přímkami p, q. Bodem M veďte přímku r, která protíná přímky p, q v bodech P, Q tak, že $|MP| = |MQ|$.

5 Jsou dány dvě protínající se kružnice. Jedním z jejich průsečíků veďte přímku, na které obě kružnice vytínají shodné tětivy.

Cvičení 57

1 V posunutí $\mathsf{T}(A \to C)$ zobrazte čtverec $ABCD$.

2 Přímka r protíná dvě různé rovnoběžky p, q. Užitím posunutí sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří přímek p, q, r.

3 Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, jsou-li dány délky jeho stran a, b, c, d.

4 Dvě různé rovnoběžky p, q protíná přímka r. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC o straně dané délky a tak, že $A \in p$, $B \in q$, $C \in r$.

5 Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho stran a, b, c, d a odchylka φ přímek AB, CD, $\varphi \in \left(0; \frac{1}{2}\pi\right)$.

[**5.** Návod. V posunutí $\mathsf{T}(C \to A)$ uvažujte obraz úsečky CD.]

Cvičení 58

1 V rovině je dána přímka p a bod S, $S \notin p$. Sestrojte obraz přímky p v otočení $\mathsf{R}(S, +30^\circ)$.

2 Sestrojte čtverec $A'B'C'D'$, který je obrazem čtverce $ABCD$ v otočení $R(S, \varphi)$, kde $\varphi = 45°$ a S je střed čtverce $ABCD$. Charakterizujte sjednocení a průnik obou čtverců.

3 Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník PQR. Bod P leží na straně AB tak, že $|AP| = 3|BP|$.

4 Jsou dány tři kružnice o společném středu S a poloměrech $r_1 > r_2 > r_3$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy ležely po jednom na daných kružnicích.

5 Nad stranami AB, AC ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ABPQ$, $ACTU$ tak, že leží vně trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí: $|CQ| = |BU|$.

Cvičení 59

1 Ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$ sestrojte obraz bodu X, $X \neq S$, v případě, že:

a) $\kappa = 3$ b) $\kappa = \frac{1}{3}$

c) $\kappa = -3$ d) $\kappa = -\frac{1}{3}$

2 Ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$ sestrojte obraz přímky p, $S \notin p$, v případě, že:

a) $\kappa = 2$ b) $\kappa = \frac{1}{2}$

c) $\kappa = -2$ d) $\kappa = -\frac{1}{2}$

3 Ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$ sestrojte obraz kružnice $k(O, r)$, $S \neq O$, v případě, že:

a) $\kappa = 2$ b) $\kappa = \frac{1}{2}$

c) $\kappa = -2$ d) $\kappa = -\frac{1}{2}$

4 Narýsujte trojúhelník ABC a zobrazte ho ve stejnolehlosti $\mathsf{H}(T, -\frac{1}{2})$, kde T je těžiště trojúhelníku. Porovnejte obvody a obsahy obou trojúhelníků.

5 Ve stejnolehlosti $\mathsf{H}(S, \kappa)$ sestrojte obraz čtverce $ABCD$ v případě, že
a) S je vnitřním bodem čtverce a $\kappa = 3$,
b) S leží na hranici čtverce a $\kappa = -\frac{1}{3}$.

Cvičení 60

1 Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod Q, $0 < |QS| < r$. Bodem Q veďte tětivu kružnice k, která bude bodem Q rozdělena v poměru $2 : 3$.

2 V rovině jsou dány různoběžné přímky p, q, jejichž průsečík leží mimo nákresnu, a bod M, který neleží na žádné z nich. Užitím stejnolehlosti sestrojte přímku procházející bodem M a průsečíkem přímek p, q.

3 Sestrojte středy stejnolehlosti kružnic $k(S; 4\,\mathrm{cm})$ a $k'(S'; 2\,\mathrm{cm})$, jejichž středy S a S' mají vzdálenost $1\,\mathrm{cm}$.

4 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno α, β, t_c.

5 Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $\alpha = 60°$, $a : b = 4 : 3$, $v_a = 5\,\mathrm{cm}$.

Funkce

Cvičení 61

Poznámka. V následujících úlohách rozumíme pod pojmem funkce zobrazení, kde x je vzor a y obraz.

1 Rozhodněte, které z uvedených relací jsou funkcemi:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $x + y^2 = 1$

c) $x^2 + y = 1$ d) $x + y = 1$

Sestrojte grafy daných relací.

2 Rozhodněte, které z uvedných relací jsou funkcemi:

a) $|x| + y = 1$ b) $x + |y| = 1$

c) $|x| - y = 1$ d) $x - |y| = 1$

Sestrojte grafy daných relací.

3 Rozhodněte, které z uvedených množin jsou funkce $y = f(x)$:

a) $\mathsf{P} = \{[x, y] \in \mathsf{N} \times \mathsf{N};\ y$ je dělitelem $x\}$,

b) $\mathsf{Q} = \{[x, y] \in \mathsf{N} \times \mathsf{N};\ y$ je ciferný součet $x\}$,

c) $\mathsf{R} = \{[x, y] \in \mathsf{N} \times \mathsf{N};\ x$ je ciferný součet $y\}$,

d) $\mathsf{S} = \{[x, y] \in \mathsf{A} \times \mathsf{N};\ y$ je počet všech dělitelů $x\}$,
$\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{N};\ x \leqq 12\}$.

4 Rozhodněte, které z uvedených množin jsou funkce:

a) $\mathsf{A} = \{[1; 0], [-2; 3], [-1; -3], [2; 4], [0; 0]\}$,

b) $\mathsf{B} = \{[0; 2], [-3; \sqrt{2}], [5; 0], [-3; 2], [4; 1]\}$,

c) $\mathsf{C} = \{[1; 1], [2; 3], [3; 1], [0; 1], [-2; 1]\}$,

d) $\mathsf{D} = \{[0; 4], [5; 1], [-1; 0], [0; 2], [4; 7]\}$.

5 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte grafy daných funkcí:

a) $f\colon y = 1 - |x|$ b) $f\colon y = (x - 1)^2$

c) $f\colon y = \sqrt{x - 3}$ d) $f\colon y = \dfrac{1}{1 - x^2}$

1. a) ne; b) ne; c) ano; d) ano **2.** a) ano; b) ne; c) ano; d) ne **3.** a) ne; b) ano; c) ne; d) ano **4.** a) ano; b) ne; c) ano; d) ne **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 1\rangle$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$; c) $\mathsf{D}(f) = \langle 3; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{-1; 1\}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 0) \cup \langle 1; +\infty)$

Cvičení 62

1 Pro funkci $f\colon y = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) určete $\mathsf{D}(f)$,
b) určete $\mathsf{H}(f)$,
c) vyjádřete $f(a+b)$,
d) zjistěte, zda platí: $5 \in \mathsf{H}(f)$.

2 Pro funkci $f\colon y = x - x^3$

a) určete $\mathsf{D}(f)$,
b) v R řešte nerovnici: $f(x) > 0$,
c) v R řešte rovnici: $f(x) = 0$,
d) v R řešte nerovnici: $f(x) < 0$.

3 Pro funkci $f\colon y = \sqrt{1-x^2}$

a) určete $\mathsf{D}(f)$,
b) určete $\mathsf{H}(f)$,
c) v R řešte rovnici: $f(x) = 0$,
d) vyjádřete $f(a-b)$.

4 Pro funkci $f\colon y = |x| - 4$

a) určete $\mathsf{D}(f)$,
b) určete $\mathsf{H}(f)$,
c) v R řešte rovnici: $f(x) = 0$,
d) sestrojte graf funkce $g\colon y = |f(x)|$.

5 Pro funkci $f\colon y = 4 - x^2$

a) určete $\mathsf{D}(f)$,
b) určete $\mathsf{H}(f)$,
c) v R řešte rovnici: $f(x) = 0$,
d) sestrojte graf funkce $g\colon y = |f(x)|$.

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{H}(f) = (0; 1\rangle$; c) $f(a+b) = \frac{1}{1+(a+b)^2}$; d) ne **2.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; c) $\mathsf{K} = \{-1; 0; 1\}$; d) $\mathsf{K} = (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ **3.** a) $\mathsf{D}(f) = \langle -1; 1\rangle$; b) $\mathsf{H}(f) = \langle 0; 1\rangle$; c) $\mathsf{K} = \{-1; 1\}$; d) $f(a-b) = \sqrt{1-(a-b)^2}$ **4.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{H}(f) = \langle -4; +\infty)$; c) $\mathsf{K} = \{-4; 4\}$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 4\rangle$; c) $\mathsf{K} = \{-2; 2\}$

Cvičení 63

1 Najděte definiční obory daných funkcí:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{2x+3}$ b) $f\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

c) $f\colon y = \sqrt{2x+3}$ d) $f\colon y = 2x+3$

2 Najděte definiční obory daných funkcí:

a) $f\colon y = x^2 - 5x + 6$ b) $f\colon y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

c) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ d) $f\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

3 Najděte definiční obory daných funkcí:

a) $f\colon y = \dfrac{x-5}{x-1}$ b) $f\colon y = \sqrt{x-5} + \sqrt{x-1}$

c) $f\colon y = \sqrt{\dfrac{x-5}{x-1}}$ d) $f\colon y = \dfrac{x-5}{|x|-1}$

4 Je dána funkce $f\colon y = 1 + x - x^2$. Najděte předpisy pro funkce:

a) $g\colon y = -f(x)$ b) $i\colon y = f(x-1)$

c) $h\colon y = f(-x)$ d) $j\colon y = f(2x)$

5 Určete obory hodnot daných funkcí:

a) $f\colon y = \sqrt{4 - x^2}$ b) $f\colon y = 4 - |x|$

c) $f\colon y = \dfrac{4}{1+x^2}$ d) $f\colon y = x^2 - 4$

1. a) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$; b) $\mathrm{D}(f) = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$; c) $\mathrm{D}(f) = \left\langle -\frac{3}{2}; +\infty\right)$; d) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$ **2.** a) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$; b) $\mathrm{D}(f) = (-\infty; 2\rangle \cup \langle 3; +\infty)$; c) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \{2; 3\}$; d) $\mathrm{D}(f) = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ **3.** a) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \{1\}$; b) $\mathrm{D}(f) = \langle 5; +\infty)$; c) $\mathrm{D}(f) = (-\infty; 1) \cup \langle 5; +\infty)$; d) $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \{-1; 1\}$ **4.** a) $g\colon y = -1 - x + x^2$; b) $i\colon y = -x^2 + 3x - 1$; c) $h\colon y = 1 - x - x^2$; d) $j\colon y = 1 + 2x - 4x^2$ **5.** a) $\mathrm{H}(f) = \langle 0; 2\rangle$; b) $\mathrm{H}(f) = (-\infty; 4\rangle$; c) $\mathrm{H}(f) = (0; 4\rangle$; d) $\mathrm{H}(f) = \langle -4; +\infty)$

Cvičení 64

1 Rozhodněte, zda se rovnají funkce:

a) $f\colon y = x^2$, $g\colon y = |x|$

b) $f\colon y = \dfrac{x}{|x|}$, $g\colon y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$

c) $f\colon y = 1$, $g\colon y = \dfrac{x}{x}$

d) $f\colon y = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$, $g\colon y = x + 1$

2 Vyšetřete, zda dané funkce jsou liché či sudé:

a) $f\colon y = x^4 + x^2 + 1$

b) $f\colon y = 2x - 3$

c) $f\colon y = x^4 + x^3 + 1$

d) $f\colon y = \dfrac{x^3 + 2x}{|x|}$

3 Vyšetřete monotónnost daných funkcí:

a) $f\colon y = x^2 + 1$

b) $f\colon y = 3 - 2x$

c) $f\colon y = x^3$

d) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$

Poznámka. Vyšetřit monotónnost funkce znamená určit všechny „maximální“ intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající. Funkce $f\colon y = x^2$ je jistě rostoucí např. v intervalu $(1; 3)$ a klesající např. v intervalu $(-5; -2)$. Úloha: „Vyšetřete monotónnost funkce $f\colon y = x^2$“ vyžaduje odpověď: „Funkce $y = x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty; 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0; +\infty)$.“

4 Vyšetřete monotónnost daných funkcí:

a) $f\colon y = \sqrt{x}$

b) $f\colon y = 4 - x^2$

c) $f\colon y = |x - 2|$

d) $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$

5 Rozhodněte, které z daných funkcí jsou shora omezené, zdola omezené, omezené:

a) $f\colon y = 4 - |x|$

b) $f\colon y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

c) $f\colon y = (x - 2)^2$

d) $f\colon y = x + 3$

1. a) ne; b) ano; c) ne; d) ano **2.** a) sudá; b) ani sudá, ani lichá; c) ani sudá, ani lichá; d) lichá **3.** a) klesající v $(-\infty; 0\rangle$, rostoucí v $\langle 0; +\infty)$; b) klesající v R; c) rostoucí v R; d) klesající v $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ **4.** a) rostoucí v $\langle 0; +\infty)$; b) rostoucí v $(-\infty; 0\rangle$, klesající v $\langle 0; +\infty)$; c) klesající v $\langle -\infty; 2\rangle$, rostoucí v $\langle 2; +\infty)$; d) klesající v $(0; 1\rangle$, rostoucí v $\langle -1; 0\rangle$ **5.** a) omezená shora; b) omezená; c) omezená zdola; d) není omezená

Cvičení 65

1 Určete body extrémů funkce f na dané množině M:

a) $f\colon y = x^2 + 1$, $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$
b) $f\colon y = x^2 + 1$, $\mathsf{M} = \langle -2; 1\rangle$
c) $f\colon y = x^2 + 1$, $\mathsf{M} = \langle -1; 2\rangle$
d) $f\colon y = x^2 + 1$, $\mathsf{M} = \langle -2; 2\rangle$

2 Určete body extrémů funkce f na dané množině M:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$
b) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $\mathsf{M} = \langle -2; -1\rangle$
c) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $\mathsf{M} = \langle 1; 2\rangle$
d) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $\mathsf{M} = (0; +\infty)$

3 Určete body extrémů funkce f na dané množině M:

a) $f\colon y = 1 - |x|$, $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$
b) $f\colon y = 1 - |x|$, $\mathsf{M} = \langle -4; 0\rangle$
c) $f\colon y = 1 - |x|$, $\mathsf{M} = \langle 0; 4\rangle$
d) $f\colon y = 1 - |x|$, $\mathsf{M} = \langle -4; 4\rangle$

4 Určete body extrémů funkce f na dané množině M:

a) $f\colon y = |x^2 - 4|$, $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$
b) $f\colon y = |x^2 - 4|$, $\mathsf{M} = \left\langle -\sqrt{8}; \sqrt{8}\right\rangle$
c) $f\colon y = |x^2 - 4|$, $\mathsf{M} = \left\langle 0; \sqrt{8}\right\rangle$
d) $f\colon y = |x^2 - 4|$, $\mathsf{M} = \langle -2; 2\rangle$

5 Určete body extrémů funkce f na dané množině M:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$
b) $f\colon y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\mathsf{M} = \left\langle -\sqrt{3}; -\sqrt{2}\right\rangle$
c) $f\colon y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\mathsf{M} = \left\langle \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\rangle$
d) $f\colon y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\mathsf{M} = \langle -1; 1\rangle$

1. a) minimum v bodě 0; b) minimum v bodě 0, maximum v bodě -2; c) minimum v bodě 0, maximum v bodě 2; d) minimum v bodě 0, maximum v bodech -2, 2 **2.** a) nemá extrémy; b) minimum v bodě -1, maximum v bodě -2; c) minimum v bodě 2, maximum v bodě 1; d) nemá extrémy **3.** a) maximum v bodě 0; b) minimum v bodě -4, maximum v bodě 0; c) minimum v bodě 4, maximum v bodě 0; d) minimum v bodech -4, 4, maximum v bodě 0 **4.** a) minimum v bodech -2, 2; b) minimum v bodech -2, 2, maximum v bodech $-\sqrt{8}$, 0, $\sqrt{8}$; c) minimum v bodech -2, 2, maximum v bodech 0, $\sqrt{8}$; d) minimum v bodech -2, 2, maximum v bodě 0 **5.** a) maximum v bodě 0; b) minimum v bodě $-\sqrt{3}$, maximum v bodě $-\sqrt{2}$; c) minimum v bodě $\sqrt{3}$, maximum v bodě $\sqrt{2}$; d) minimum v bodech -1, 1, maximum v bodě 0

Cvičení 66

1 K daným funkcím najděte funkce inverzní a sestrojte v dané soustavě souřadnic grafy obou funkcí:

a) $f\colon y = 2x + 3$ b) $f\colon y = x$
c) $f\colon y = -x + 1$ d) $f\colon y = \frac{1}{2}x - 3$

2 K daným funkcím najděte funkce inverzní a sestrojte v dané soustavě souřadnic grafy obou funkcí:

a) $f\colon y = x^3$ b) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathsf{R}^+$
c) $f\colon y = \sqrt{x}$ d) $f\colon y = x^2$, $x \in \mathsf{R}_0^+$

3 Rozhodněte, ke kterým z uvedených funkcí (na celém jejich definičním oboru) existuje funkce inverzní:

a) $f\colon y = 2$ b) $h\colon y = x^2 - 1$
c) $g\colon y = 3 - x$ d) $i\colon y = x^{-3}$

4 V kartézské soustavě souřadnic sestrojte grafy daných relací a grafy odpovídajících relací inverzních:

a) $f_1\colon y = |x| + 4$ b) $f_3\colon y = \sqrt{x+4}$

c) $f_2\colon y = 4 - x^2$ d) $f_4\colon y = \sqrt{4 - x^2}$

Které z uvedených relací a relací k nim inverzních jsou funkce?

5 Je dána množina $\mathsf{A} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a na ní relace $\mathsf{S} = \{[x, y];\ x - y = 2\}$, $\mathsf{T} = \{[x, y];\ y - x = 2\}$. Zapište všechny prvky

a) relace S, b) relace T, c) relace S^{-1}, d) relace T^{-1}.

1. a) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; b) $f^{-1}\colon y = x$; c) $f^{-1}\colon y = -x + 1$; d) $f^{-1}\colon y = 2x + 6$ **2.** a) $f^{-1}\colon y = \sqrt[3]{x}$; b) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{x}$; c) $f^{-1}\colon y = x^2$; d) $f^{-1}\colon y = \sqrt{x}$ **3.** a) ne; b) ne; c) ano; d) ano **4.** f_1, f_2, f_3, f_4, f_3^{-1} ano, f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_4^{-1} ne **5.** a) $\mathsf{S} = \{[4; 2], [5; 3], [6; 4], [7; 5], [8; 6]\}$; b) $\mathsf{T} = \{[2; 4], [3; 5], [4; 6], [5; 7], [6; 8]\}$; c) $\mathsf{S}^{-1} = \mathsf{T}$; d) $\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{S}$

Cvičení 67

1 Jsou dány funkce $f\colon y = 2x + 3$, $g\colon y = \sqrt{x}$. Určete předpisy $y = h(x)$ pro funkce:

a) $h = f \circ f$ b) $h = g \circ f$

c) $h = f \circ g$ d) $h = g \circ g$

2 Jsou dány funkce $f\colon y = 1 - x$, $g\colon y = |x|$. Určete předpisy $y = h(x)$ pro funkce:

a) $h = f \circ f$ b) $h = g \circ f$

c) $h = f \circ g$ d) $h = g \circ g$

3 Jsou dány funkce $f\colon y = x^2$, $g\colon y = \dfrac{1}{x}$. Určete předpisy $y = h(x)$ pro funkce:

a) $h = f \circ f$ b) $h = g \circ f$
c) $h = f \circ g$ d) $h = g \circ g$

4 Jsou dány funkce $f\colon y = \frac{1}{2}x + 1$, $g\colon y = \sin x$. Určete předpisy $y = h(x)$ pro funkce:

a) $h = f \circ f$ b) $h = g \circ f$
c) $h = f \circ g$ d) $h = g \circ g$

5 Jsou dány funkce $f\colon y = x^3$, $g\colon y = \sqrt[3]{x}$. Určete předpisy $y = h(x)$ pro funkce:

a) $h = f \circ f$ b) $h = g \circ f$
c) $h = f \circ g$ d) $h = g \circ g$

1. a) $h\colon y = 4x + 9$; b) $h\colon y = \sqrt{2x+3}$; c) $h\colon y = 2\sqrt{x} + 3$; d) $h\colon y = \sqrt[4]{x}$ **2.** a) $h\colon y = x$; b) $h\colon y = |1 - x|$; c) $h\colon y = 1 - |x|$; d) $h\colon y = |x|$ **3.** a) $h\colon y = x^4$; b) $h\colon y = \frac{1}{x^2}$; c) $h\colon y = \frac{1}{x^2}$; d) $h\colon y = x$, $x \neq 0$ **4.** a) $h\colon y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$; b) $h\colon y = \sin(\frac{1}{2}x + 1)$; c) $h\colon y = \frac{1}{2}\sin x + 1$; d) $h\colon y = \sin(\sin x)$ **5.** a) $h\colon y = x^9$; b) $h\colon y = x$; c) $h\colon y = x$; d) $h\colon y = \sqrt[9]{x}$

Cvičení 68

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = |x-2| + 1$ b) $f\colon y = 1 - |x-2|$
c) $f\colon y = |x-2| - 1$ d) $f\colon y = -1 - |x-2|$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = \operatorname{sgn}(x-2) + 1$ b) $f\colon y = 1 - \operatorname{sgn}(x-2)$
c) $f\colon y = \operatorname{sgn}(x-2) - 1$ d) $f\colon y = -1 - \operatorname{sgn}(x-2)$

3 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = [x-2]+1$

b) $f\colon y = 1-[x-2]$

c) $f\colon y = [x-2]-1$

d) $f\colon y = -1-[x-2]$

4 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = x+|x|$

b) $f\colon y = x\cdot|x|$

c) $f\colon y = x-|x|$

d) $f\colon y = \dfrac{|x|}{x}$

5 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = |x-1|-|x+1|$

b) $f\colon y = |x+1|+|x-1|$

c) $f\colon y = |x+1|-|x-1|$

d) $f\colon y = 2-|x+1|-|x-1|$

1. a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\langle 1;+\infty)$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=(-\infty;1\rangle$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\langle -1;+\infty)$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=(-\infty;-1\rangle$ **2.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\{0,1,2\}$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\{0,1,2\}$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\{-2,-1,0\}$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\{-2,-1,0\}$ **3.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{Z}$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{Z}$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{Z}$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}, \mathsf{H}(f)=\mathsf{Z}$ **4.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}, \mathsf{H}(f)=\mathsf{R}_0^+$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}, \mathsf{H}(f)=\mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}_0^-$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=\{-1;1\}$ **5.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\langle -2;2\rangle$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\langle 2;+\infty)$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\langle -2;2\rangle$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=(-\infty;0\rangle$

Cvičení 69

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = 2$

b) $f\colon y = \frac{1}{2}$

c) $f\colon y = -1$

d) $f\colon y = -\frac{1}{2}$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = x$
b) $f\colon y = 2x$
c) $f\colon y = -x$
d) $f\colon y = -\frac{1}{2}x$

3 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf dané funkce:

a) $f\colon y = x + 2$
b) $f\colon y = -x + 2$
c) $f\colon y = x - 2$
d) $f\colon y = -x - 2$

4 Najděte lineární funkci $f\colon y = ax + b$, $a \neq 0$, jejíž graf prochází body:

a) $[0; 3], [3; 0]$
b) $[0; -3], [3; 0]$
c) $[-3; 0], [0; -3]$
d) $[-3; 0], [0; 3]$

5 Najděte lineární funkci $f\colon y = ax + b$, $a \neq 0$, je-li dáno:

a) $a = 2,\ f(1) = 3$
b) $a = 1,\ f(-2) = 0$
c) $a = -\frac{1}{2},\ f(2) = 3$
d) $a = -2,\ f(3) = -5$

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \{2\}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \{\frac{1}{2}\}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \{-1\}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \{-\frac{1}{2}\}$ **2.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ **3.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ **4.** a) $y = -x + 3$; b) $y = x - 3$; c) $y = -x - 3$; d) $y = x + 3$ **5.** a) $y = 2x + 1$; b) $y = x + 2$; c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$; d) $y = -2x + 1$

Cvičení 70

1 V R^2 řešte graficky soustavu nerovnic:

$$x - y - 2 \leqq 0$$
$$x - y + 2 \geqq 0$$
$$x + y - 2 \geqq 0$$
$$x + y - 4 \leqq 0$$

2 V R^2 řešte graficky nerovnice:

a) $|x| + |y| \leqq 1$ b) $|x-3| + |y-4| \leqq 1$

3 V R^2 řešte početně a graficky soustavy rovnic:

a) $x + y = 5$, $x - y = 1$ b) $3x - 2y = 5$, $6x - 4y = 3$

c) $2x + y = 4$, $x + \frac{1}{2}y = 2$ d) $4x - 3y = 9$, $3x - 2y = 7$

4 Sestrojte grafy daných relací a rozhodněte, které z nich jsou funkce:

a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $y = 2$ d) $y = -2$

5 Sestrojte grafy daných relací:

a) $|y| = x$ b) $|y| = -x$ c) $|x + y| = 1$ d) $|x - y| = 1$

[**3.** a) $\mathsf{K} = \{[3;2]\}$; b) $\mathsf{K} = \emptyset$; c) $\mathsf{K} = \{[x; 4-2x], x \in \mathsf{R}\}$; d) $\mathsf{K} = \{[3;1]\}$
4. a) není funkce; b) není funkce; c) je funkce; d) je funkce]

Cvičení 71

1 V R řešte graficky dané rovnice s parametrem $b \in \mathsf{R}$:

a) $|x| = b$ b) $|x+1| = 4 - b$

c) $|x| + b = 1$ d) $|x-3| = b + 2$

2 V R řešte graficky dané rovnice s parametrem $b \in \mathsf{R}$:

a) $|x| + 2 = x + b$ b) $|x| - 1 = bx$

c) $|x| = 2x + b$ d) $|x| = x + 1 - b$

3 V R řešte graficky nerovnice:

a) $|x| \leqq x + 2$
b) $|x| \leqq 2 - x$
c) $|x + 3| \leqq 1 - x$
d) $|x| \leqq 4 - |x - 2|$

4 Sestrojte grafy daných funkcí:

a) $f: y = \dfrac{|x|}{x}$
b) $f: y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$
c) $f: y = -\dfrac{|x|}{x}$
d) $f: y = \dfrac{|x-2|}{2-x}$

5 Sestrojte grafy daných funkcí:

a) $f: y = \big||x| - 1\big|$
b) $f: y = \big||x - 1| - 1\big|$
c) $f: y = \big||x| + x - 1\big|$
d) $f: y = \big|x - |x| + 1\big|$

Cvičení 72

1 Auto má spotřebu 6 litrů benzinu na 100 km. Na začátku jízdy mělo v plné nádrži 36 litrů benzinu.

a) Najděte funkci vyjadřující závislost počtu litrů benzinu v nádrži na počtu ujetých kilometrů a sestrojte graf této funkce.
b) Po kolika kilometrech jízdy bude v nádrži poslední litr benzinu?

2 Obchodník rozváží zboží do vzdálenosti 80 km od své prodejny. Rozvoz pro něj zajišťují dopravci A a B. Dostal od nich tyto nabídky ceny za dopravu: A — 12 Kč za km, B — základní sazba 350 Kč za jednu jízdu a navíc 5 Kč za km.

a) Nechť x km je vzdálenost a c Kč cena za dopravu. Funkce vyjadřující závislost c na x u dopravců A a B označíme f_A, f_B. Sestavte předpisy pro obě tyto funkce a sestrojte grafy funkcí f_A, f_B.
b) Pro jakou vzdálenost jsou cenové nabídky obou dopravců stejné?
c) Který dopravce je levnější pro dopravu zboží do vzdálenosti 20 km, 40 km, 60 km?

3 Turista jde pravidelným tempem 4,8 km/h. Do 9 h již ušel 11 km, pochod ukončil ve 13 h. Najděte funkci, která udává vzdálenost s km, kterou turista ušel od začátku pochodu do okamžiku, kdy od 9 h uplynulo dalších t hodin. Kolik kilometrů ušel do 11 h 30 min?

4 Z nádrže o objemu 1 200 litrů vytéká voda rychlostí 3 l/s. Najděte:

a) funkci udávající množství vyteklé vody v l za danou dobu v s;

b) funkci udávající, kolik l vody ještě v nádrži zbývá v daném čase. Sestrojte grafy obou funkcí v téže soustavě souřadnic.

5 Z místa A do místa B vzdáleného 360 km vyjelo v 6 h nákladní auto rychlostí 60 km/h. V 6 h 40 min vyjelo za nákladním autem osobní auto rychlostí 90 km/h.

a) Za jak dlouhou dobu osobní auto nákladní auto dohoní?

b) Jakou rychlostí by muselo jet osobní auto, aby nákladní auto dostihlo až v místě B?

Řešte početně i graficky.

[**1.** a) $y = -\frac{3}{50}x + 36$; b) $x = 583{,}\overline{3}$ km **2.** a) $f_A\colon y = 12x$, $f_B\colon y = 5x + 350$; b) 50 km; c) 20 km — A, 40 km — A, 60 km — B **3.** $s = 4{,}8t + 11$, $t \in \langle 0; 4\rangle$; 23 km **4.** a) $y = 3x$; b) $y = -3x + 1\,200$ **5.** a) za 2 hod po výjezdu nákladního auta; b) $v = 67{,}5$ km/h]

Cvičení 73

1 Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí $f\colon y = ax^2$, je-li dáno:

a) $a = 2$

b) $a = \frac{1}{2}$

c) $a = -2$

d) $a = -\frac{1}{2}$

2 Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí $f\colon y = ax^2 + c$, je-li dáno:

a) $a = 2,\ c = 1$ b) $a = -2,\ c = 1$

c) $a = 2,\ c = -1$ d) $a = -2,\ c = -1$

3 Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí $f\colon y = ax^2 + bx$, je-li dáno:

a) $a = 1,\ b = 4$ b) $a = 1,\ b = -4$

c) $a = -1,\ b = 4$ d) $a = -1,\ b = -4$

4 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = 4 - x^2$ b) $f\colon y = |4 - x^2|$

c) $f\colon y = x^2 - 4$ d) $f\colon y = 4 - |4 - x^2|$

5 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = x^2 - 6x$ b) $f\colon y = 6x - x^2$

c) $f\colon y = x^2 + 6x$ d) $f\colon y = -6x - x^2$

[**4.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 4\rangle$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -4; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 4\rangle$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -9; +\infty)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 9\rangle$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -9; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 9\rangle$]

Cvičení 74

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = x^2 + 2x + 4$ b) $f\colon y = -x^2 - 2x + 4$

c) $f\colon y = x^2 - 2x + 4$ d) $f\colon y = -x^2 + 2x + 4$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = 2x^2 + 3x + 1$ b) $f\colon y = -2x^2 + 3x + 1$

c) $f\colon y = 2x^2 - 3x + 1$ d) $f\colon y = -2x^2 - 3x + 1$

3 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = 4x^2 - 4x + 1$ b) $f\colon y = -4x^2 + 4x - 1$

c) $f\colon y = 4x^2 + 4x + 1$ d) $f\colon y = -4x^2 - 4x - 1$

4 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = |x^2 - 5x + 6|$ b) $f\colon y = x^2 - |5x + 6|$

c) $f\colon y = |x^2 - 5x| + 6$ d) $f\colon y = x^2 - 5|x| + 6$

5 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce:

a) $f\colon y = x|x|$ b) $f\colon y = (x - 1)|x|$

c) $f\colon y = x|x - 1|$ d) $f\colon y = (x - 1)|x - 1|$

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 3; +\infty)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 5\rangle$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 3; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 5\rangle$ **2.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left\langle -\frac{1}{8}; +\infty\right)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left(-\infty; \frac{17}{8}\right\rangle$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left\langle -\frac{1}{8}; +\infty\right)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left(-\infty; \frac{17}{8}\right\rangle$ **3.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 0\rangle$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 0\rangle$ **4.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left(-\frac{49}{4}; +\infty\right)$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 6; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$

Cvičení 75

1 Funkci $f\colon y = x^2 + px + q$ vyjádřete ve tvaru $f\colon y - n = \pm(x - m)^2$ a sestrojte její graf, je-li:

a) $y = x^2 + 2x + 4$ b) $y = x^2 + 2x - 4$

c) $y = x^2 - 2x + 4$ d) $y = x^2 - 2x - 4$

2 Funkci $f\colon y = -x^2 + px + q$ vyjádřete ve tvaru $f\colon y = -(x-m)^2 + n$ a sestrojte její graf, je-li:

a) $y = -x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 + x - 1$

c) $y = -x^2 + 8x + 9$

d) $y = -x^2 - 5x + 1$

3 Funkci $f\colon y = ax^2 + bx + c$ vyjádřete ve tvaru $f\colon y = a(x-m)^2 + n$ a sestrojte její graf, je-li:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$

b) $y = 3x^2 + 5x - 4$

c) $y = -4x^2 + x - 3$

d) $y = -7x^2 - 6x + 5$

4 Určete předpisem $y = ax^2 + bx + c$ kvadratickou funkci f, pro kterou platí:

a) $f(0) = 0,\ f(-2) = 4,\ f(3) = 6,$

b) $f(0) = 4,\ f(1) = 3,\ f(2) = 0,$

c) $f(0) = 6,\ f(1) = 2,\ f(-1) = 12,$

d) $f(1) = -3,\ f(-1) = -9,\ f(2) = -2.$

5 Určete všechna $c \in \mathsf{R}$, pro která mají grafy funkcí $y = -x^2 + c$ a $y = x^2 - 1$

a) dva různé společné body,

b) jeden společný bod,

c) žádný společný bod.

1. a) $y - 3 = (x+1)^2$; b) $y + 5 = (x+1)^2$; c) $y - 3 = (x-1)^2$; d) $y + 5 = (x-1)^2$ **2.** a) $y = -(x+2)^2 + 5$; b) $y = -(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$; c) $y = -(x-4)^2 + 25$; d) $y = -(x+\frac{5}{2})^2 + \frac{29}{4}$ **3.** a) $y = 2(x-\frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$; b) $y = 3(x+\frac{5}{6})^2 - \frac{73}{12}$; c) $y = -4(x-\frac{1}{8})^2 - \frac{47}{16}$; d) $y = -7(x+\frac{3}{7})^2 + \frac{44}{7}$ **4.** a) $y = \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$; b) $y = -x^2 + 4$; c) $y = x^2 - 5x + 6$; d) $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{16}{3}$ **5.** a) $c > -1$; b) $c = -1$; c) $c < -1$

Cvičení 76

1 V R řešte graficky rovnice:

a) $x^2 - x - 6 = 0$
b) $x^2 - x + 1 = 0$
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
d) $x^2 + 2x - 3 = 0$

2 V R řešte graficky nerovnice:

a) $x^2 - x - 6 \geqq 0$
b) $x^2 - x + 1 \leqq 0$
c) $x^2 - 4x + 4 > 0$
d) $x^2 + 2x - 3 < 0$

3 Nechť $\mathsf{A} = \{[x;y] \in \mathsf{R}^2;\, y \geqq x^2\}$, $\mathsf{B} = \{[x;y] \in \mathsf{R}^2;\, y \leqq 4 - x^2\}$. Graficky znázorněte množiny:

a) A
b) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$
c) B
d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$

4 V R řešte graficky rovnice s parametrem $b \in \mathsf{R}$:

a) $4 - x^2 = b$
b) $x^2 - 4 = b$
c) $|4 - x^2| = b$
d) $|4 - x^2| = x$

5 V R řešte graficky rovnice:

a) $x^2 - |x| - 2 = 0$
b) $x^2 + |x| - 2 = 0$
c) $x^2 - |x - 2| = 0$
d) $x^2 + |x - 2| = 0$

Cvičení 77

1 Kladné číslo a rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

2 Těleso je vrženo svisle vzhůru s počáteční rychlostí v m/s. Určete jaké největší výšky dosáhne.

3 Pletivo dlouhé 8 m má ohradit obdélníkový záhon, jehož jednu stranu tvoří zeď. Jak by měl být záhon dlouhý, aby jeho obsah byl co největší?

4 Z plechu tvaru kruhu o poloměru r je třeba vystřihnout pravoúhelník. Jaké budou jeho rozměry, aby odpad byl minimální?

5 Z nádrže otvorem ve výšce h nad zemí vytéká voda rychlostí v ve vodorovném směru. Určete, v jaké vzdálenosti x od nádrže voda dopadá na zem. Řešte obecně a potom pro hodnoty $h = 3\,\mathrm{m}$, $v = 5\,\mathrm{m/s}$.

[**1.** $\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}a$ **2.** Návod. Užijte vzorce $s = vt - \frac{1}{2}gt^2$, který znáte z fyziky. $\frac{v^2}{2g}$ m **3.** 4 m **4.** čtverec o straně $r\sqrt{2}$ **5.** Návod. Užijte vztahů $x = vt$, $y = h - \frac{1}{2}gt^2$, které znáte z fyziky. $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $x \doteq 3{,}87\,\mathrm{m}$]

Cvičení 78

1 Je dána funkce $f\colon y = x^2$, $x \geqq 0$.

a) K funkci f najděte funkci inverzní.
b) Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{D}(f^{-1})$, $\mathsf{H}(f^{-1})$.
c) Načrtněte do jedné soustavy souřadnic grafy obou funkcí f a f^{-1}.

2 Je dána funkce $f\colon y = x^3$.

a) K funkci f najděte funkci inverzní.
b) Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{D}(f^{-1})$, $\mathsf{H}(f^{-1})$.
c) Načrtněte do jedné soustavy souřadnic grafy obou funkcí f a f^{-1}.

3 Je dána funkce $f\colon y = \sqrt{x+1}$.

a) K funkci f najděte funkci inverzní.
b) Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{D}(f^{-1})$, $\mathsf{H}(f^{-1})$.
c) Načrtněte do jedné soustavy souřadnic grafy obou funkcí f a f^{-1}.

4 Je dána funkce $f\colon y = -x^3$.

a) K funkci f najděte funkci inverzní.

b) Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{D}(f^{-1})$, $\mathsf{H}(f^{-1})$.

c) Načrtněte do jedné soustavy souřadnic grafy obou funkcí f a f^{-1}.

5 Je dána funkce f. Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a zjistěte, zda je sudá, lichá, monotónní, omezená, má-li extrémy, a sestrojte její graf.

a) $f\colon y = |\sqrt[3]{x}|$

b) $f\colon y = -\sqrt{x}$

c) $f\colon y = x|x|$

d) $f\colon y = x^2|x|$

1. a) $y = \sqrt{x}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}_0^+, \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+, \mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}_0^+, \mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}_0^+$ **2.** a) $y = \sqrt[3]{x}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}$ **3.** a) $y = x^2 - 1$; b) $\mathsf{D}(f) = \langle -1; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+$; $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}_0^+, \mathsf{H}(f^{-1}) = \langle -1; +\infty)$ **4.** a) $y = \sqrt[3]{-x}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; lichá, rostoucí, není omezená, extrémy nemá; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}_0^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^-$; ani sudá, ani lichá, klesající, omezená shora, maximum v bodě $x = 0$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; lichá, rostoucí, není omezená, extrémy nemá; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; sudá, ani rostoucí, ani klesající, omezená zdola, minimum v bodě $x = 0$

Cvičení 79

1 Dané lomené výrazy $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ vyjádřete ve tvaru $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \dfrac{S(x)}{Q(x)}$, kde $R(x)$, $S(x)$, $Q(x)$ jsou mnohočleny a stupeň $S(x)$ je menší než stupeň $Q(x)$:

a) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

b) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + x - 2}$

d) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

2 Odhadněte průběh grafů funkcí:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1+x^2}$ b) $f\colon y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

c) $f\colon y = \dfrac{x}{1+x^2}$ d) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2}$

3 Určete definiční obory daných výrazů a pak určete neznámé koeficienty A, B, C, D z jejich rozkladů, které mají platit pro všechna přípustná x:

a) $\dfrac{3x+5}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$,

b) $\dfrac{2x^2+1}{x^4+x^2+1} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$,

c) $\dfrac{x}{x^3-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$, d) $\dfrac{2x-5}{x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$.

4 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{2}{x}$ b) $f\colon y = \dfrac{2}{x} + 1$

c) $f\colon y = \dfrac{2}{x-1}$ d) $f\colon y = \dfrac{2}{x-1} + 1$

5 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{2x-5}{3x+2}$ b) $f\colon y = \dfrac{3x}{x+3}$

c) $f\colon y = \dfrac{4-x}{4+x}$ d) $f\colon y = \dfrac{x+2}{3x}$

1. a) $x-1-\frac{3}{x+1}$; b) x^4+x^2+1; c) $x-1+\frac{5x-1}{x^2+x-2}$; d) $1+\frac{5}{x-2}$ **3.** a) $\mathsf{D}=\mathsf{R}\setminus\{2,3\}$, $A=-11$, $B=14$; b) $\mathsf{D}=\mathsf{R}$, $A=-\frac{1}{2}$, $B=C=D=\frac{1}{2}$; c) $\mathsf{D}=\mathsf{R}\setminus\{1\}$, $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$; d) $\mathsf{D}=\mathsf{R}\setminus\{0,1\}$, $A=-5$, $B=7$ **4.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$ **5.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{\frac{2}{3}\}$; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-3\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{3\}$; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-4\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-1\}$; d) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

Cvičení 80

1 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = x^{-2}$

b) $h\colon y = x^{-4}$

c) $g\colon y = x^{-3}$

d) $i\colon y = x^{-5}$

Na závěr načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí f, h a do druhého obrázku grafy funkcí g, i.

2 K dané funkci najděte funkci inverzní a načrtněte do jednoho obrázku grafy obou funkcí:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1+x}$

b) $f\colon y = \dfrac{x-2}{x-3}$

c) $f\colon y = \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $f\colon y = \dfrac{x}{x+1}$

3 Danou funkci $f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ vyjádřete ve tvaru $y = \dfrac{k}{x-m} + n$, kde m, n jsou konstanty:

a) $f\colon y = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $f\colon y = \dfrac{x}{2x+3}$

c) $f\colon y = \dfrac{2x+3}{x-5}$

d) $f\colon y = \dfrac{1-x}{1+x}$

4 V R řešte graficky i početně dané rovnice a nerovnice:

a) $\dfrac{1}{x} \leqq x$

b) $\dfrac{x+1}{x-3} < 1$

c) $\dfrac{2x+1}{3x-2} \geqq 0$

d) $\dfrac{1}{|x|} \geqq 4 - |x|$

5 Načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{|x|}$

b) $f\colon y = \dfrac{x}{|x|+2}$

c) $f\colon y = \left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|$

d) $f\colon y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$; b) $\mathsf{D}(h) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(h) = \mathsf{R}^+$; c) $\mathsf{D}(g) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(g) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$; d) $\mathsf{D}(i) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(i) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$ **2.** a) $y = \frac{1-x}{x}$; b) $y = \frac{3x-2}{x-1}$; c) $y = \frac{x+1}{x-1}$; d) $y = \frac{x}{1-x}$ **3.** a) $y = 1 + \frac{2}{x-1}$; b) $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4x+6} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{4}}{x-\left(-\frac{3}{2}\right)}$; c) $y = 2 + \frac{13}{x-5}$; d) $y = -1 + \frac{2}{1+x}$ **4.** a) $\langle -1; 0) \cup \langle 1; +\infty)$; b) $(-\infty; 3)$; c) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup$ $\cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; d) $\left(0; 2-\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle 2+\sqrt{3}; +\infty\right)$

Cvičení 81

1 V N^2 řešte rovnice:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{90}$

c) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{54}$ d) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \sqrt[4]{324}$

2 Vyjádřete jedinou odmocninou:

a) $\sqrt[5]{s\sqrt[3]{s}}$ b) $\sqrt{5\sqrt{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}$ d) $\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$

3 Upravte dané výrazy:

a) $\left[a\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}\right] : \frac{b+\sqrt{ab}}{b\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$,

b) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,

c) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{3}{2+\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}\right)^4$,

d) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

4 Roznásobte:

a) $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$

5 Dané výrazy vyjádřete ve tvaru $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ s celými čísly x, y:

a) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$, b) $\sqrt{6+\sqrt{20}}$, c) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$, d) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

1. a) $\mathsf{K} = \{[2;32],[8;18],[18;8],[32;2]\}$; b) $\mathsf{K} = \{[2;16],[16;2]\}$; c) $\mathsf{K} = \{[10;40],[40;10]\}$; d) $\mathsf{K} = \{[4;64],[64;4]\}$ **2.** a) $\sqrt[15]{s^4}$; b) $\sqrt[4]{5^3}$; c) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^4}$; d) $\sqrt[30]{a^{29}}$ **3.** a) 1; b) 1; c) 1 808; d) $\sqrt{20}$ **4.** a) $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$; b) 1; c) $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$; d) $2(a+\sqrt{a^2-b})$ **5.** a) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}+1$; c) $\sqrt{7}-1$; d) $3-\sqrt{2}$

Cvičení 82

1 Vypočtěte:

a) $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}$ b) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{\frac{1}{3}}$

c) $\left(0{,}3^{-\frac{9}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ d) $4^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{4}{6}}$

2 Uveďte, kdy mají dané výrazy smysl, a pak je upravte:

a) $x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ b) $\left(x^{0,25}\cdot y^{0,75}\right)^4$

c) $x^{\frac{1}{3}} : x^{-0,5}$ d) $\left(x^{-\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{9}{4}}$

3 Vypočtěte:

a) $\dfrac{45^{\frac{1}{2}}-20^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}}$ b) $8^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}$

c) $2^{\frac{1}{10}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}$ d) $5{,}062\,5^{0,75}$

4 Dokažte:

a) $\forall k \in \mathsf{R}^+,\ k \neq 1\colon\ \dfrac{k^{-0,5}+k^{0,5}}{k-1} - \dfrac{1-k^{-0,5}}{k^{0,5}+1} = \dfrac{2}{k-1}.$

b) $\forall a,b \in \mathsf{R}^+,\ a \neq b\colon\ \dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} = 2(ab)^{\frac{1}{3}}.$

5 Určete definiční obor daného výrazu a výraz upravte:

$$V(x) = \left[\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1} - \left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$$

[**1.** a) 5; b) $5^{\frac{1}{3}}$; c) $0{,}3^{\frac{6}{5}}$; d) 2 **2.** a) $x^{\frac{1}{3}}$, $x \neq 0$; b) xy^3, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$; c) $x^{\frac{5}{6}}$, $x > 0$; d) x^6, $x > 0$ **3.** a) 1; b) 4; c) $2^{\frac{3}{10}}$; d) $\frac{27}{8}$ **5.** $x \in \mathsf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt[3]{2}, 2\}$, $V(x) = \frac{x^2}{2x-1}$]

Cvičení 83

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = 2^x$

b) $f\colon y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

c) $f\colon y = 2^{-x}$

d) $f\colon y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = 3^x$

b) $f\colon y = 3^x - 1$

c) $f\colon y = 3^{x-1}$

d) $f\colon y = 3^{x-1} - 1$

3 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = 2^{|x|}$

b) $f\colon y = \left|2^{|x|} - 4\right|$

c) $f\colon y = 2^{|x|} - 4$

d) $f\colon y = -2^{|x|}$

4 Je dána funkce $f\colon y = \left(\dfrac{m}{m+2}\right)^x$, $x \in \mathsf{R}$.

a) Pro která m je funkce f rostoucí?
b) Pro která m je funkce f klesající?
c) Pro která m platí $f(x) = 2^x$ pro všechna x?
d) Pro která m platí $f(3) = \frac{1}{8}$?

5 Načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \mathrm{e}^x$
b) $f\colon y = \mathrm{e}^{-x}$
c) $f\colon y = \mathrm{e}^{-x^2}$
d) $f\colon y = \mathrm{e}^{|x|}$

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$ **2.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-1; +\infty)$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-1; +\infty)$ **3.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 1; +\infty)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -3; +\infty)$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; -1\rangle$ **4.** a) $m \in (-\infty; -2)$; b) $m \in (-2; +\infty)$; c) $m = -4$; d) $m = 2$

Cvičení 84

1 V R řešte rovnice:

a) $2^x = 16$
b) $5^x = \frac{1}{25}$
c) $3^x = \sqrt{27}$
d) $5^{-x} = 0{,}008$

2 V R řešte rovnice:

a) $2^{x+2} - 2^x = 96$
b) $4^{x-1} + 4^{x-2} + 4^{x-3} = 42$
c) $3^{x-3} = 108 - 3^{x-2}$
d) $5^{x+1} - 15 \cdot 5^{x-1} = 1\,250$

3 V R řešte rovnice:

a) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ b) $4^x + 2^{x+1} - 80 = 0$

c) $4^x - 6 \cdot 2^x - 160 = 0$ d) $9^{x+1} + 8 \cdot 3^x - 1 = 0$

4 V R řešte nerovnice:

a) $2^x > 8$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$

c) $3^x < \sqrt{3}$ d) $0{,}5^x > 4$

5 V R řešte nerovnice:

a) $2^x + 2^{1-x} - 3 < 0$ b) $2^{3x-1} - 4^{x+1} \geqq 0$

c) $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-3x} - \frac{2^{x+1}}{3^{x+1}} < 0$

1. a) $x = 4$; b) $x = -2$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x = 3$ **2.** a) $x = 5$; b) $x = \frac{7}{2}$; c) $x = 6$; d) $x = 4$ **3.** a) $x = 0$, $x = 2$; b) $x = 3$; c) $x = 4$; d) $x = -2$ **4.** a) $x \in (3; +\infty)$; b) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; c) $x \in (-1; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; -2)$ **5.** a) $x \in (0; 1)$; b) $x \in \langle 3; +\infty)$; c) $x \in \left(-\infty; \frac{\log 2}{\log 2 - \log 5}\right)$; d) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$

Cvičení 85

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \log_2 x$ b) $f\colon y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f\colon y = \log_2(-x)$ d) $f\colon y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \log_3 x$ b) $f\colon y = \log_3 x - 1$

c) $f\colon y = \log_3(x - 1)$ d) $f\colon y = \log_3(x - 1) - 1$

3 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \log_2 |x|$

b) $f\colon y = |\log_2 |x| - 4|$

c) $f\colon y = \log_2 |x| - 4$

d) $f\colon y = -\log_2 |x|$

4 Najděte funkci inverzní k funkci f a načrtněte grafy obou funkcí. Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{D}(f^{-1})$, $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{H}(f^{-1})$:

a) $f\colon y = 2^x$

b) $f\colon y = 2^x - 3$

c) $f\colon y = 2^{x-3}$

d) $f\colon y = 2^{x-3} + 3$

5 Najděte funkci inverzní k funkci f a načrtněte grafy obou funkcí. Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{D}(f^{-1})$, $\mathsf{H}(f)$, $\mathsf{H}(f^{-1})$:

a) $f\colon y = \log_2 x$

b) $f\colon y = \log_2(x+2) - 3$

c) $f\colon y = \log_2(x-4)$

d) $f\colon y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 2$

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^-$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^-$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ **2.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = (1; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = (1; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ **3.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ **4.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$, $f^{-1}\colon y = \log_2 x$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-3; +\infty)$, $f^{-1}\colon y = \log_2(x+3)$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = (-3; +\infty)$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}^+$, $f^{-1}\colon y = \log_2 x + 3$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (3; +\infty)$, $f^{-1}\colon y = \log_2(x-3) + 3$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = (3; +\infty)$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $f^{-1}\colon y = 2^x$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{R}^+$; b) $\mathsf{D}(f) = (-2; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $f^{-1}\colon y = 2^{x+3} - 2$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = (-2; +\infty)$; c) $\mathsf{D}(f) = (4; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $f^{-1}\colon y = 2^x + 4$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = (4; +\infty)$; d) $\mathsf{D}(f) = (-1; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $f^{-1}\colon y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1$, $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = (-1; +\infty)$

Cvičení 86

1 V R řešte rovnice:

a) $\log_2 x = 2$

b) $\log_{16} x = 2$

c) $\log_4 x = 2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$

2 V R řešte rovnice:

a) $\log_x 16 = 2$

b) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

c) $\log_x \frac{1}{27} = -3$

d) $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

3 V R řešte rovnice:

a) $\log_2 8 = x$

b) $\log_5 \sqrt{125} = x$

c) $\log_3 \frac{1}{27} = x$

d) $\log_8 \frac{1}{4} = x$

4 V R řešte nerovnice:

a) $\log_2 x > 3$

b) $\log_{0,5} x < -2$

c) $\log_5 x < 2$

d) $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$

5 V R řešte rovnice:

a) $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$

b) $1 + \log x^3 = \dfrac{10}{\log x}$

c) $2\log x = 3 + \dfrac{2}{\log x}$

d) $(2 + \log x)\log x = -1$

[**1.** a) $x = 4$; b) $x = 256$; c) $x = 16$; d) $x = \frac{1}{4}$ **2.** a) $x = 4$; b) $x = \frac{1}{4}$; c) $x = 3$; d) $x = 8$ **3.** a) $x = 3$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = -3$; d) $x = -\frac{2}{3}$ **4.** a) $x > 8$; b) $x > 4$; c) $x < 25$; d) $x < 9$ **5.** a) $x = 243$, $x = \frac{1}{9}$; b) $x = 10\sqrt[3]{100}$, $x = \frac{1}{100}$; c) $x = 100$, $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$; d) $x = \frac{1}{10}$]

Cvičení 87

1 V R řešte rovnice:

a) $2\log(x-2) = \log(14-x)$,

b) $\log(x+3) - \log(x-3) = \log(x-1)$,

c) $\log(x+13) - \log(x-3) = 1 - \log 2$,

d) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log x = \log(x+2)$.

2 V R řešte rovnice:

a) $x^{\log x} = 100x$

b) $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$

c) $x^{1+\log x} = 100$

d) $x^{3\log x - 5} = x^{4-7\log x}$

3 V R řešte rovnice:

a) $\frac{1}{2}\log x = 2\log 2$

b) $4\log x = 3\log 16$

c) $2\log x = -3\log 25$

d) $\log x = 2 - \log 5$

4 V R řešte nerovnice:

a) $\log(x^3+1) - \log 7 - \log x = \log(x+1) - \log 6$,

b) $2\log x - \dfrac{3}{\log\sqrt{x}} = 4$,

c) $\log\sqrt{3x-5} + \log\sqrt{7x-3} = 1 + \log\frac{1}{10}\sqrt{11}$,

d) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$.

5 V R řešte rovnice:

a) $\log\sqrt{x+4} - \log\sqrt{x-4} = \log 12 - \log 4$,

b) $2\log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-1} = \log 2 + 2\log 6$,

c) $\dfrac{\log x^2 + 7}{\log x + 7} = 2$,

d) $\dfrac{\log x}{1 - \log 2} = 2$.

1. a) $x=5$; b) $x=5$; c) $x=7$; d) nemá řešení v R **2.** a) $x=10^2$, $x=10^{-1}$; b) $x=1$, $x=\frac{1}{10}$, $x=10$; c) $x=10^{-2}$, $x=10$; d) $x=1$, $x=10^{\frac{9}{10}}$ **3.** a) $x=16$; b) $x=8$; c) $x=\frac{1}{125}$; d) $x=20$ **4.** a) $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{3}{2}$; b) $x=10^3$, $x=10^{-1}$; c) $x=2$; d) $x=3$, $x=5$ **5.** a) $x=5$; b) $x=17$; c) nemá řešení v R; d) $x=25$

Cvičení 88

1 V R^2 řešte soustavu rovnic:

a) $2^{\log x}\cdot 3^{\log y}=\sqrt{54}$
$\log x+\log y=2$

b) $2^x\cdot 4^y=8\sqrt{2}$
$\ln(x+y)=0$

c) $\frac{1}{100}xy=5$
$x^{\log y}=5^2$

d) $\log_5 x+3^{\log_3 y}=7$
$x^y=5^{12}$

2 V R^2 řešte soustavu rovnic:

a) $4^x\cdot 3^y=18$
$9^x\cdot 5^y=75$

b) $\sqrt[4]{2^x}\cdot\sqrt{2^y}=8\sqrt{2}$
$\sqrt{2^{x-2}}\cdot\sqrt[3]{2^{y+1}}=16\cdot\sqrt[3]{2}$

c) $5^{x+1}+3^{y+1}=26$
$9(5^{2x}+3^{2y})=226$

d) $\sqrt[x]{x+y}=3$
$2^{x-2}(x+y)=9$

3 V R řešte rovnice:

a) $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$

b) $\dfrac{\ln(3x+4)}{\ln(x+2)}=\ln \mathrm{e}^2$

c) $\log x^{2\log\sqrt{x}}+\log\dfrac{1}{x^2}=3$

d) $x^{3+4\log x}-10x^6=0$

4 V R řešte rovnice:

a) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$,

b) $\log_2(x-1)^2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=9\log_2\sqrt[3]{4}$,

c) $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\frac{1}{3}}x=6$,

d) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

5 Pro všechny přípustné hodnoty proměnných a, b, m, n, x, y, z dokažte:

a) $\log_z m + \log_z \dfrac{1}{m} = 0$

b) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

c) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

d) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

1. a) $[10^{\frac{1}{2}}; 10^{\frac{3}{2}}]$; b) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$; c) $[5; 100]$, $[100; 5]$; d) $\left[5^3; 4\right]$, $\left[5^4; 3\right]$ **2.** a) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; b) $[8; 3]$; c) $[1; -1]$, $\left[\log_5 \frac{45}{17}; \log_3 \frac{217}{51}\right]$; d) $[2; 7]$ **3.** a) $x = -1$, $x = 2$; b) $x = 0$; c) $x = 10^3$, $x = 10^{-1}$; d) $x = 10$, $x = 10^{-\frac{1}{4}}$ **4.** a) $x = 16$; b) $x = 5$; c) $x = 9$; d) $x = 2^{\sqrt{2}}$, $x = 2^{-\sqrt{2}}$

Goniometrie

Cvičení 89

1 Načrtněte si rovnostranný trojúhelník a čtverec a s jejich užitím zapište hodnoty

a) $\sin\alpha$, b) $\cos\alpha$, c) $\mathrm{tg}\,\alpha$, d) $\mathrm{cotg}\,\alpha$

pro $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$.

2 V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C vypočtěte velikosti zbývajících stran a úhlů, je-li dáno:

a) $a = 1\,\mathrm{cm}$, $c = 2\,\mathrm{cm}$ b) $\alpha = 45°$, $c = 3\,\mathrm{cm}$

c) $a = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $b = 1\,\mathrm{cm}$ d) $\beta = 20°$, $b = 2\,\mathrm{cm}$

3 V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C vypočtěte velikosti zbývajících stran, je-li dáno:

a) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{5}{4}$ b) $b = 3\,\mathrm{cm}$, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

c) $c = 10\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ d) $a = 2\,\mathrm{cm}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

4 S přesností na dvě desetinná místa určete $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{cotg}\,\alpha$, je-li dáno:

a) $\alpha = 23°$ b) $\alpha = 37°30'$ c) $\alpha = 86°50'$ d) $\alpha = 11°11'$

5 S přesností na setiny určete velikost ostrého úhlu x ve stupních:

a) $\sin x = 0{,}866\,0$ b) $\mathrm{tg}\,x = 0{,}577\,4$

c) $\cos x = 0{,}522\,5$ d) $\mathrm{cotg}\,x = 5{,}670\,4$

1. a) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1; b) 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0; c) 0, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 1, $\sqrt{3}$, nedef.; d) nedef., $\sqrt{3}$, 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 0 **2.** a) $b = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$; b) $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}$, $b = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}$, $\beta = 45°$; c) $c = 2\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$; d) $c = \frac{2}{\sin 20°}\,\mathrm{cm}$, $a = 2\,\mathrm{cotg}\,20°\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 70°$ **3.** a) $b = \frac{28}{5}\,\mathrm{cm}$, $c = \frac{\sqrt{2\,009}}{5}\,\mathrm{cm}$; b) $a = \frac{3\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{cm}$, $c = \frac{9}{2}\,\mathrm{cm}$; c) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$; d) $b = \frac{3}{2}\,\mathrm{cm}$, $c = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}$ **4.** a) $\sin\alpha \doteq 0{,}39$, $\cos\alpha \doteq 0{,}92$, $\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 0{,}42$, $\mathrm{cotg}\,\alpha \doteq 2{,}36$; b) $\sin\alpha \doteq 0{,}61$, $\cos\alpha \doteq 0{,}79$, $\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 0{,}77$, $\mathrm{cotg}\,\alpha \doteq 1{,}30$; c) $\sin\alpha \doteq 1{,}00$, $\cos\alpha \doteq 0{,}06$, $\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 18{,}07$, $\mathrm{cotg}\,\alpha \doteq 0{,}06$; d) $\sin\alpha \doteq 0{,}19$, $\cos\alpha \doteq 0{,}98$, $\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 0{,}20$, $\mathrm{cotg}\,\alpha \doteq 5{,}06$ **5.** a) $x \doteq 60{,}00°$; b) $x \doteq 30{,}00°$; c) $x \doteq 58{,}50°$; d) $x \doteq 10{,}00°$

Cvičení 90

1 Velikosti úhlů v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové:

a) $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ b) $210°$, $225°$, $240°$, $270°$

c) $120°$, $135°$, $150°$, $180°$ d) $300°$, $315°$, $330°$, $360°$

Výsledky zapište ve tvaru násobku π.

2 Velikosti úhlů v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové:

a) $4°$, $15°$, $54°$, $80°$ b) $205°$, $228°$, $261°$, $272°$

c) $100°$, $132°$, $160°$, $178°$ d) $301°$, $319°$, $342°$, $356°$

3 Velikosti úhlů v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové:

a) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ b) $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$

c) $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π d) $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, 2π

4 Velikosti úhlů v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové:

a) 1, 2, 3, 4;

b) 0,174 53; 0,314 16; 1,134 46; 2,478 37; 5,131 27;

c) 0,3; 0,6; 1,2; 2,4;

d) 0,123 4; 0,567 8; 1,234 5; 4,567 8.

5 Určete základní velikosti orientovaných úhlů, jejichž jedna velikost je

a) 5π, 12π, -37π, -50π;

b) $400°$, $500°$, $-300°$, $-1\,000°$;

c) $\frac{15}{6}\pi$, $-\frac{19}{5}\pi$, $\frac{20}{3}\pi$, $-\frac{31}{2}\pi$;

d) $-284°$, $-1\,083°$, $700°25'$, $-183°36'$.

1. a) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$; b) $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; c) $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π; d) $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, 2π **2.** a) přibližně 0,07; 0,26; 0,94; 1,40; b) přibližně 3,58; 3,98; 4,56; 4,75; c) přibližně 1,74; 2,30; 2,79; 3,11; d) přibližně 5,25; 5,57; 5,97; 6,21 **3.** a) $30°$; $45°$; $60°$; $90°$; b) $210°$; $225°$; $240°$; $270°$; c) $120°$; $135°$; $150°$; $180°$; d) $300°$; $315°$; $330°$; $360°$ **4.** a) přibližně $57{,}30°$; $114{,}59°$; $171{,}89°$; $229{,}18°$; b) přibližně $10{,}00°$; $18{,}00°$; $65{,}00°$; $142{,}00°$; $294{,}00°$; c) přibližně $17{,}19°$; $34{,}38°$; $68{,}75°$; $137{,}51°$; d) přibližně $7{,}07°$; $32{,}53°$; $70{,}73°$; $261{,}72°$ **5.** a) π; 0; π; 0; b) $40°$; $140°$; $60°$; $80°$; c) $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{5}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{1}{2}\pi$; d) $76°$; $357°$; $340°25'$; $176°24'$

Cvičení 91

1 Bez tabulek a kalkulačky určete hodnoty $\sin x$ pro x rovnající se:

a) $30°, 45°, 120°, 180°$ b) $210°, 240°, 315°, 360°$

c) $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi$ d) $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, 2\pi$

2 Bez tabulek a kalkulačky určete hodnoty $\cos x$ pro x rovnající se:

a) $0°, 60°, 90°, 150°$ b) $135°, 225°, 270°, 330°$

c) $\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$ d) $\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{4}\pi$

3 Bez tabulek a kalkulačky určete hodnoty $\operatorname{tg} x$ pro x rovnající se:

a) $30°, 45°, 120°, 180°$; b) $210°, 240°, 315°, 360°$;

c) $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi$; d) $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, 2\pi$

4 Bez tabulek a kalkulačky určete hodnoty $\operatorname{cotg} x$ pro x rovnající se:

a) $0°, 60°, 90°, 150°$ b) $135°, 225°, 270°, 330°$

c) $\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$ d) $\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{4}\pi$

5 Pomocí kalkulačky určete hodnoty:

a) $\sin 10°$; $\cos 100°$; $\operatorname{tg} 40°$, $\operatorname{cotg} 160°$;

b) $\sin 1$; $\cos 2$; $\operatorname{tg} 1{,}25$; $\operatorname{cotg} 3$;

c) $\sin 1\,000°$; $\cos(-800°)$; $\operatorname{tg} 400°$; $\operatorname{cotg}(-560°)$;

d) $\sin 10$; $\cos(-24{,}3)$; $\operatorname{tg} 12{,}52$; $\operatorname{cotg} 300$.

[**5.** a) přibližně 0,174; −0,174; 0,839; −2,747; b) přibližně 0,841; −0,416; 3,010; −7,015; c) přibližně −0,985; 0,174; 0,839; −2,747; d) přibližně −0,544; 0,673; −0,046; 0,022]

Cvičení 92

1 Bez tabulek a kalkulačky vypočítejte zbývající hodnoty goniometrických funkcí pro stejnou hodnotu x:

a) $\sin x = 0{,}6 \land x \in (\frac{1}{2}\pi; \pi)$ b) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4} \land x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

c) $\cos x = \frac{12}{13} \land x \in (0; \frac{1}{2}\pi)$ d) $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3} \land x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$

2 Pomocí kalkulačky určete hodnoty $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ pro x rovnající se daným hodnotám α, β:

a) $\alpha = 20°$, $\beta = 160°30'$
b) $\alpha = 0{,}32$; $\beta = 1{,}37$
c) $\alpha = 2\,360°44'$, $\beta = -304°27'$
d) $\alpha = -2{,}856$; $\beta = \frac{4}{7}\pi$

3 Bez úhloměru sestrojte ostrý úhel α, jestliže:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$
b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{6}$
c) $\cos\alpha = 0{,}4$
d) $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}5$

4 Na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic zobrazte body, které jsou obvyklým způsobem přiřazeny reálným číslům:

a) $\frac{1}{2}\pi$, π
b) 3π, -4π
c) $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$
d) $-\frac{8}{3}\pi$, $-\frac{15}{2}\pi$

5 Na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic zobrazte body, které jsou obvyklým způsobem přiřazeny orientovaným úhlům s velikostmi ve stupňové míře:

a) $60°$, $135°$
b) $330°$, $390°$
c) $210°$, $270°$
d) $585°$, $-810°$

1. a) $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$; b) $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{4}{5}$; $\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$; c) $\sin x = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{12}{5}$; d) $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$
2. a) $\sin\alpha \doteq 0{,}342$; $\cos\alpha \doteq 0{,}940$; $\operatorname{tg}\alpha \doteq 0{,}364$; $\operatorname{cotg}\alpha \doteq 2{,}747$; $\sin\beta \doteq 0{,}334$; $\cos\beta \doteq -0{,}943$; $\operatorname{tg}\beta \doteq -0{,}354$; $\operatorname{cotg}\beta \doteq -2{,}824$; b) $\sin\alpha \doteq 0{,}315$; $\cos\alpha \doteq 0{,}950$; $\operatorname{tg}\alpha \doteq 0{,}331$; $\operatorname{cotg}\alpha \doteq 3{,}018$; $\sin\beta \doteq 0{,}980$; $\cos\beta \doteq 0{,}199$; $\operatorname{tg}\beta \doteq 4{,}913$; $\operatorname{cotg}\beta \doteq 0{,}204$; c) $\sin\alpha \doteq -0{,}354$; $\cos\alpha \doteq -0{,}935$; $\operatorname{tg}\alpha \doteq 0{,}379$; $\operatorname{cotg}\alpha \doteq 2{,}642$; $\sin\beta \doteq 0{,}825$; $\cos\beta \doteq 0{,}566$; $\operatorname{tg}\beta \doteq 1{,}458$; $\operatorname{cotg}\beta \doteq 0{,}686$; d) $\sin\alpha \doteq -0{,}282$; $\cos\alpha \doteq -0{,}960$; $\operatorname{tg}\alpha \doteq 0{,}294$; $\operatorname{cotg}\alpha \doteq 3{,}406$; $\sin\beta \doteq 0{,}975$; $\cos\beta \doteq -0{,}222$; $\operatorname{tg}\beta \doteq -4{,}392$; $\operatorname{cotg}\beta \doteq -0{,}228$

Cvičení 93

1 Načrtněte graf funkce, která má definiční obor $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a je zadaná předpisem:

a) $f\colon y = \sin x$

b) $f\colon y = 2\sin x$

c) $f\colon y = \sin 2x$

d) $f\colon y = \sin x + 2$

2 Načrtněte graf funkce, která má definiční obor $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a je zadaná předpisem:

a) $f\colon y = \sin(x - \frac{1}{6}\pi)$

b) $f\colon y = \sin(2x - \frac{1}{6}\pi)$

c) $f\colon y = \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$

d) $f\colon y = \sin(2x + \frac{1}{2}\pi)$

3 Načrtněte graf funkce, která má definiční obor $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a je zadaná předpisem:

a) $f\colon y = |\sin x|$

b) $f\colon y = -\sin x$

c) $f\colon y = \sin |x|$

d) $f\colon y = -\sin |x|$

4 Načrtněte graf funkce, která má definiční obor $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a je zadaná předpisem:

a) $f\colon y = \frac{1}{2}\sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) + 1$

b) $f\colon y = 3\sin 2x - 2$

c) $f\colon y = 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + 3$

d) $f\colon y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi\right)$

5 Načrtněte graf funkce, která má definiční obor $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a je zadaná předpisem:

a) $f\colon y = |\operatorname{tg} x|$

b) $f\colon y = -\operatorname{cotg} x$

c) $f\colon y = \operatorname{tg} |x|$

d) $f\colon y = \operatorname{tg} 2x$

Cvičení 94

1 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$

d) $\operatorname{cotg} x = -1$

2 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin x = -0{,}836\,1$
b) $\operatorname{tg} x = -0{,}839\,1$
c) $\cos x = 0{,}565\,6$
d) $\operatorname{cotg} x = 0{,}362\,0$

3 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
b) $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg} x = 0$
c) $3\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$
d) $\operatorname{cotg}^2 x = \sqrt{3}\operatorname{cotg} x$

4 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$
b) $\cos(2x + \frac{1}{2}\pi) = 1$
c) $2\sin\frac{1}{3}x = \sqrt{3}$
d) $\operatorname{tg}(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{3}$

5 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin x + \cos x = 1$
b) $\sin x - \cos x = 1$
c) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$
d) $\sin x + \cos x = 1{,}1$

[**1.** a) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$; b) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$; c) $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$; d) $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ **2.** a) přibližně 4,131 7; 5,293 1; b) přibližně 2,443 46; 5,585 05; c) přibližně 0,969 6; 5,313 6; d) přibližně 1,223 5; 4,365 1 **3.** a) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$; b) $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$; c) π; d) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$ **4.** a) $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$; b) $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$; c) π; d) $\frac{4}{3}\pi$ **5.** a) 0, $\frac{1}{2}\pi$; b) $\frac{1}{2}\pi$, π; c) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$; d) přibližně 0,105 9; 1,464 9]

Cvičení 95

1 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin x = \sin 2x$
b) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$
c) $\cos x = \cos 2x$
d) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} 2x$

2 V R řešte rovnice:

a) $\sin x + \cos 2x = 1$
b) $2\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$
c) $2\sin x + \sin 2x = 0$
d) $\sin 2x - \cos 2x = 0$

3 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin x = \cos x$

b) $\operatorname{tg} x = 2\sin x$

c) $\sin x = \cos 3x$

d) $\operatorname{cotg} x = 2\cos x$

4 V R řešte rovnice:

a) $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(\pi - 3x)$

b) $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(5x - \frac{1}{6}\pi)$

c) $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(3x + \frac{1}{2}\pi)$

d) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(2x + \frac{1}{2}\pi)$

5 V R^2 řešte soustavu rovnic:

a) $\sin 2y = \sin x$
$x + y = \frac{1}{3}\pi$

b) $2\sin x = \sin y$
$x + y = \frac{2}{3}\pi$

c) $\sin x = \sin y$
$2x + 3y = \pi$

d) $\cos 4x + \sin 2y = -2$
$x - y = 2\pi$

1. a) 0, π, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$; b) 0, π; c) 0, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$; d) nemá řešení **2.** a) $k\pi$, $\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$, $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; b) $\frac{1}{4}\pi + k\pi$, přibližně $0{,}463\,6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; c) $k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$, $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; d) $\frac{1}{8}\pi + k\frac{1}{2}\pi$, $k \in \mathsf{Z}$ **3.** a) $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$; b) 0, π, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$; c) $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$; d) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ **4.** a) $\frac{1}{8}\pi + k\frac{1}{2}\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; $\frac{1}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; b) $\frac{1}{7}(2k+1)\pi$, $\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; c) $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; $\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{5}k\pi$; d) nemá řešení **5.** a) $\left[\frac{2}{9}\pi - \frac{2}{3}k\pi; \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right]$, $k \in \mathsf{Z}$; $\left[-\frac{1}{3}\pi - 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$, $k \in \mathsf{Z}$; b) $\left[\frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{1}{2}\pi - k\pi\right]$, $k \in \mathsf{Z}$; c) $\left[\frac{1}{5}\pi + \frac{6}{5}k\pi; \frac{1}{5}\pi - \frac{4}{5}k\pi\right]$, $k \in \mathsf{Z}$; d) $\left[\frac{7}{4}\pi + k\pi; -\frac{1}{4}\pi + k\pi\right]$, $k \in \mathsf{Z}$

Cvičení 96

1 Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathsf{R}$ platí:

a) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

b) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

d) $\operatorname{cotg} 2x = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}$

2 Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathsf{R}$ platí:

a) $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

b) $\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

c) $\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

d) $\left|\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

3 Nechť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} \in (0; \frac{1}{2}\pi)$. Vyjádřete pomocí t:

a) $\sin x$

b) $\operatorname{tg} x$

c) $\cos x$

d) $\operatorname{cotg} x$

4 Dokažte, že pro všechna $x \in \mathsf{R}$ platí:

a) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

b) $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$,

c) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

d) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

5 Dokažte, že pro všechna $x \in \mathsf{R}$ platí:

a) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$,

b) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$,

c) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$,

d) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$.

[**3.** a) $\frac{2t}{1+t^2}$; b) $\frac{2t}{1-t^2}$; c) $\frac{1-t^2}{1+t^2}$; d) $\frac{1-t^2}{2t}$]

Cvičení 97

1 Dokažte, že pro každý pravoúhlý trojúhelník ABC platí:

a) $a^2 = cc_a$

b) $c^2 = a^2 + b^2$

c) $b^2 = cc_b$

d) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{v_c^2}$

2 V pravoúhlém trojúhelníku ABC vypočtěte:

a) t_a, je-li $a = 126\,\mathrm{cm}$, $b = 84\,\mathrm{cm}$,

b) v_c, je-li $a = 65\,\mathrm{cm}$, $b = 156\,\mathrm{cm}$,

c) S, je-li dáno $b = 50\,\mathrm{cm}$, $v_c = 30\,\mathrm{cm}$,

d) a, b, je-li dáno $c_a = 64\,\mathrm{cm}$, $c_b = 225\,\mathrm{cm}$.

3 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou v centimetrech vyjádřeny přirozenými čísly. Délka jedné odvěsny je $5\,\mathrm{cm}$. Určete délku druhé odvěsny a délku přepony.

4 Určete délky zbývajících stran a velikosti úhlů v trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $\alpha = 48°$, $\beta = 107°$, $c = 135\,\mathrm{cm}$,

b) $a = 134\,\mathrm{cm}$, $b = 111\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 54°$,

c) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 8\,\mathrm{cm}$,

d) $a = 74\,\mathrm{cm}$, $b = 148\,\mathrm{cm}$, $\beta = 145°$.

5 V každém trojúhelníku ABC, který není pravoúhlý, platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

Dokažte.

[**2.** a) $105\,\mathrm{cm}$; b) $v_c = 60\,\mathrm{cm}$; c) $S = 937{,}5\,\mathrm{cm}^2$; d) $a = 136\,\mathrm{cm}$, $b = 255\,\mathrm{cm}$ **3.** $12\,\mathrm{cm}$, $13\,\mathrm{cm}$ **4.** a) $a \doteq 237{,}39\,\mathrm{cm}$, $b \doteq 305{,}48\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 25°$; b) $c = 113{,}10\,\mathrm{cm}$, $\alpha \doteq 73{,}44°$, $\beta \doteq 52{,}56°$; c) $\alpha \doteq 60{,}00°$, $\beta \doteq 38{,}21°$, $\gamma \doteq 81{,}79°$; d) $c \doteq 81{,}15\,\mathrm{cm}$, $\alpha \doteq 16{,}67°$, $\gamma \doteq 18{,}33°$]

Cvičení 98

Poznámka. V trojúhelníku ABC jsou a, b, c délky stran, α, β, γ, velikosti vnitřních úhlů, ϱ poloměr kružnice vepsané, r poloměr kružnice opsané, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ poloviční obvod.

1 Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Dokažte.

2 Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{abc}{4r}.$$

Dokažte.

3 Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \varrho \cdot s.$$

Dokažte.

4 Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{c^2}{2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)}.$$

Dokažte.

5 Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokažte.

Cvičení 99

1 Z okna ležícího v metrů nad horizontální rovinou vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu α a její patu v hloubkovém úhlu β. Jak je věž vysoká?

2 Budova výšky $v = 15\,\mathrm{m}$ je vzdálena $d = 30\,\mathrm{m}$ od břehu řeky. Z vodorovné střechy této budovy je vidět šířku řeky pod úhlem $\varphi = 15°$. Jak je řeka široká?

3 Ze dvou míst A a B na moři vzdálených $d = 3\,740\,\mathrm{m}$ byla pozorována loď L pod úhly $\varphi = |\sphericalangle LAB| = 72°35'$, $\psi = |\sphericalangle LBA| = 81°41'$. Vypočtěte vzdálenost lodi L od obou míst A a B.

4 Letadlo letí ve výšce h metrů směrem k letišti. V okamžiku prvního měření bylo z pozorovatelny zaměřeno pod výškovým úhlem α, při druhém měření pod výškovým úhlem β. Vypočítejte vzdálenost d, kterou letadlo uletělo mezi oběma měřeními.

5 Z výšiny ležící v metrů nad hladinou rybníka je vidět mrak ve výškovém úhlu α a jeho obraz ve vodě v hloubkovém úhlu β. V jaké výšce h je mrak nad hladinou? Řešte obecně a pak pro hodnoty $v = 80\,\mathrm{m}$, $\alpha = 56°$, $\beta = 58°$.

[**1.** $v(1 + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta})\,\mathrm{m}$ **2.** $v\frac{d+v\,\mathrm{tg}\,\varphi}{v-d\,\mathrm{tg}\,\varphi} - d \doteq 43{,}3\,\mathrm{m}$ **3.** $|LA| \doteq 8\,521\,\mathrm{m}$, $|LB| \doteq 8\,216\,\mathrm{m}$
4. $d = \frac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\,\mathrm{m}$ **5.** $h = \frac{v(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}\,\mathrm{m}$, $h \doteq 2\,094\,\mathrm{m}$]

Cvičení 100

1 K zjištění vzdálenosti bodů A, B oddělených od sebe řekou byla na jednom břehu řeky změřena základna $|AC| = b$ a úhly $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Vypočtěte vzdálenost bodů A, B. Řešte obecně a potom pro hodnoty $b = 100\,\mathrm{m}$, $\alpha = 60°$, $\gamma = 72°$.

2 Vypočtěte délku přímého tunelu mezi místy A, B, leží-li bod C od nich stranou tak, že platí $|AC| = b$, $|BC| = a$ a $|\sphericalangle CAB| = \alpha$. Řešte obecně a potom pro hodnoty $b = 170\,\mathrm{m}$, $a = 250\,\mathrm{m}$, $\alpha = 85°$.

3 Určete vzdálenost nepřístupných bodů A, B, jestliže je známa vzdálenost $d = |CD|$ dvou přístupných bodů C, D a $|\sphericalangle BDC| = \alpha$, $|\sphericalangle ACD| = \beta$, $|\sphericalangle ADC| = \gamma$, $|\sphericalangle BCD| = \delta$. Body A, B přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou CD.

4 Síla $\boldsymbol{F}$ dané velikosti je rozložena na dvě složky $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, které svírají se silou $\boldsymbol{F}$ úhly o daných velikostech α, β. Určete velikosti složek $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$. Řešte obecně a pak pro hodnoty $|\boldsymbol{F}| = 12\,\mathrm{N}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$.

5 Určete velikost výslednice dvou sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ o daných velikostech, jež působí v témž bodě a svírají úhel dané velikosti φ. Při jaké hodnotě φ by byla výslednice největší? Řešte obecně a pak pro hodnoty $|\boldsymbol{F}_1| = 125\,\mathrm{N}$, $|\boldsymbol{F}_2| = 75\,\mathrm{N}$, $\varphi = 50°$.

[**1.** $|AB| = b\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $|AB| \doteq 128\,\mathrm{m}$ **2.** $|AB| = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$, $|AB| \doteq 199\,\mathrm{m}$ **3.** $|AB| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(\gamma-\alpha)}$, $u = \frac{d\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $v = \frac{d\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$ **4.** $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}|\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $|\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}|\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $|\boldsymbol{F}_1| \doteq 8{,}78\,\mathrm{N}$, $|\boldsymbol{F}_2| \doteq 6{,}21\,\mathrm{N}$ **5.** $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{|\boldsymbol{F}_1|^2 + |\boldsymbol{F}_2|^2 + 2|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{F}_2|\cos\varphi}$, $|\boldsymbol{F}| \doteq 182{,}48\,\mathrm{N}$]

Stereometrie

Cvičení 101

1 Ve volném rovnoběžném promítání načrtněte

a) krychli s hranou délky $a = 4\,\text{cm}$,

b) pravidelný čtyřstěn s hranou délky $a = 4\,\text{cm}$,

c) pravidelný šestiboký hranol výšky $v = 6\,\text{cm}$ s podstavnou hranou délky $a = 4\,\text{cm}$,

d) pravidelný čtyřboký komolý jehlan s výškou $v = 4\,\text{cm}$ a s podstavnými hranami $a = 5\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$.

2 Určete počet všech přímek, které procházejí

a) dvěma z daných n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce,

b) dvěma z vrcholů krychle $ABCDEFGH$.

3 Určete počet všech rovin, které procházejí

a) třemi z daných n bodů, z nichž žádné čtyři neleží v téže rovině,

b) třemi z vrcholů krychle $ABCDEFGH$.

4 Body A, B, C, D neleží v jedné rovině.

a) Je možné, aby některé tři z nich ležely na jedné přímce?

b) Kolik přímek a rovin je těmito body určeno?

c) Dokažte, že žádné dvě přímky určené těmito body nejsou rovnoběžné.

d) Určete počet všech dvojic mimoběžek určených těmito body.

5 Nechť r, s jsou dvě mimoběžky a p, q dvě různé přímky, z nichž každá protíná obě mimoběžky r, s. Dokažte, že přímky p, q nejsou rovnoběžné ani různoběžné.

[**2.** a) $\frac{1}{2}n(n-1)$; b) 28 **3.** a) $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$; b) 26 **4.** a) ne; b) 6 přímek, 4 roviny; d) 3 dvojice]

Cvičení 102

1 V krychli $ABCDEFGH$ jsou body K, L, M, N, P, Q po řadě středy hran EA, AB, BC, CG, GH, EH. Zjistěte, zda následující body leží v jedné rovině:

a) K, L, M, P
b) K, L, M, G
c) K, L, N, P
d) K, L, P, Q

2 V krychli $ABCDEFGH$ jsou body P, Q, R po řadě středy hran EH, GH, DH. Určete vzájemnou polohu přímek:

a) PQ, CG
b) QR, CD
c) PR, CF

3 V krychli $ABCDEFGH$ jsou body P, Q, R, S po řadě středy stěn $ABCD$, $BCFG$, $FGHE$, $ADHE$. Určete vzájemnou polohu:

a) přímky PQ a roviny CDH
b) přímky SQ a roviny ABG
c) přímky RQ a roviny BCE
d) přímky PS a roviny EFG

4 V krychli $ABCDEFGH$ určete vzájemnou polohu rovin:

a) BEG, ACH
b) BCE, HBC

5 V krychli $ABCDEFGH$ jsou body P, Q, R, S po řadě středy hran AE, BF, CG, DH. Určete vzájemnou polohu rovin:

a) ABC, PQR, EFG
b) ABC, PQS, BCE
c) BCE, BCG, EFG
d) ABC, BCE, BCG
e) ABC, BCE, CDG

1. a) ano; b) ne; c) ano; d) ano **2.** a) mimoběžky; b) různoběžky; c) rovnoběžky **3.** a) rovnoběžné; b) přímka leží v rovině; c) rovnoběžné; d) různoběžné **4.** a) rovnoběžné; b) totožné **5.** a) rovnoběžné, různé; b) rovina BCE protíná rovnoběžné roviny ABC, PSQ; c) navzájem různoběžné, tři průsečnice BC, FG, EH; d) navzájem různoběžné, jediná průsečnice BC; e) navzájem různoběžné, protínají se v jednom bodě C

Cvičení 103

1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Načrtněte rovinu, která prochází středem M hrany BF a je rovnoběžná s rovinou:

a) ACH b) BDG

2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že rovina BDG je rovnoběžná s rovinou AFH.

3 Na hraně HG krychle $ABCDEFGH$ je dán bod Q, $|HQ| : |QG| = 3 : 1$. Bodem Q veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s rovinou ACH.

4 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod M je střed hrany BV. Určete a zdůvodněte vzájemnou polohu přímky DV a roviny ACM.

5 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je bod S střed podstavy $ABCD$. Bodem Q, který leží uvnitř úsečky SV tak, že platí $|SQ| : |QV| = 1 : 2$, veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s rovinou BCV a sestrojte její průsečnice s rovinou podstavy a bočními stěnami jehlanu.

[**5.** Návod. Bodem Q veďte vhodné přímky rovnoběžné s rovinou BCV.]

Cvičení 104

1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zobrazte průsečík přímky CE s rovinou BDM, kde M je střed hrany CG.

2 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Zobrazte průnik přímky MN s daným čtyřstěnem, je-li M střed úsečky TD, N leží na polopřímce AC, $|AN| = \frac{4}{3}|AC|$ a T je těžiště podstavy ABC daného čtyřstěnu.

3 Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Zobrazte průnik přímky PQ s kvádrem, je-li $P \in \mapsto CG$, $|CP| = \frac{3}{2}|CG|$, $Q \in \mapsto DA$, $|DQ| = 2|AD|$.

4 V krychli $ABCDEFGH$ zobrazte průsečnici rovin:
a) ACH, BDH b) EBG, ACF

5 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ jsou body P, R po řadě středy hran AV, CV, $Q \in BV$, $|BQ| = \frac{1}{4}|BV|$. Zobrazte průsečnice roviny PQR s rovinou ABC a zbývajícími bočními stěnami jehlanu.

Cvičení 105

1 Zobrazte krychli $ABCDEFGH$ a její řez rovinou PQR, kde P je střed AB, Q je střed CG a R je střed EH.

2 Zobrazte kvádr $ABCDEFGH$ a jeho řez rovinou PQR, kde P je střed EH, $Q \in CG$, $3|CQ| = |CG|$, $R \in \mapsto FB$, $|FR| = \frac{3}{2}|FB|$.

3 Zobrazte šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a jeho řez rovinou PQR, kde P je střed AA', Q je střed CC', $R \in EE'$, $|ER| = 3|E'R|$.

4 Zobrazte pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ a jeho řez rovinou PQR, kde $P \in BB'$, $|BB'| = 4|BP|$, $Q \in CC'$, $|CC'| = 4|C'Q|$, R je střed EE'.

5 Zobrazte pravidelný trojboký hranol $ABCDEF$ a sestrojte jeho řez rovinou PQR, $P \in \mapsto CB$, $|CP| = \frac{3}{2}|CB|$, $Q \in \mapsto AC$, $|AQ| = 2|AC|$, $R \in \mapsto AD$, $|AR| = \frac{5}{4}|AD|$.

Cvičení 106

1 Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ a jeho řez rovinou PQR, P je střed AV, $Q \in BV$, $5|BQ| = |QV|$, $R \in CV$, $3|CR| = |RV|$.

2 Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ a jeho řez rovinou ϱ, která obsahuje přímku p a bod K, kde K je střed hrany DV a přímka p je rovnoběžná s hranou AC a prochází bodem L, který je střed hrany AB.

3 Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ a jeho řez rovinou KLM, kde K je střed hrany AV, $L \in BV$, $4|BL| = |BV|$, M je střed hrany CD.

4 Zobrazte pravidelný čtyřstěn $ABCD$ a jeho řez rovinou MNP, kde $M \in AD$, $3|AM| = |AD|$, $N \in CD$, $4|DN| = |CD|$ a $P \in \mapsto CB$, tak, že $|CP| = 2|BC|$.

5 Zobrazte pravidelný pětiboký jehlan $ABCDEV$ a jeho řez rovinou MNP, $M \in EV$, $3|EM| = |EV|$, N je střed AB, $P \in DV$ tak, že $3|PV| = |DV|$.

Cvičení 107

1 V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku přímek:

a) AB, AC
b) AC, AH
c) EF, FG
d) BC, EH

2 V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku přímek:

a) AB, EG
b) AH, CF
c) AH, BE
d) AD, CG

3 V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku přímek:

a) AG, BH b) AH, CH

c) AH, BH d) AH, BD

4 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$, jehož boční stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, je bod S středem podstavy a bod P středem hrany AV. Určete odchylku přímek:

a) BC, SV b) AB, CV

c) AD, CV d) BV, CP

5 Označme α, β, γ velikosti úhlů, které svírá tělesová úhlopříčka kvádru s jeho hranami délek a, b, c, jež vycházejí z jednoho vrcholu. Dokažte, že platí $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

[**1.** a) 45°; b) 60°; c) 90°; d) 0° **2.** a) 45°; b) 90°; c) 60°; d) 90° **3.** a) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi \doteq 70°32'$; b) 60°; c) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\varphi \doteq 35°16'$; d) 60° **4.** a) 90°; b) 60°; c) 60°; d) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{10}$, $\varphi \doteq 77°5'$]

Cvičení 108

1 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je $|AB| = a$, $|AV| = b$. Určete odchylku φ boční stěny od roviny podstavy. Řešte obecně a potom pro hodnoty $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$.

2 V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku roviny ABC a přímky:

a) EF b) BF

c) BH d) BG

3 Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$, bod S je střed stěny $EFGH$. Určete odchylku přímky BS a roviny:

a) ABF b) BCG

Řešte obecně a potom pro hodnoty $a = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$, $c = 3{,}8\,\mathrm{cm}$.

4 V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku rovin:

a) ABC, BDH b) ABE, ABH
c) ABC, BEG d) ACG, BCH

5 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$, který má výšku v a délku podstavné hrany a, vypočtěte odchylku rovin dvou:

a) protějších bočních stěn b) sousedních bočních stěn

[**1.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{a}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{171}}{5}$, $\varphi \doteq 69°5'$ **2.** a) 0°; b) 90°; c) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi \doteq 35°16'$; d) 45° **3.** a) $\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{\sqrt{4c^2+a^2}}$, $\psi \doteq 18{,}76°$; b) $\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{\sqrt{4c^2+b^2}}$, $\theta \doteq 28{,}84°$ **4.** a) 90°; b) 45°; c) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$, $\varphi \doteq 54°44'$; d) 60° **5.** a) $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2v}$; b) $\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{a^2+2v^2}{a^2+4v^2}}$]

Cvičení 109

1 Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EH, CD, AE, CG krychle $ABCDEFGH$. Ověřte kolmost přímek:

a) HM, EF b) MN, BH
c) AL, BK d) AL, CN

2 Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EH, CD, AE, CG krychle $ABCDEFGH$. Ověřte kolmost rovin:

a) ACG, BFH b) BCE, DGH
c) ACK, BDH

3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání patu kolmice vedené bodem F k rovině BEG.

4 V krychli $ABCDEFGH$ určete pravoúhlý průmět bodu B do roviny:

a) ADH b) ACG
c) CDE d) EDG

5 V krychli $ABCDEFGH$ určete pravoúhlý průmět přímky DF do roviny:

a) ABC b) ADH
c) ACG d) DEG

Cvičení 110

1 Body P, Q jsou po řadě středy hran BF, CG krychle $ABCDEFGH$ s délkou hrany a. Vypočtěte vzdálenost bodů:

a) A a H b) A a P
c) A a G d) A a Q

2 V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky a vypočtěte vzdálenost bodu G od přímky:

a) AE b) BH
c) BD d) CE

3 V pravidelném čtyřbokém hranolu $ABCDEFGH$ je $|AB| = a$ a $|AE| = v$, bod M je střed hrany EH. Vypočtěte vzdálenost bodu B od přímky:

a) GH b) AG
c) EG d) CM

4 Určete vzdálenost vrcholu A pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ od přímky CV, je-li $|AB| = a$, $|AV| = b$.

5 V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky a určete vzdálenost bodu E od roviny AFH.

[**1.** a) $a\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$; c) $a\sqrt{3}$; d) $\frac{3}{2}a$ **2.** a) $a\sqrt{2}$; b) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$; d) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ **3.** a) $\sqrt{a^2+v^2}$; b) $\frac{a\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{2a^2+v^2}}$; c) $\sqrt{\frac{a^2}{2}+v^2}$; d) $\frac{2a\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{5a^2+4v^2}}$ **4.** $\frac{a}{b}\sqrt{2b^2-a^2}$ **5.** $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$]

Cvičení 111

1 Určete délku hrany železné krychle, která má hmotnost 1 tunu, je-li hustota železa $\varrho_{\mathrm{Fe}} = 7{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$.

2 Krychli je opsána kulová plocha o poloměru r. Vyjádřete pomocí r povrch S a objem V krychle.

3 V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a je vedena hranou CG rovina ϱ tak, že protne hranu AB a rozdělí krychli na kolmé hranoly, jejichž objemy jsou v poměru $3:2$. V jakém poměru je touto rovinou rozdělena hrana AB?

4 Dno bazénu $2\,\mathrm{m}$ hlubokého tvoří pravidelný šestiúhelník, jehož strana má délku $2\,\mathrm{m}$. Kolik hl vody bazén pojme?

5 Podstavu kolmého hranolu tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky v poměru 3 : 4. Výška hranolu má délku o 2 cm kratší než delší odvěsna trojúhelníkové podstavy. Určete objem hranolu, je-li jeho povrch $468\,\text{cm}^2$.

[**1.** přibližně 50,42 cm **2.** $S = 8r^2$, $V = \frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$ **3.** 1 : 4 **4.** přibližně 207,8 hl **5.** $540\,\text{cm}^3$]

Cvičení 112

1 V kvádru $ABCDEFGH$ je dána délka hrany $c = |AE|$ a úhly velikosti $\alpha = |\sphericalangle ABH|$, $\beta = |\sphericalangle EHB|$. Vyjádřete délky hran $a = |AB|$, $b = |BC|$.

2 Podstavou kvádru je obdélník vepsaný do kruhu o poloměru r. Kratší straně obdélníku přísluší středový úhel 2φ. Vyjádřete objem V kvádru, je-li součet obsahů všech čtyř jeho bočních stěn roven S'.

3 Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník se základnou o délce a. Úhel při základně má velikost α. Vypočítejte objem V hranolu, je-li součet obsahů jeho bočních stěn roven součtu obsahů jeho podstav.

4 Vyjádřete povrch S kvádru $ABCDEFGH$, je-li dána délka stěnové úhlopříčky $u = |AC|$ a velikosti úhlů $\beta = |\sphericalangle BAC|$, $\alpha = |\sphericalangle CAG|$.

5 Vypočtěte objem V kvádru, mají-li jeho tři stěny se společným vrcholem obsahy S_1, S_2, S_3.

[**1.** $a = \frac{c \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}}$, $b = \frac{c \cdot \cos\beta}{\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}}$ **2.** $V = \frac{S' r \cos\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$ **3.** $V = \frac{1}{8} a^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ **4.** $S = 2\sqrt{2}u^2 \operatorname{tg}\alpha \cos(45° - \beta) + 2u^2 \cos\beta \sin\beta$ **5.** $V = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$]

Cvičení 113

1 Rozměry kvádru v cm jsou kořeny rovnice

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

Vypočtěte povrch S a objem V kvádru.

2 Vypočtěte objem V kvádru o výšce c, jestliže odchylka úhlopříček podstavy je α a odchylka tělesové úhlopříčky od roviny podstavy je φ. Řešte obecně a potom pro hodnoty $c = 24\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$, $\varphi = 30°$.

3 Obsahy stěn kvádru, které mají společný vrchol, jsou v poměru 2 : 4 : 5. Povrch kvádru je $220\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte jeho objem.

4 Délka tělesové úhlopříčky kvádru je 13 cm. Rozměry kvádru jsou v poměru 4 : 3 : 12. Vypočtěte objem a povrch kvádru.

5 Za jak dlouho naplní čerpadlo s výkonem 2,5 hl vody za minutu nádrž tvaru kvádru o rozměrech podstavy 6 m, 4 m do výše 2,5 m?

[**1.** $S = 62\,\mathrm{cm}^2$, $V = 30\,\mathrm{cm}^3$ **2.** $V = \frac{1}{2} c^3 \operatorname{cotg}^2\varphi \sin\alpha$; $V = 10\,368\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$ **3.** $200\,\mathrm{cm}^3$ **4.** $V = 144\,\mathrm{cm}^3$, $S = 192\,\mathrm{cm}^2$ **5.** za 4 hodiny]

Cvičení 114

1 Vyjádřete povrch S a objem V

a) tetraedru o hraně délky a, b) oktaedru o hraně délky a.

2 Určete délky a, b podstavné a boční hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu, který má objem $400\,\mathrm{cm}^3$ a povrch $360\,\mathrm{cm}^2$.

3 Vypočtěte objem V a povrch S pravidelného trojbokého jehlanu. Podstavná hrana má délku a a boční hrana délku b. Řešte obecně a pak pro hodnoty $a = 3\,\mathrm{cm}$ a $b = 5\,\mathrm{cm}$.

4 Hrana krychle $ABCDEFGH$ má délku a. Zobrazte řez této krychle rovinou PQR, kde P, Q, R jsou po řadě středy hran AE, CG, AB. Vypočtěte objem V a povrch S jehlanu, který má řez za podstavu a hlavní vrchol v bodě F.

5 Vypočtěte objem V pravidelného pětibokého jehlanu, je-li b délka boční hrany a α její odchylka od roviny podstavy.

[**1.** a) $S = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; b) $S = 2\sqrt{3}a^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ **2.** $a = 10\,\mathrm{cm}$, $b = \sqrt{194}\,\mathrm{cm}$ nebo $a = \sqrt{80}\,\mathrm{cm}$, $b = \sqrt{265}\,\mathrm{cm}$ **3.** $V = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$; $V = \frac{\sqrt{66}}{4}\,\mathrm{cm}^3$, $S = \frac{9}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{91})\,\mathrm{cm}^2$ **4.** $V = \frac{3}{8}a^3$, $S = \frac{3}{4}a^2(\sqrt{3} + 3)$ **5.** $V = \frac{5}{12}b^3 \sin 2\alpha \cos\alpha \sin 72^\circ$]

Cvičení 115

1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Pomocí délky a její hrany vyjádřete objem V jehlanu $ACHF$.

2 Vypočtěte objem V pravidelného n-bokého jehlanu s podstavnou hranou délky a a výškou v.

3 Určete objem pravidelného trojbokého komolého jehlanu, jehož podstavy jsou rovnostranné trojúhelníky mající délky stran a, b a odchylka boční hrany od roviny větší podstavy je φ.

4 Jehlan, jehož objem je V, je upraven řezem rovnoběžným s jeho podstavou na komolý jehlan tak, že platí $S_1 : S_2 = 9 : 4$, kde S_1 je obsah podstavy původního jehlanu a S_2 je obsah řezu. Vypočítejte objemy obou těles řezem oddělených.

5 Čtyřboký komolý pravidelný jehlan má větší podstavu z hran o délce a. Boční hrana má od roviny této podstavy odchylku $45°$ a je shodná s hranou jeho menší podstavy. Určete objem V komolého jehlanu.

[**1.** $V = \frac{1}{3}a^3$ **2.** $V = \frac{1}{12}na^2 \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{n}$ **3.** $V = \frac{1}{12}(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \varphi$ **4.** $\frac{8}{27}V$ a $\frac{19}{27}V$ **5.** $V = \frac{7}{48}a^3\sqrt{2}$]

Cvičení 116

1 Jaký průměr d má měděný drát 100 m dlouhý, je-li jeho hmotnost 40 kg? Hustota mědi je $\varrho = 8{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$.

2 Roura tvaru válce má délku d, světlost s a tloušťku t. Vypočtěte její povrch S.

3 Nádoba tvaru rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou v je naplněna vodou. Kolik vody v ní zůstane, nakloníme-li ji o úhel φ?

4 Zobrazte kruh, jehož obsah se rovná povrchu rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou v.

5 Jaké množství V vody proteče za hodinu potrubím kruhového průřezu s průměrem 16 cm, teče-li voda rychlostí 2,5 m/s.

[**1.** $d \doteq 7{,}5\,\mathrm{mm}$ **2.** $S = 2\pi(s+t)(d+t)$ **3.** zbylá voda má objem $V_\varphi = \pi r^2 v - \frac{1}{2}\pi r^3 \operatorname{tg}\varphi$ **4.** Poloměr kruhu $x = \sqrt{2r(r+v)}$ sestrojíme pomocí Eukleidovy věty. **5.** $V \doteq 181\,\mathrm{m}^3$]

Cvičení 117

1 Do kužele je vepsán válec, jehož výška je rovna polovině výšky kužele. V jakém poměru jsou objemy obou těles?

2 Kužel výšky v plave ve vodě špičkou dolů. Jak hluboko je špička ponořena, je-li hustota kužele ϱ a hustota vody ϱ_0?

3 Určete povrch S rotačního kužele s poloměrem r, je-li φ odchylka strany kužele od jeho podstavy.

4 Určete povrch S rovnostranného kužele, je-li dán jeho objem $V = \frac{1}{9}\,\mathrm{cm}^3$.

5 Je dán komolý kužel s poloměry podstav R, r a výškou v. Určete objem V doplňkového kužele, je-li dáno $R = 10\,\mathrm{cm}$, $r = 5\,\mathrm{cm}$, $v = 3\,\mathrm{cm}$.

[**1.** 8 : 3 **2.** $v\sqrt[3]{\frac{\varrho}{\varrho_0}}$ **3.** $S = \frac{2\pi r^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$ **4.** $S = 3\sqrt[3]{3\pi V^2}$, $S = \sqrt[3]{\pi}\,\mathrm{cm}^2$ **5.** $V = \frac{\pi r^3 v}{3(R-r)}$, $V = 25\pi\,\mathrm{cm}^3$]

Cvičení 118

1 Plášť kužele rozvinutý do roviny tvoří kruhovou výseč s poloměrem s a středovým úhlem α. Určete povrch S a objem V kužele, je-li

a) α ve stupních,

b) α v radiánech.

2 Výška pravoúhlého trojúhelníku dělí přeponu na úseky $m = 4\,\mathrm{cm}$, $n = 5\,\mathrm{cm}$. Určete povrch S a objem V tělesa vzniklého otáčením trojúhelníku kolem přepony.

3 Dva rotační kužele stejné výšky v, a poloměrů R, r jsou po společné ose vraženy vrcholy do sebe až k podstavám. Určete objem jejich společné části.

4 Je dán komolý kužel výšky $v = 3\,\mathrm{cm}$ s poloměry podstav $R = 10\,\mathrm{cm}$, $r = 5\,\mathrm{cm}$. Určete objem V doplňujícího kužele.

5 Povrch rotačního komolého kužele je $S = 2\,450\pi\,\mathrm{cm}^2$, poloměry podstav jsou $R = 28\,\mathrm{cm}$, $r = 21\,\mathrm{cm}$. Určete jeho výšku v.

1. a) $S = \frac{\pi s^2\alpha}{(360)^2}(\alpha + 360)$, $V = \frac{\pi(\alpha)^2 s^3}{3\cdot(360)^3}\sqrt{(360)^2 - (\alpha)^2}$; b) $S = \frac{s^2\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2\pi} + 1\right)$, $V = \frac{s^3\alpha^2}{12\pi}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ **2.** $S = \pi\sqrt{mn(m+n)}(\sqrt{m} + \sqrt{n}) = 6\pi(2\sqrt{5} + 5)\,\mathrm{cm}^2$, $V = \frac{1}{3}\pi mn(m+n) = 60\pi\,\mathrm{cm}^3$ **3.** $V = \frac{\pi v R^2 r^2}{3(R+r)^2}$ **4.** $V = \frac{\pi r^3 v}{3(R-r)} = 25\pi\,\mathrm{cm}^3$ **5.** $v = 24\,\mathrm{cm}$

Cvičení 119

1 Povrch koule, která se dotýká všech hran dané krychle, se rovná rozdílu povrchů koulí krychli opsané a vepsané. Dokažte.

2 Kouli je vepsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Určete poměr povrchů všech tří těles.

3 Vypočtěte hmotnost koule, která plave ve vodě tak, že je ponořena do vody svou větší částí. Délka kružnice, kterou vytvoří hladina vody na kouli, je $o_1 = 48\,\mathrm{cm}$ a hlavní kružnice koule má délku $o_2 = 73\,\mathrm{cm}$.

4 Ze dvou koulí o poloměrech $r_1 = 1\,\mathrm{cm}$ a $r_2 = 5\,\mathrm{cm}$ je odlita jedna nová koule. Určete její poloměr r a povrch S.

5 Jakou tloušťku Δ musí mít dutá měděná koule hmotnosti m, aby se vznášela ve vodě? Označte ϱ hustotu mědi, ϱ_0 hustoty vody a řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\varrho = 8\,900\,\mathrm{kg/m^3}$, $\varrho_0 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

2. $S_\mathrm{K} : S_\mathrm{V} : S_\mathrm{Ku} = 16 : 12 : 9$ **3.** $m = \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)\right)\varrho$, $v = \frac{o_2 - \sqrt{o_2^2 - o_1^2}}{2\pi}$ je výška kulové úseče nad hladinou v dm, $r = \frac{o_2}{2\pi}$ je poloměr koule v dm, $m \doteq 6{,}29\,\mathrm{kg}$, ϱ je hustota vody **4.** $r = \sqrt[3]{126}\,\mathrm{cm}$, $S = 4\pi\sqrt[3]{126^2}\,\mathrm{cm}^2$ **5.** $\Delta = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho_0}}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho}}\right)$, $\Delta \doteq 2{,}4\,\mathrm{mm}$

Cvičení 120

1 Kolik km^2 povrchu Země vidí letec z výšky $h\,\mathrm{km}$? Poloměr Země je $r\,\mathrm{km}$.

2 V jaké vzdálenosti l od koule s poloměrem r je svítící bod, který ozařuje $\frac{1}{4}$ povrchu koule?

3 Konvexní čočka se skládá ze dvou kulových úsečí o poloměrech podstav $r_1 = r_2 = 30\,\mathrm{mm}$ a výškách $v_1 = 5\,\mathrm{mm}$, $v_2 = 8\,\mathrm{mm}$. Vypočtěte hmotnost čočky, je-li hustota skla $\varrho = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$.

4 Objem kulové úseče je dán vzorcem $V = \frac{1}{6}\pi v(3\varrho^2 + v^2)$, ϱ je poloměr podstavy a v výška úseče. Dokažte, že pro objem úseče platí také vzorec $V = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$, kde r je poloměr koule.

5 Vypočtěte povrch S a objem V kulové výseče, má-li příslušná kulová úseč, která je částí výseče, poloměr podstavy $\varrho = 6\,\mathrm{cm}$ a výšku $v = 2\,\mathrm{cm}$.

[**1.** $\frac{2\pi r^2 h}{r+h}\,\mathrm{km}^2$ **2.** $l = r$ **3.** přibližně 46,78 g **5.** $S = 100\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = \frac{400}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$]

Analytická geometrie

Poznámka. Při početním řešení geometrických úloh předpokládáme, že v rovině, popř. v prostoru máme zvolenu jednotku délky, pomocí níž můžeme změřit vzdálenost každých dvou bodů. Při zápisu vzdálenosti však jednotky nepoužíváme a vzdálenosti, obsahy, objemy zapisujeme pouze číslem.

Cvičení 121

1 Vypočtěte vzdálenost bodů A, B, je-li dáno:

a) $A[-1]$, $B[4]$,

b) $A[-2; 4]$, $B[1; 0]$,

c) $A[-3; 1; 4]$, $B[3; -2; 2]$.

2 Vypočtěte souřadnice středu úsečky AB, je-li dáno:

a) $A[-2]$, $B[-4]$,

b) $A[-1; 5]$, $B[6; 2]$,

c) $A[-3; 1; 4]$, $B[5; 3; 2]$.

3 V soustavě souřadnic na přímce jsou dány body A, B. Vypočtěte souřadnici bodu X, pro který platí $|AX| : |BX| = 1 : 2$, je-li dáno:

a) $A[0]$, $B[1]$,

b) $A[a]$, $B[b]$, $a > b$.

4 Jsou dány body $A[3 - p; -3 + 2p; 2]$ a $B[-1; 0; -1]$. Určete $p \in \mathsf{R}$ tak, aby vzdálenost $|AB|$ byla nejmenší.

5 V soustavě souřadnic v prostoru jsou dány dva vrcholy $A[-4; -1; 2]$, $B[3; 5; -6]$ trojúhelníku ABC. Určete jeho třetí vrchol C, jestliže střed strany AC leží na ose y a střed strany BC v souřadnicové rovině xz.

[**1.** a) 5; b) 5; c) 7 **2.** a) $[-3]$; b) $\left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$; c) $[1; 2; 3]$ **3.** a) $X[\frac{1}{3}]$ nebo $X[-1]$; b) $X[\frac{2a+b}{3}]$ nebo $X[2a - b]$ **4.** $p = 2$ **5.** $C[4; -5; -2]$]

Cvičení 122

1 Vypočtěte souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$, je-li dáno:

a) $A[5; -6]$, $B[3; -2]$

b) $A[4; -2; 3]$, $B[3; -2; 1]$

2 Vypočtěte souřadnice bodu $B = A + \boldsymbol{u}$, je-li dáno:

a) $A[4; -3]$, $\boldsymbol{u} = (1; -2)$

b) $A[1; -5; 2]$, $\boldsymbol{u} = (-3; 2; 1)$

3 V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - B$. Pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ vyjádřete:

a) vektory vyjádřené orientovanými úsečkami CD, DE, EF, FA

b) vektory vyjádřené orientovanými úsečkami AC, AD, AE

4 V tetraedru $ABCD$ je $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - A$, $\boldsymbol{w} = D - A$. Pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ vyjádřete vektory zbývajících hran tetraedru.

5 Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a jeho těžiště T. Pak sestrojte součet vektorů $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, je-li $\boldsymbol{u} = A - T$, $\boldsymbol{v} = B - T$, $\boldsymbol{w} = C - T$.

1. a) $\boldsymbol{u} = (-2; 4)$; b) $\boldsymbol{u} = (-1; 0; -2)$ **2.** a) $B[5; -5]$; b) $B[-2; -3; 3]$ **3.** a) $D - C = -\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $E - D = -\boldsymbol{u}$, $F - E = -\boldsymbol{v}$, $A - F = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$; b) $C - A = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $D - A = 2\boldsymbol{v}$, $E - A = 2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ **4.** $C - B = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, $D - B = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$, $D - C = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$ **5.** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$

Cvičení 123

1 Vypočtěte součet a rozdíl vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, je-li dáno:

a) $\boldsymbol{u} = (2; 3)$, $\boldsymbol{v} = (-5; 2)$,

b) $\boldsymbol{u} = (1; 2; -3)$, $\boldsymbol{v} = (4; -3; 1)$.

2 Vrcholy krychle $ABCDEFGH$ jsou určeny vektory $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = D - A$, $\boldsymbol{c} = E - A$. Bod S je střed stěny $ADHE$. Vyjádřete vektor $\boldsymbol{x} = S - A$ pomocí vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

3 Zjistěte, zda vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$:

a) $\boldsymbol{u} = (-2; 4; -6)$, $\boldsymbol{a} = (1; 3; -2)$, $\boldsymbol{b} = (2; 1; 1)$,

b) $\boldsymbol{u} = (1; 1; 2)$, $\boldsymbol{a} = (-1; 0; 1)$, $\boldsymbol{b} = (2; 2; 3)$.

4 V krychli $ABCDEFGH$ platí

$$2(C - A) + 3(E - D) = 2(F - A) + (F - C).$$

Dokažte.

5 V trojúhelníku ABC jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = C - A$. Bod D je vnitřní bod strany BC a dělí ji v poměru $|BD| : |DC| = m : n$. Vyjádřete vektor $\boldsymbol{x} = D - A$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

[**1.** a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-3; 5)$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (7; 1)$; b) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (5; -1; -2)$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (-3; 5; -4)$
2. $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ **3.** a) ano; b) ne **5.** $\boldsymbol{x} = \frac{n}{m+n}\boldsymbol{a} + \frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}$]

Cvičení 124

1 Vypočtěte velikost vektoru $\boldsymbol{u}$, je-li dáno:

a) $\boldsymbol{u} = (2; -4)$,

b) $\boldsymbol{u} = (4; -4; 2)$.

2 Vypočtěte skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, je-li dáno:

a) $\boldsymbol{u} = (3; -1)$, $\boldsymbol{v} = (2; 3)$,

b) $\boldsymbol{u} = (3; -1; 2)$, $\boldsymbol{v} = (2; 4; -1)$.

3 V rovině jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Dokažte, že platí:

a) $\boldsymbol{u}^2 = |\boldsymbol{u}|^2$,

b) $|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2\boldsymbol{uv}$.

4 Vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ mají velikosti $|\boldsymbol{u}| = 2$ a $|\boldsymbol{v}| = 4$, jejich odchylka je $\frac{1}{3}\pi$. Určete jejich skalární součin.

5 Vypočtěte odchylku φ vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, je-li dáno:

a) $\boldsymbol{u} = (1; 0)$, $\boldsymbol{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

b) $\boldsymbol{u} = (2; 2; -1)$, $\boldsymbol{v} = (3; 0; 6)$.

[**1.** a) $|\boldsymbol{u}| = 2\sqrt{5}$; b) $|\boldsymbol{u}| = 6$ **2.** a) $\boldsymbol{uv} = 3$; b) $\boldsymbol{uv} = 0$ **4.** $\boldsymbol{uv} = 4$ **5.** a) $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; b) $\varphi = \frac{1}{2}\pi$]

Cvičení 125

1 Pomocí vektorů určete odchylku φ dvou tělesových úhlopříček krychle.

2 Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC s vrcholy

$$A[2; -4; 9],\ B[-1; -4; 5],\ C[6; -4; 6].$$

3 Pro každé dva nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{uv} = 0$. Dokažte.

4 Vypočtěte práci W síly $\boldsymbol{F} = (4, -3)$ po dráze $\boldsymbol{AB}$, kde $A[-4; 0]$, $B[8; 5]$. Určete odchylku φ vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{AB}$.

5 Pro vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$. Vypočtěte hodnotu výrazu $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}$, víte-li, že $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1$.

[**1.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi \doteq 70°32'$ **2.** $90°$, $45°$, $45°$ **4.** $W = 33\,\mathrm{J}$, $\varphi \doteq 59°29'$ **5.** $-\frac{3}{2}$]

Cvičení 126

1 Užitím vektorového součinu vypočtěte obsah S trojúhelníku ABC, je-li dáno: $A[-3; -2]$, $B[2; -1]$, $C[1; 3]$.

2 Užitím vektorového součinu vypočtěte obsah S trojúhelníku ABC, je-li dáno: $A[1; 2; -3]$, $B[3; 5; 1]$, $C[2; -2; 6]$.

3 Užitím vektorového součinu vypočtěte obsah S rovnoběžníku určeného vektory $\boldsymbol{u} = (-2; -3; 2)$, $\boldsymbol{v} = (3; 4; -2)$.

4 Vypočtěte objem V čtyřstěnu $ABCD$, kde $A[5; 2; -3]$, $B[-3; 4; -1]$, $C[-1; -1; 3]$, $D[-1; 1; -2]$.

5 Vypočtěte objem V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, kde $A[1; 2; 1]$, $B[7; 3; 0]$, $D[-1; 5; 2]$, $E[1; 0; 6]$.

[**1.** $S = \frac{21}{2}$ **2.** $S = \frac{1}{2}\sqrt{2\,166}$ **3.** $S = 3$ **4.** $V = 18$ **5.** $V = 108$]

Cvičení 127

1 Napište parametrické vyjádření přímky AB procházející body $A[1; -1]$, $B[2; 3]$ a přímku načrtněte v soustavě souřadnic v rovině.

2 Napište parametrické vyjádření přímky a určené bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$, kde $A[3; -7]$ a $\boldsymbol{u} = (-2; 5)$.

3 Napište parametrické vyjádření těžnic trojúhelníku ABC s vrcholy $A[-2; -1]$, $B[3; 0]$, $C[2; 4]$.

4 Napište parametrické vyjádření osy o úsečky s krajními body $A[2; -3]$, $B[-1; -2]$.

5 Napište parametrické vyjádření přímky p, která má obecnou rovnici $2x - 3y + 1 = 0$.

[**1.** $x = 1 + t,\ y = -1 + 4t;\ t \in \mathsf{R}$ **2.** $a\colon x = 3 - 2t,\ y = -7 + 5t;\ t \in \mathsf{R}$ **3.** $t_a\colon x = -2 + 3t,\ y = -1 + 2t;\ t \in \langle 0; 1\rangle$, $t_b\colon x = 3 - 2t,\ y = t;\ t \in \langle 0; 1\rangle$, $t_c\colon x = 2 + t,\ y = 4 + 3t;\ t \in \langle 0; 1\rangle$ **4.** $o\colon x = 0{,}5 + t,\ y = -2{,}5 + 3t;\ t \in \mathsf{R}$ **5.** např.: $p\colon x = 1 + 3t,\ y = 1 + 2t;\ t \in \mathsf{R}$]

Cvičení 128

1 Napište obecnou rovnici přímky AB, $A[2; -1]$, $B[-3; 2]$, a přímku načrtněte v soustavě souřadnic v rovině.

2 Napište obecnou rovnici přímky p, která má parametrické vyjádření $x = 2 - t$, $y = 3 + 2t$; $t \in \mathsf{R}$.

3 Napište obecnou rovnici osy úsečky AB, $A[-3; 1]$, $B[4; -3]$.

4 Napište obecné rovnice přímek, v nichž leží výšky trojúhelníku ABC, je-li $A[1; 1]$, $B[2; 3]$, $C[-4; -3]$.

5 Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[3;1]$ a je rovnoběžná

a) s osou x,

b) s osou y.

[**1.** např. $3x + 5y - 1 = 0$ **2.** např. $p\colon 2x + y - 7 = 0$ **3.** např. $14x - 8y - 15 = 0$ **4.** např. $v_a\colon x + y - 2 = 0$, $v_b\colon 5x + 4y - 22 = 0$, $v_c\colon x + 2y + 10 = 0$ **5.** a) např. $y - 1 = 0$; b) např. $x - 3 = 0$]

Cvičení 129

1 Určete směrnici k a napište směrnicový tvar rovnice přímky, která je určena obecnou rovnicí $3x - 2y + 4 = 0$.

2 Určete směrnici k přímky, která prochází body $A[-3;2]$, $B[-7;-6]$.

3 Napište směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body $A[4;3]$, $B[6;-3]$.

4 Přímka p prochází bodem $A[4;-3]$ a má směrnici $k \neq 0$. Napište její rovnici a určete její průsečíky P_x, P_y s osami souřadnic.

5 Napište úsekový tvar rovnice přímky q, jejíž obecná rovnice je $2x + 3y - 6 = 0$. Přímku načrtněte v soustavě souřadnic v rovině.

[**1.** $y = \frac{3}{2}x + 2$, $k = \frac{3}{2}$ **2.** $k = 2$ **3.** $y = -3x + 15$ **4.** $p\colon y + 3 = k(x - 4)$, $P_x = \left[\frac{3+4k}{k};0\right]$, $P_y = [0;-4k-3]$ **5.** $q\colon \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$]

Cvičení 130

1 Určete vzájemnou polohu přímek $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$, je-li dáno:
a) $A[3; -1]$, $\boldsymbol{u} = (-2; 1)$, $B[4; -2]$, $\boldsymbol{v} = (1; -2)$,
b) $A[7; -4]$, $\boldsymbol{u} = (-2; 3)$, $B[3; -2]$, $\boldsymbol{v} = (\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$.

2 Určete vzájemnou polohu přímek p, q, je-li dáno:
a) $p\colon x = 3 - 2t,\ y = 4 + 3t;\ t \in \mathsf{R}$, $q\colon x = 6 + 3s,\ y = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}s;\ s \in \mathsf{R}$;
b) $p\colon x = -1 + t,\ y = 5 - 3t;\ t \in \mathsf{R}$, $q\colon x = 5 - 3s,\ y = -1 + s;\ s \in \mathsf{R}$.

3 Určete, pokud existuje, průsečík přímky p a úsečky AB,
$p\colon x = 5 - 3t,\ y = -6 + 2t;\ t \in \mathsf{R}$, $A[3; -8]$, $B[-9; 10]$.

4 Určete vzájemnou polohu přímek p, q, je-li:
a) $p\colon 6x - 9y + 15 = 0$, $q\colon 2x - 3y - 5 = 0$,
b) $p\colon 5x - 4y - 5 = 0$, $q\colon 2x - 3y + 5 = 0$.

5 Určete vzájemnou polohu přímek r, s, je-li $r\colon 2x + ay - 4 = 0$, $s\colon x - 3y + a = 0$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru a.

1. a) různoběžné; b) rovnoběžné různé **2.** a) totožné; b) různoběžné **3.** $P[-1; -2]$ **4.** a) rovnoběžné různé; b) různoběžné **5.** $a = -6 \Rightarrow$ rovnoběžné různé, $a \in \mathsf{R}$, $a \neq -6 \Rightarrow$ různoběžné

Cvičení 131

1 Vypočtěte odchylku φ přímek p, q, je-li dáno:
a) $p\colon 2x - y + 1 = 0$, $\quad q\colon 3x + y + 1 = 0$,
b) $p\colon x = 1 - 3t,\ y = 2 + t;\ t \in \mathsf{R}$, $\quad q\colon x = 3 - s,\ y = 1 - 3s;\ s \in \mathsf{R}$.

2 Mají-li dvě přímky směrnice k_1 a k_2, potom jejich odchylku φ vypočteme podle vzorce

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Dokažte a proveďte diskusi vzájemné polohy přímek pro případy $k_1 = k_2$ a $1 + k_1 k_2 = 0$.

3 Určete vzdálenost v bodu $Q[6; 1]$ od přímky p dané obecnou rovnicí $3x + 4y - 2 = 0$.

4 Odvoďte vzorec pro vzdálenost v počátku soustavy souřadnic v rovině od přímky p s obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$.

5 Ukažte, že dané přímky p, q jsou rovnoběžné, různé a vypočtěte jejich vzdálenost v:

a) $p\colon 2x + 3y + 9 = 0$, $q\colon 2x + 3y - 1 = 0$,

b) $p\colon x = 1 + t,\ y = 1 - t;\ t \in \mathsf{R}$, $q\colon x = 3 + 2s,\ y = 4 - 2s;\ s \in \mathsf{R}$.

[**1.** a) $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; b) $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ **3.** $v = 4$ **4.** $v = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **5.** a) $v = \frac{10}{13}\sqrt{13}$; b) $v = \frac{5}{2}\sqrt{2}$]

Cvičení 132

1 Napište analytická vyjádření polorovin ABC, ACB, BCA, jestliže $A[-2; -1]$, $B[3; 0]$, $C[2; 2]$.

2 Jsou dány body $A[3; -1]$, $B[4; 9]$. Určete číslo c tak, aby body A, B ležely uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p, která má obecnou rovnici $3x - 4y + c = 0$.

3 V soustavě souřadnic v rovině graficky znázorněte množinu všech bodů, pro jejichž souřadnice $[x; y]$ zároveň platí:

$$\begin{aligned} x + 2y - 8 &\leqq 0, \\ 3x + y - 12 &\leqq 0, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned}$$

4 V soustavě souřadnic v rovině graficky znázorněte množinu všech bodů, pro jejichž souřadnice $[x; y]$ platí:

$$\begin{aligned} x + 3y - 7 &\leqq 0, \\ 2x - 5y + 8 &\geqq 0, \\ 3x - 2y - 10 &\leqq 0. \end{aligned}$$

5 V soustavě souřadnic v rovině graficky znázorněte množinu všech bodů, pro jejichž souřadnice $[x; y]$ platí

$$|x| + |y| \leqq 4.$$

[**1.** $\mapsto ABC\colon x - 5y - 3 \leqq 0$, $\mapsto ACB\colon 3x - 4y + 2 \geqq 0$, $\mapsto BCA\colon 2x + y - 6 \leqq 0$
2. $c \in (-13; 24)$]

Cvičení 133

1 Napište parametrické vyjádření přímky AB, kde $A[1; 0; 3]$, $B[0; 3; -5]$.

2 Napište parametrické vyjádření přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ procházející bodem $A[1; 2; -1]$ a mající směrový vektor $\boldsymbol{u} = (2; 3; 1)$.

3 Zjistěte, zda přímka p: $x = 6 + 2t$, $y = -11 - 5t$, $z = 9 + 3t$; $t \in \mathsf{R}$, protíná některou souřadnicovou osu.

4 Najděte parametrické vyjádření všech těžnic trojúhelníku ABC s vrcholy $A[1; 1; 3]$, $B[2; 0; -1]$, $C[1; 3; 2]$.

5 Napište parametrické rovnice přímky p, která je průsečnicí rovin ϱ, σ, kde ϱ: $x - 3y - z + 2 = 0$ a σ: $2x - 8y - 3z + 6 = 0$.

[**1.** $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 3 - 8t$; $t \in \mathsf{R}$ **2.** p: $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = -1 + t$; $t \in \mathsf{R}$ **3.** pouze osu y v bodě $M[0; 4; 0]$ **4.** t_a: $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 3 - 5t$; $t \in \langle 0; 1 \rangle$; t_b: $x = 2 - 2r$, $y = 4r$, $z = -1 + 7r$; $r \in \langle 0; 1 \rangle$; t_c: $x = 1 + s$, $y = 3 - 5s$, $z = 2 - 2s$; $s \in \langle 0; 1 \rangle$ **5.** např.: p: $x = t$, $y = t$, $z = 2 - 2t$; $t \in \mathsf{R}$]

Cvičení 134

1 Napište parametrické vyjádření přímky procházející bodem $A[9; -3; 1]$ a rovnoběžné s přímkou procházející body $B[-4; -7; 6]$, $C[2; 5; -3]$.

2 Napište parametrické vyjádření přímky procházející bodem $A[5; -3; 7]$ a rovnoběžné

a) s osou x,

b) s osou y,

c) s osou z.

3 Určete průsečíky přímky m: $x = -1 - 2t$, $y = 5 - 4t$, $z = -3 + 6t$; $t \in \mathsf{R}$, se souřadnicovými rovinami xy, xz, yz.

4 Rozhodněte, zda bod C je bodem úsečky AB, je-li dáno $A[1; 2; -4]$, $B[3; 4; 6]$, $C[2; 3; 1]$.

5 Určete čísla a, b tak, aby bod $C[a; b; -3]$ ležel na přímce AB procházející body $A[1; 2; 3]$, $B[3; -2; 1]$.

[**1.** $x = 9 + 6t$, $y = -3 + 12t$, $z = 1 - 9t$; $t \in \mathsf{R}$ **2.** a) $x = 5 + t$, $y = -3$, $z = 7$; $t \in \mathsf{R}$; b) $x = 5$, $y = -3 + s$, $z = 7$; $s \in \mathsf{R}$; c) $x = 5$, $y = -3$, $z = 7 + r$; $r \in \mathsf{R}$ **3.** $[-2; 3; 0]$, $[-\frac{7}{2}; 0; \frac{9}{2}]$, $[0; 7; -6]$ **4.** $C \in AB$ **5.** $a = 7$, $b = -10$]

Cvičení 135

1 Napište parametrické vyjádření roviny ϱ procházející body $A[1; 3; -1]$, $B[2; 3; 3]$, $C[-2; -5; -7]$.

2 Napište parametrické vyjádření roviny σ obsahující bod $A[3; 2; -1]$ a přímku p, která má parametrické vyjádření $p\colon x = 2 - t$, $y = 3 + 2t$, $z = -t$; $t \in \mathsf{R}$.

3 Najděte parametrické vyjádření roviny ϱ, která prochází body $A[1; 0; 2]$, $B[2; -1; 4]$ a je rovnoběžná s osou x.

4 Napište parametrické vyjádření roviny ϱ, která obsahuje dvě rovnoběžné přímky p, q s parametrickými rovnicemi
$p\colon x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -3 + 2t$; $t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = 2 + s$, $y = 1 - s$, $z = 1 + 2s$; $s \in \mathsf{R}$.

5 Napište parametrické vyjádření roviny σ, která je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xy a prochází bodem $A[1; 1; 2]$.

[**1.** $\varrho\colon x = 1 + t - 3s$, $y = 3 - 8s$, $z = -1 + 4t - 6s$; $t, s \in \mathsf{R}$ **2.** $\sigma\colon x = 2 - t + s$, $y = 3 + 2t - s$, $z = -t - s$; $t, s \in \mathsf{R}$ **3.** $\varrho\colon x = 1 + t + s$, $y = -t$, $z = 2 + 2t$; $t, s \in \mathsf{R}$ **4.** $\varrho\colon x = 1 + t + s$, $y = 2 - t - s$, $z = -3 + 2t + 4s$; $t, s \in \mathsf{R}$ **5.** $\sigma\colon x = 1 + t$, $y = 1 + s$, $z = 2$; $t, s \in \mathsf{R}$]

Cvičení 136

1 Napište obecnou rovnici roviny α určené body $A[2; -1; 0]$, $B[-1; 2; -3]$, $C[-2; -3; 1]$.

2 Napište obecnou rovnici roviny β, která prochází bodem $A[-3; 5; -7]$ a je kolmá k vektoru $\boldsymbol{n} = (1; -2; -1)$.

3 Napište obecnou rovnici roviny ϱ, která má parametrické vyjádření $x = 1 - t + 3s$, $y = 7 + 2t - s$, $z = -3 - t + s$; $t, s \in \mathsf{R}$.

4 Napište obecnou rovnici roviny σ, která obsahuje bod $A[2; -3; 1]$ a přímku m s parametrickým vyjádřením $x = t$, $y = 2 + 3t$, $z = 1 - t$; $t \in \mathsf{R}$.

5 Napište obecnou rovnici roviny ϱ, která je rovnoběžná s osou x a prochází body $A[3; -2; -4]$, $B[7; 2; 1]$.

[**1.** např.: $\alpha\colon x - 5y - 6z - 7 = 0$ **2.** např.: $\beta\colon x - 2y - z + 6 = 0$ **3.** např.: $\varrho\colon x - 2y - 5z - 2 = 0$ **4.** např.: $\sigma\colon 5x + 2y + 11z - 15 = 0$ **5.** $\varrho\colon 5y - 4z - 6 = 0$]

Cvičení 137

1 Rozhodněte, které z bodů $A[1; 2; 3]$, $B[2; 3; 0]$, $C[4; -7; 3]$ leží v rovině β s parametrickým vyjádřením $x = 2-t+s$, $y = -1+t-2s$, $z = 3+2t-s$; $t, s \in \mathsf{R}$.

2 Zjistěte, zda body $A[1; -1; 0]$, $B[3; -2; 0]$, $C[6; -2; 1]$, $D[3; 1; 2]$ leží v jedné rovině.

3 Určete průsečíky roviny ϱ, která má parametrické vyjádření $x = 3 - 3t - 3s$, $y = -7t$, $z = 5s$; $t, s \in \mathsf{R}$, s osami soustavy souřadnic.

4 Zjistěte, zda body $A[2; 1; 3]$, $B[-1; -8; 0]$, $C[0; -7; 2]$, $D[17; 14; -13]$ leží v rovině $\sigma\colon 3x - y + 2z - 11 = 0$.

5 Určete hodnotu parametru d tak, aby rovnice $7x - 8y + 2z + d = 0$ byla rovnicí roviny procházející bodem $A[7; 6; -3]$.

[**1.** A, C leží, B neleží **2.** leží **3.** $X[3; 0; 0]$, $Y[0; -7; 0]$, $Z[0; 0; 5]$ **4.** A, C, D leží, B neleží **5.** $d = 5$]

Cvičení 138

1 Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q:
$p\colon x = 8 - 4t$, $y = 4 + 8t$, $z = -12t$; $t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = 3 + 3s$, $y = 1 - 6s$, $z = -2 + 9s$; $s \in \mathsf{R}$.

2 Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q:
$p = \leftrightarrow AB$, $A[2; 0; 3]$, $B[-2; 3; 15]$,
$q = \leftrightarrow CD$, $C[4; -1; 8]$, $D[1; 2; -1]$.

3 Najděte parametrické vyjádření přímky q, která prochází bodem $A[-3; 0; 2]$ a je rovnoběžná s přímkou $p\colon x = 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = 4 + 5t$; $t \in \mathsf{R}$.

4 Najděte reálné číslo a takové, aby přímky p, q byly různoběžné, a určete jejich průsečík:
$p\colon x = 5{,}5 - t$, $y = -3 + 2t$, $z = 1 + 4t$; $t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = a + s$, $y = -2s$, $z = 4 - s$; $s \in \mathsf{R}$.

5 Jsou dány body $A[5;-2;3]$, $B[7;-4;1]$, $C[-8;-3;10]$, $D[-1;-3;6]$. Určete, pokud existuje, průsečík P:

a) přímky AB a přímky CD,
b) přímky AB a úsečky CD,
c) úsečky AB a přímky CD,
d) úsečky AB a úsečky CD.

[**1.** rovnoběžné, různé **2.** mimoběžné **3.** $q\colon x=-3+2s,\ y=-3s,\ z=2+5s;\ s\in\mathrm{R}$ **4.** $a=4$, $P[5;-2;3]$ **5.** a) $P[6;-3;2]$; b) neexistuje; c) $P[6;-3;2]$; d) neexistuje]

Cvičení 139

1 Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ϱ, je-li:
$p\colon x=1-t,\ y=t,\ z=2-3t;\ t\in\mathrm{R}$,
$\varrho\colon x-2y-z+1=0$.

2 Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ϱ, je-li:
$p\colon x=2-t,\ y=3t,\ z=t;\ t\in\mathrm{R}$,
$\varrho\colon x+y-z-4=0$.

3 Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ϱ, je-li:
$p\colon x=2+3t,\ y=1-4t,\ z=2t;\ t\in\mathrm{R}$,
$\varrho\colon 2x+y-z=0$.

4 Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ϱ a σ, je-li:
$\varrho\colon 2x-3y+z-4=0$,
$\sigma\colon 4x+y-5z+3=0$.

5 Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ϱ a σ, je-li:
$\varrho\colon x + 2y - z + 1 = 0$,
$\sigma\colon 2x - 4y - 2z - 3 = 0$.

[**1.** přímka p leží v rovině ϱ **2.** přímka p je různoběžná s rovinou ϱ, průsečík $P[0; 6; 2]$ **3.** přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ a neleží v rovině ϱ **4.** ϱ, σ různoběžné, parametrické vyjádření průsečnice: $x = -\frac{5}{14} + t$, $y = -\frac{11}{7} + t$, $z = t$; $t \in \mathsf{R}$ **5.** ϱ, σ rovnoběžné různé]

Cvičení 140

1 Určete vzájemnou polohu rovin ϱ, σ, τ:

$$\begin{aligned} \varrho\colon x + y + z + 2 &= 0,\\ \sigma\colon x - 2y + 3z - 1 &= 0,\\ \tau\colon x + y - z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

2 Určete vzájemnou polohu rovin ϱ, σ, τ:

$$\begin{aligned} \varrho\colon x + y + z + 1 &= 0,\\ \sigma\colon x + y + z - 2 &= 0,\\ \tau\colon x + y + z + 4 &= 0. \end{aligned}$$

3 Určete vzájemnou polohu rovin ϱ, σ, τ:

$$\begin{aligned} \varrho\colon x + y + z + 3 &= 0,\\ \sigma\colon x + y + z - 2 &= 0,\\ \tau\colon x - 2y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

4 Určete vzájemnou polohu rovin ϱ, σ, τ:

$$\begin{aligned} \varrho\colon\ \ x + y + z - 4 &= 0,\\ \sigma\colon\ \ x - y - z + 2 &= 0,\\ \tau\colon 2x - y - z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

5 Určete vzájemnou polohu rovin ϱ, σ, τ:

$$\begin{aligned} \varrho\colon\ \ x + \ \ y + \ \ z - 5 &= 0,\\ \sigma\colon 2x + 4y + \ \ z - 9 &= 0,\\ \tau\colon\ \ x - \ \ y + 2z - 6 &= 0. \end{aligned}$$

[**1.** $\varrho \cap \sigma \cap \tau = \{Q\}$, $Q[-1;-1;0]$ **2.** $\varrho \cap \sigma = \emptyset$, $\varrho \cap \tau = \emptyset$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$, $\varrho \parallel \sigma \parallel \tau$ **3.** $\varrho \cap \sigma = \emptyset$, $\varrho \cap \tau = p$, $\sigma \cap \tau = q$, $\varrho \cap \sigma \cap \tau = \emptyset$, $\varrho \parallel \sigma$, $p\colon x = -\frac{7}{3} - t$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = t$; $t \in \mathsf{R}$, $q\colon x = 1 - s$, $y = 1$, $z = s$; $s \in \mathsf{R}$ **4.** $\varrho \cap \sigma = p$, $\varrho \cap \tau = q$, $\sigma \cap \tau = r$, $p\colon x = 1$, $y = t$, $z = 3 - t$; $t \in \mathsf{R}$, $q\colon x = \frac{5}{3}$, $y = s$, $z = \frac{7}{3} - s$; $s \in \mathsf{R}$, $r\colon x = 3$, $y = u$, $z = 5 - u$; $u \in \mathsf{R}$ **5.** $\varrho \cap \sigma \cap \tau = p$, $p\colon x = 4 - 3t$, $y = t$, $z = 1 + 2t$; $t \in \mathsf{R}$]

Cvičení 141

1 Určete odchylku přímek p, q, jejichž parametrické rovnice jsou:
$p\colon x = 1 + t$, $y = t$, $z = 3 - 2t$; $t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = 3 - s$, $y = 1$, $z = -1 + s$; $s \in \mathsf{R}$.

2 Jsou dány body $A[2;1;-5]$, $B[5;4;1]$, $C[0;3;4]$, $D[-2;5;6]$. Na přímce AB určete bod P a na přímce CD bod Q tak, aby přímka PQ byla kolmá k přímkám AB a AC.

3 Ukažte, že pro odchylky α, β, γ přímky AB, kde $A[1;0;-3]$, $B[3;2;7]$, od os souřadnic platí $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4 Určete, s přesností na vteřiny, odchylky všech dvojic mimoběžných hran čtyřstěnu s vrcholy $A[6;0;0]$, $B[0;5;0]$, $C[5;6;0]$, $D[2;3;8]$.

5 Kvádr $ABCDEFGH$ má hrany délek $|AB| = 2\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 1\,\mathrm{cm}$, $|AE| = 3\,\mathrm{cm}$. Zvolte vhodně soustavu souřadnic v prostoru a určete odchylku tělesových úhlopříček kvádru.

[**1.** $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ **2.** $P[4;3;-1]$, $Q[3;0;1]$ **3.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $\cos\gamma = \frac{5\sqrt{3}}{9}$; $\frac{3}{81} + \frac{3}{81} + \frac{75}{81} = 1$ **4.** přibližně $87°34'8''$, $74°15'42''$, $69°18'16''$ **5.** $\cos\varphi = \frac{3}{7}$, $\varphi \doteq 64°37'$]

Cvičení 142

1 Určete odchylku φ přímky $p\colon x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -t$; $t \in \mathsf{R}$ a roviny $\sigma\colon y - z = 0$.

2 Určete odchylku φ přímky $p\colon x = -1 - t$, $y = -1 + 3t$, $z = t$; $t \in \mathsf{R}$ a souřadnicové roviny xy.

3 Určete odchylku φ přímky $p\colon x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3$; $t \in \mathsf{R}$ a roviny $\sigma\colon x = 3 - 2r + 2s$, $y = 5 + r$, $z = 2 - s$; $r, s \in \mathsf{R}$.

4 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má podstavné hrany délky $6\,\mathrm{cm}$ a výšku $3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Zvolte vhodně soustavu souřadnic v prostoru a určete odchylku φ boční hrany od podstavy jehlanu.

5 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 1\,\mathrm{dm}$. Zvolte vhodně soustavu souřadnic v prostoru a vypočtěte odchylku φ přímky AE a roviny AFH s přesností na minuty.

[**1.** $\varphi = 60°$ **2.** $\varphi \doteq 17°33'$ **3.** $\varphi = 45°$ **4.** $\varphi = 45°$ **5.** $\varphi \doteq 35°16'$]

Cvičení 143

1 Vypočtěte odchylku φ rovin
$\varrho\colon 2x - y + z - 1 = 0$, $\sigma\colon x + y + 2z + 3 = 0$.

2 Určete odchylku φ dvou sousedních stěn ABE a BCE pravidelného osmistěnu $ABCDEF$. Zvolte soustavu souřadnic v prostoru tak, že její počátek bude středem čtverce $ABCD$.

3 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má délku podstavné hrany $6\,\mathrm{cm}$ a výšku $3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Zvolte vhodně soustavu souřadnic v prostoru a vypočítejte odchylku φ boční stěny od roviny podstavy jehlanu.

4 Jsou dány body $A[2;0;5]$, $B[3;-1;3]$, $C[4;-2;0]$, $D[5;2;-1]$. Vypočítejte odchylku φ rovin ABC, ABD.

5 Určete rovnici roviny σ, která prochází body $A[2;2;3]$, $B[1;0;2]$ a je kolmá k rovině $\varrho\colon x - 8y + z - 10 = 0$.

[**1.** $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ **2.** $\varphi \doteq 70°32'$ **3.** $\varphi \doteq 54°44'$ **4.** $\varphi \doteq 50°46'$ **5.** $\sigma\colon x - z + 1 = 0$]

Cvičení 144

1 Vypočtěte vzdálenost v bodu $A[5;-1;3]$ od přímky p s parametrickým vyjádřením: $x = -1 + 2t$, $y = -5 + 3t$, $z = -2 + 2t$; $t \in \mathrm{R}$.

2 Vypočtěte vzdálenost bodu $M[3; -1; 4]$ od přímky a, která prochází body $A[0; 2; 1]$, $B[1; 3; 0]$.

3 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má vrcholy $A[2; 3; 0]$, $B[4; 3; 0]$, $C[4; 1; 0]$, $D[2; 1; 0]$, $V[3; 2; 4]$. Určete vzdálenost středu S podstavné hrany BC od přímky AV.

4 Ukažte, že dané přímky p, q jsou rovnoběžné různé a vypočtěte jejich vzdálenost v:
$p\colon x = -2 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 1 + t;\ t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = -2 + 2s,\ y = 3 + s,\ z = 2 + s;\ s \in \mathsf{R}$.

5 Ukažte, že dané přímky p, q jsou mimoběžné, a vypočtěte jejich vzdálenost v:
$p\colon x = 9 + 4t,\ y = -2 - 3t,\ z = t;\ t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = -2s,\ y = -7 + 9s,\ z = 2 + 2s;\ s \in \mathsf{R}$.

[**1.** $v = 3$ **2.** $v = 2\sqrt{6}$ **3.** $v = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ **4.** $v = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **5.** $v = 7$]

Cvičení 145

1 Vypočtěte vzdálenost v bodu $A[3; 5; -6]$ od roviny ϱ určené rovnicí $2x - 2y + z - 8 = 0$.

2 Jsou dány body $A[1; -2; -2]$, $B[2; -1; -1]$, $C[1; -1; -2]$, $D[0; 2; -2]$. Vypočítejte vzdálenost v bodu D od roviny ABC.

3 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má vrcholy $A[2; 3; 0]$, $B[4; 3; 0]$, $C[4; 1; 0]$, $D[2; 1; 0]$, $V[3; 2; 4]$. Určete vzdálenost v středu S podstavné hrany BC od roviny ADV.

4 Ověřte, že roviny $\alpha\colon x + y + z - 6 = 0$ a $\beta\colon x + y + z - 3 = 0$ jsou rovnoběžné, a vypočtěte jejich vzdálenost v.

5 Krychle $ABCDEFGH$ je umístěna v soustavě souřadnic v prostoru tak, že $A[1; 0; 0]$, $B[1; 1; 0]$, $C[0; 1; 0]$, $D[0; 0; 0]$, $H[0; 0; 1]$. Vypočtěte vzdálenost v rovin ACH a BEG.

[**1.** $v = 6$ **2.** $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **3.** $v = \frac{8\sqrt{17}}{17}$ **4.** $v = \sqrt{3}$ **5.** $v = \frac{\sqrt{3}}{3}$]

Cvičení 146

1 Najděte souřadnice středu a poloměr kružnice k, která má rovnici $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$. Kružnici načrtněte v soustavě souřadnic.

2 Napište rovnici kružnice k, která prochází body $A[5; 1]$, $B[0; 6]$, $C[4; -2]$.

3 Je dána kružnice $k\colon x^2+y^2 = 144$ a bod $Q[15; 0]$. Napište rovnice tečen t_1, t_2 dané kružnice vedených bodem Q.

4 Určete číslo a tak, aby přímka $3x + 4y + a = 0$ byla tečnou kružnice $k\colon x^2 + y^2 = 25$.

5 Je dána kružnice k a na ní bod A. Bodem A jsou vedeny všechny možné tětivy dané kružnice. Najděte množinu středů těchto tětiv.

[**1.** střed $S[3; -2]$, poloměr $r = 6$ **2.** $k\colon x^2+y^2-2y-24 = 0$ **3.** $t_1\colon 4x+3y-60 = 0$, $t_2\colon 4x - 3y - 60 = 0$ **4.** $a = 25$, $a = -25$ **5.** Návod. Soustavu souřadnic zvolte tak, aby kružnice k měla rovnici $x^2 + y^2 = r^2$ a aby bod A měl souřadnice $A[r; 0]$; mají-li střed S a bod A souřadnice $S[0; 0]$ a $A[r; 0]$, je hledanou množinou kružnice l: $\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$ bez bodu A.]

Cvičení 147

1 Ukažte, že daná rovnice je rovnice elipsy, určete její základní charakteristiky a elipsu načrtněte.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$,

b) $3x^2 + 2y^2 + 6x - 5 = 0$.

2 Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu v souřadnicové ose x a prochází body $A[8; 3]$, $B[6; 4]$.

3 Napište rovnici tečny elipsy $9x^2+16y^2 = 144$, která má směrnici $k = 1$.

4 Do elipsy o rovnici $x^2 + 9y^2 = 9$ je vepsán rovnostranný trojúhelník souměrný podle její hlavní osy. Určete souřadnice jeho vrcholů.

5 Je dán bod A a přímka p, která bodem A neprochází. Nalezněte množinu všech bodů, které mají tu vlastnost, že poměr jejich vzdáleností od bodu A a od přímky p je $1 : \sqrt{2}$.

1. a) hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x, $a = 5$, $b = 3$, $S[3; 2]$; b) hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y, $a = 2$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $S[-1; 0]$ **2.** $x^2 + 4y^2 = 100$ **3.** $t_1 : x - y + 5 = 0$, $t_2 : x - y - 5 = 0$ **4.** $[3; 0]$, $[\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $[\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$ nebo body souměrně sdružené podle osy y **5.** Návod. Soustavu souřadnic zvolte tak, aby její osa y splynula s danou přímkou p a aby bod A měl souřadnice $A[1; 0]$; je-li p osa y a $A[1; 0]$, je hledanou množinou elipsa se středem v bodě $S[2; 0]$.

Cvičení 148

1 Určete vrchol V, ohnisko F paraboly m a pak ji načrtněte:

a) $m: x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$,

b) $m: y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

2 Jak dlouhou úsečku vytíná parabola $m\colon y^2 = 8x$ na přímce p s rovnicí $p\colon x - y - 2 = 0$? Načrtněte.

3 Napište rovnici tečny paraboly $m\colon y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$ v jejím bodě $T[-8; y_0]$.

4 Napište rovnici tečny paraboly $m\colon y^2 - 4x - 2y + 13 = 0$, která prochází bodem $Q[0; -1]$. Načrtněte.

5 Je dána kružnice k a její tečna t. Nalezněte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k i přímky t.

1. a) $V[4; -2]$, $F[4; -\frac{5}{4}]$; b) $V[-2; -3]$, $F[-1; -3]$ **2.** 16 **3.** $t_1: x + 4y - 8 = 0$, $t_2: x - 4y - 24 = 0$ **4.** $t_1: x - y - 1 = 0$, $t_2: x + 3y + 3 = 0$ **5.** Návod. Soustavu souřadnic zvolte tak, aby daná tečna t splynula s osou y a aby střed S kružnice měl souřadnice $S[r; 0]$; je-li t osa y, $k(S, r)$ a $S = [r; 0]$, pak hledanou množinou je sjednocení přímky o rovnici $y = 0$ a paraboly, která má rovnici $y^2 = 4rx$, s vyloučenými body $[0; 0]$ a $[r; 0]$.

Cvičení 149

1 Ukažte, že daná rovnice je rovnice hyperboly, určete její základní charakteristiky a hyperbolu načrtněte:

a) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$

b) $-9x^2 + 16y^2 + 90x + 64y - 305 = 0$

2 Napište rovnici rovnoosé hyperboly, jejímiž asymptotami jsou souřadnicové osy a jež prochází bodem $M[-3; 2]$. Hyperbolu načrtněte.

3 Dokažte, že přímka $p\colon 2x - y - 8 = 0$ je tečnou hyperboly $h\colon 8x^2 - 18y^2 = 144$, a vypočtěte souřadnice dotykového bodu.

4 Je dána hyperbola $h\colon x^2 - y^2 = 9$ a bod $Q[3; -6]$. Napište parametrické rovnice tečen dané hyperboly, které procházejí bodem Q. Hyperbolu a tečny načrtněte.

5 Je dána úsečka AB délky $2a$. Určete množinu všech bodů M v rovině, které mají tu vlastnost, že vzdálenost každého z nich od středu úsečky AB je rovna číslu $\sqrt{|MA| \cdot |MB|}$.

[**1.** a) $S[2; 1]$, $a = 4$, $b = 3$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x; b) $S[5; -2]$, $a = 3$, $b = 4$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y **2.** $xy = -6$ **3.** $T[\frac{9}{2}; 1]$ **4.** $t_1\colon x = 3,\ y = -6 + t$; $t \in \mathsf{R}$, $t_2\colon x = 3 + 4s,\ y = -6 - 5s$; $s \in \mathsf{R}$ **5.** Mají-li body A, B souřadnice $A[-a; 0]$, $B[a; 0]$, $a > 0$, je hledanou množinou rovnoosá hyperbola o rovnici $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}a^2$]

Cvičení 150

1 Určete střed S a poloměr r kulové plochy κ, která má rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y - 4z + 22 = 0.$$

2 Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathsf{R}$, pro něž rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + m = 0$$

vyjadřuje kulovou plochu.

3 Určete společné body přímky $p\colon x = 3 + 2t,\ y = 8 + t,\ z = -10 - 4t$; $t \in \mathsf{R}$, a kulové plochy $\kappa\colon (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 62$.

4 Určete tečnou rovinu τ kulové plochy

$$\kappa\colon (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 38,$$

která prochází bodem $A[-1; 1; 3]$.

5 Určete, pro které hodnoty parametru $d \in \mathsf{R}$ je průnikem kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y + 8z + 28 = 0$ a roviny dané rovnicí $2x - y + 3z + d = 0$ kružnice.

[**1.** $S[3; -5; 2]$, $r = 4$ **2.** $m < 5$ **3.** $Q[-3; 5; 2]$ **4.** $\tau\colon 5x - 3y - 2z + 14 = 0$ **5.** $d \in (1; 29)$]

Komplexní čísla

Cvičení 151

V tomto cvičení je množina $\mathsf{M} = \mathsf{R} \times \mathsf{R}$; je v ní definována rovnost, operace sčítání a násobení:

$$(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$
$$(a;b) \oplus (c;d) = (a+c; b+d),$$
$$(a;b) \odot (c;d) = (ac - bd; ad + bc).$$

1 Vypočtěte v M:

a) $(-2;5) \oplus (-1;1)$,

b) $(7;2) \odot (-1;3)$.

2 V M řešte rovnice:

a) $(x;y) \oplus (2;-3) = (7;-2)$,

b) $(x;y) \odot (2;-1) = (1;0)$.

3 V M řešte rovnice:

a) $(a;0) \oplus [(b;0) \odot (x;y)] = (a;b)$; $a, b \in \mathsf{R}$, $b \neq 0$,

b) $(a;b) \odot (x;y) = (a;b)$; $a, b \in \mathsf{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$.

4 V M řešte rovnici $(a;b) \odot (x;y) = (1;0)$, je-li (a,b) daná dvojice reálných čísel různá od dvojice $(0,0)$.

5 V M řešte rovnici $(x;y) \odot (x;y) = (-1;0)$.

[**1.** a) $(-3;6)$; b) $(-13;19)$ **2.** a) $(x;y) = (5;1)$; b) $(x;y) = (\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$ **3.** a) $(x;y) = (0;1)$; b) $(x;y) = (1;0)$ **4.** $(x;y) = (\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2})$ **5.** $(x;y) = (0;1)$, $(x;y) = (0;-1)$]

Cvičení 152

1 Vypočítejte:

a) i^8, i^{13}, i^6, i^{11},

b) i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3} pro libovolné $n \in \mathsf{N}$.

2 Zapište ve tvaru $a + b\mathrm{i}$ s reálnými čísly a, b:

a) $(2+\mathrm{i})^2$, b) $(2+\mathrm{i})^3$.

3 Zapište ve tvaru $a + b\mathrm{i}$ s reálnými čísly a, b:

a) $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})$, b) $(2+3\mathrm{i})(1-5\mathrm{i})$.

4 Zapište ve tvaru $a + b\mathrm{i}$ s reálnými čísly a, b:

a) $\dfrac{7-4\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$, b) $\dfrac{3-4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

5 Zapište ve tvaru $a + b\mathrm{i}$ s reálnými čísly a, b:

a) $\dfrac{1}{x+y\mathrm{i}}$, b) $\dfrac{1}{x-y\mathrm{i}}$.

Ve jmenovatelích zlomků jsou taková reálná čísla x, y, že aspoň jedno z nich je nenulové.

[**1.** a) 1, i, −1, −i; b) 1, i, −1, −i **2.** a) $3+4\mathrm{i}$; b) $2+11\mathrm{i}$ **3.** a) 13; b) $17-7\mathrm{i}$
4. a) $1-2\mathrm{i}$; b) $2-\mathrm{i}$ **5.** a) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$; b) $\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$]

Cvičení 153

1 V C rozložte na součin lineárních činitelů:

$$x^3 + x^2 + x + 1.$$

2 V $\mathbb{C}$ rozložte na součin lineárních činitelů:

$$x^4 - 3x^2 - 4.$$

3 V $\mathbb{C}$ rozložte na součin lineárních činitelů:

$$x^2 + x + 1.$$

4 Výraz $5a^2 + 4b^2$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, rozložte v $\mathbb{C}$ na součin lineárních činitelů.

5 Výraz $a^3 + b^3$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, rozložte v $\mathbb{C}$ na součin lineárních činitelů.

[**1.** $(x+1)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$ **2.** $(x+2)(x-2)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$
3. $\left(x+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **4.** $\left(a\sqrt{5}+2b\mathrm{i}\right)\left(a\sqrt{5}-2b\mathrm{i}\right)$
5. $(a+b)\left(a-\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}b}{2}\mathrm{i}\right)\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}b\mathrm{i}\right)$]

Cvičení 154

1 V Gaussově rovině znázorněte obory pravdivosti výrokových forem:
a) $|z| = 4$, b) $|z| \leqq 4$.

2 V Gaussově rovině znázorněte obory pravdivosti výrokové formy $1 \leqq |z| \leqq 4$.

3 V Gaussově rovině znázorněte obor pravdivosti výrokových forem:
a) $|z+2| = 1$, b) $|z-(2+3\mathrm{i})| = 1$.

4 V Gaussově rovině znázorněte obor pravdivosti výrokové formy $|z-1-\mathrm{i}| = |z|$.

5 V Gaussově rovině znázorněte obor pravdivosti výrokové formy $|z-1|+|z+1|=4$.

1. a) kružnice, $k(S;r)$, $S[0;0]$, $r=2$; b) kruh, $k(S;r)$, $S[0;0]$, $r=2$ **2.** mezikruží, $k(S;r_1)$, $k(S;r_2)$, $S[0;0]$, $r_1=1$, $r_2=2$ **3.** a) kružnice, $k(S;r)$, $S[-2;0]$, $r=1$; b) kružnice, $l(S;r)$, $S[2;3]$, $r=1$ **4.** přímka o rovnici $x+y-1=0$ **5.** elipsa o rovnici $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}y^2=1$

Cvičení 155

1 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ b) $z=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

2 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $z=\sqrt{2}$ b) $z=\mathrm{i}$

3 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $z=\sin\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi$ b) $z=1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$

4 V goniometrickém tvaru vyjádřete číslo $z=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)$.

5 V goniometrickém tvaru vyjádřete číslo

$$z=\frac{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi}.$$

1. a) $z=2\left(\cos\frac{1}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi\right)$; b) $z=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ **2.** a) $z=\sqrt{2}(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$; b) $z=\cos\frac{1}{2}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\pi$ **3.** a) $z=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)$; b) $z=2\cos\frac{1}{2}\varphi\left(\cos\frac{1}{2}\varphi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\varphi\right)$, $\cos\frac{1}{2}\varphi\geqq 0$, jinak $z=-2\cos\frac{1}{2}\varphi\left(\cos\left(\frac{1}{2}\varphi+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\varphi+\pi\right)\right)$ **4.** $z=\cos(\varphi+\psi)+\mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)$ **5.** $z=\cos(\varphi-\psi)+\mathrm{i}\sin(\varphi-\psi)$

Cvičení 156

1 Daná komplexní čísla vyjádřete v algebraickém tvaru:
a) $z = 2(\cos 120° + \mathrm{i}\sin 120°)$, b) $z = 3\sqrt{2}(\cos 135° + \mathrm{i}\sin 135°)$.

2 Součin $z = uv$ zapište v algebraickém tvaru:
$u = 2(\cos 20° + \mathrm{i}\sin 20°)$, $v = 3(\cos 70° + \mathrm{i}\sin 70°)$.

3 Podíl $z = u : v$ zapište v algebraickém tvaru:
$u = 6(\cos 80° + \mathrm{i}\sin 80°)$, $v = 2(\cos 20° + \mathrm{i}\sin 20°)$.

4 V goniometrickém tvaru vyjádřete číslo

$$z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}.$$

5 Přesvědčte se, že číslo $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$ je komplexní jednotka s argumentem $\varphi = 15°$. Zapište komplexní jednotku s argumentem $\varphi = 285°$ v algebraickém tvaru.

[**1.** a) $z = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$; b) $z = -3 + 3\mathrm{i}$ **2.** $z = 6\mathrm{i}$ **3.** $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ **4.** $z = \cos \frac{1}{8}\pi + \mathrm{i}\sin \frac{1}{8}\pi$ **5.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$]

Cvičení 157

1 Vypočtěte $\left(\cos \dfrac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin \dfrac{3}{4}\pi\right)^{10}$.

2 Vypočtěte $\left(\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{100}$.

3 Vypočtěte $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^8$.

4 V goniometrickém tvaru zapište komplexní číslo

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^n, \qquad \varphi \in \mathsf{R}.$$

5 Vyjádřete $\sin 3x$, $\cos 3x$ pomocí mocnin $\sin x$, $\cos x$.

[**1.** $-\mathrm{i}$ **2.** -2^{-50} **3.** $2^7\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ **4.** $\cos 2n\varphi + \mathrm{i}\sin 2n\varphi$ **5.** $\cos 3x = 4\cos^3 x -$ $- 3\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$]

Cvičení 158

1 Je dáno komplexní číslo $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathsf{R} \setminus \{0\}$. Obrazy komplexních čísel z, $\overline{z}$, $-z$, $-\overline{z}$ jsou vrcholy jistého obrazce. O jaký obrazec se jedná?

2 Určete obsah S čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou v Gaussově rovině čísla z, $z\mathrm{i}$, $-z$, $-z\mathrm{i}$, kde z je dané nenulové komplexní číslo.

3 V Gaussově rovině je dán kosočtverec $ABCD$ tak, že bod A je obrazem čísla 0, bod B je obrazem čísla 4 a orientovaný úhel BAD má základní velikost $\frac{1}{4}\pi$. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou body C, D.

4 Pro komplexní čísla u, v, w platí: $u = 1$, $|v| = |w| = 1$, $u + v + w = 0$. Dokažte, že obrazy komplexních čísel u, v, w v Gaussově rovině jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

5 Dokažte, že pro každá dvě komplexní čísla u, v platí:

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Jaká je geometrická interpretace této rovnosti?

[**1.** pravoúhelník **2.** $S = 2|z|^2$ **3.** $C\colon 2(2+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\mathrm{i}$, $D\colon 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mathrm{i}$ **4.** Jsou to komplexní jednotky s argumenty 0, $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{2}{3}\pi$. **5.** Obrazy čísel 0, u, v, $u+v$ jsou vrcholy rovnoběžníku. Součet druhých mocnin délek všech čtyř stran rovnoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek obou úhlopříček]

Cvičení 159

1 V $\mathbb{C}$ řešte rovnice:

a) $z - 3 = \mathrm{i}(1+z)$

b) $z\mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i}$

2 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$(5+\mathrm{i})\overline{z} + 2z = 22\mathrm{i}.$$

3 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$(2+3\mathrm{i})z + \mathrm{i}z = 1 - \mathrm{i}.$$

4 V $\mathbb{C}$ řešte dané rovnice rozkladem na lineární činitele:

a) $x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

5 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$(z-3)^2 + (\overline{z}+\mathrm{i})^2 = 4.$$

[**1.** a) $z = 1 + 2\mathrm{i}$; b) $z = 2 - \mathrm{i}$ **2.** $z = 1 - 7\mathrm{i}$ **3.** $z = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}\mathrm{i}$ **4.** a) $x_1 = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $x_2 = -\mathrm{i}\sqrt{2}$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2\mathrm{i}$, $x_4 = -2\mathrm{i}$ **5.** $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$]

Cvičení 160

1 V $\mathbb{C}$ řešte rovnice:

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$

2 V $\mathbb{C}$ řešte rovnice:

a) $x^2 + 4x + 5 = 0$ b) $9x^2 + 36x + 37 = 0$

3 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici

$$4x^4 + 19x^2 - 63 = 0.$$

4 Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ s reálnými koeficienty kořen $x = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak má také kořen $x = a - b\mathrm{i}$. Dokažte.

5 Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má daná rovnice imaginární kořeny:

a) $x^2 + 6x + a = 0$ b) $x^2 + 4ax + 36 = 0$

[**1.** a) $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; b) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ **2.** a) $x_1 = -2 - \mathrm{i}$, $x_2 = -2 + \mathrm{i}$; b) $x_1 = -2 + \frac{1}{3}\mathrm{i}$, $x_2 = -2 - \frac{1}{3}\mathrm{i}$ **3.** $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \mathrm{i}\sqrt{7}$, $x_4 = -\mathrm{i}\sqrt{7}$ **5.** a) $a > 9$; b) $a \in (-3; 3)$]

Cvičení 161

1 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^4 - 1 = 0$ rozkladem na součin lineárních činitelů. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

2 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^4 - 1 = 0$ jako binomickou rovnici.

3 Vypočtěte všechny druhé odmocniny z čísla -9.

4 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^2 = 1 + \mathrm{i}$.

5 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

[**1.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \mathrm{i}$, $x_4 = -\mathrm{i}$ **2.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \mathrm{i}$, $x_4 = -\mathrm{i}$ **3.** $3\mathrm{i}$, $-3\mathrm{i}$ **4.** $x_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{1}{8}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{1}{8}\pi)$, $x_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{9}{8}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{9}{8}\pi)$ **5.** Návod. Obě strany rovnice vynásobte dvojčlenem $z - 1$. Nakonec vylučte falešný kořen $z = 1$. $z_k = \cos \frac{2}{7}k\pi + \mathrm{i} \sin \frac{2}{7}k\pi$, $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.]

Cvičení 162

1 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^2 + 3x + 10\mathrm{i} = 0$.

2 V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^2 + (2 - 3\mathrm{i})x - 5(1 + \mathrm{i}) = 0$.

3 Určete hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby rovnice $x^2 - 2(3 + \mathrm{i}x) + p = 0$ měla jediný kořen.

4 V $\mathbb{C}^2$ řešte soustavu rovnic:

$$2x - y = 1 + 3\mathrm{i},$$
$$xy = 2.$$

5 Rovnice $x^2 + \mathrm{i}x + q = 0$ má kořen $x_1 = 2 - \mathrm{i}$. Určete druhý kořen a koeficient q.

[**1.** $x_1 = -4 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - 2\mathrm{i}$ **2.** $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = -3 + \mathrm{i}$ **3.** $p = 8 + 6\mathrm{i}$ **4.** $[1 + \mathrm{i}; 1 - \mathrm{i}]$, $[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}; -2 - 2\mathrm{i}]$ **5.** $x_2 = -2$, $q = -4 + 2\mathrm{i}$]

Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Cvičení 163

1 Určete definiční obor výrazu

$$V(n) = \frac{(n+2)!}{n!} - 2\,\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$$

a výraz zjednodušte.

2 $\forall n \in \mathsf{N} \setminus \{1\}$: $n! + n^2(n-1)! = (n+1)!$. Dokažte.

3 V N řešte rovnici:

$$\frac{(n+5)!}{(n+3)!} - \frac{(n-4)!}{(n-6)!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 60.$$

4 V N řešte nerovnici:

$$\frac{n!}{(n-2)!} - 3n \leqq \frac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2.$$

5 Zápis čísla 100! je ukončen 24 nulami. Dokažte.

[**1.** $n \in \mathsf{N}$, $n \geqq 2$, $V(n) = 2$ **3.** $n = 12$ **4.** $n \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$ **5.** Návod. Uvažte počet dvojek a pětek v rozkladu tohoto faktoriálu na prvočinitele.]

Cvičení 164

1 Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

a) $\binom{17}{8} + \binom{17}{8}$ b) $\binom{20}{3} + \binom{20}{16}$

2 $\forall n \in \mathsf{N}$, $\forall k \in \mathsf{N}$, $n \geqq k$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Dokažte.

3 V N řešte rovnici:

$$\binom{n}{3} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{3} = \frac{1}{2}n^3 + 88.$$

4 V N řešte nerovnici:

$$\binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} < 72.$$

5 $\forall m \in \mathsf{N}$, $\forall n \in \mathsf{N}$, $m \geqq 3$, $n \geqq 3$:

$$\binom{m+n}{3} = \binom{m}{3} + m\binom{n}{2} + n\binom{m}{2} + \binom{n}{3}.$$

Dokažte.

[**1.** a) $\binom{18}{9}$; b) $\binom{21}{4}$ **3.** $n = 6$ **4.** $n \in \{2; 3\}$]

Cvičení 165

1 Užitím binomické věty vypočtěte $(\sqrt{3}-2)^4$ a výsledek zapište ve tvaru $a + b\sqrt{3}$ s celými čísly a, b.

2 Je dáno komplexní číslo $z = 1 + \mathrm{i}$. Užitím binomické věty vypočtěte z^6 a výsledek zapište ve tvaru $a + b\mathrm{i}$, kde $a, b \in \mathsf{R}$.

3 Určete $n \in \mathsf{N}$ tak, aby třetí člen binomického rozvoje $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ neobsahoval proměnnou x.

4 Kolik racionálních sčítanců má součet, který vznikne po umocnění výrazu $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{2})^{12}$ pomocí binomické věty?

5 Užitím binomické věty dokažte, že číslo $11^{10} - 1$ je dělitelné 100.

[**1.** $97 - 56\sqrt{3}$ **2.** $-8\mathrm{i}$ **3.** $n = 8$ **4.** 3]

Cvičení 166

1 Z místa A do místa B vede pět cest, z místa B do místa C vedou tři cesty. Určete počet cest, které vedou z A do C a procházejí místem B.

2 Na vrchol hory vede 5 cest. Kolik tras má k dispozici turista pro výlet na vrchol a zpět? Kolik tras má k dispozici, nechce-li jít po téže cestě v obou směrech?

3 Určete, kolik poznávacích značek automobilů by bylo možné vytvořit za těchto předpokladů: první část značky tvoří skupina z 1, 2 nebo 3 písmen (k dispozici je 28 písmen) a druhou část značky tvoří čtyřčlenná skupina číslic.

4 Dva šachisté se připravují na finálové střetnutí. Vítězem se stane ten, kdo první vyhraje 3 partie, remízy se nepočítají. Vypište všechny možné varianty průběhu počítaných partií a určete jejich počet.

5 V ústavu pracuje 67 lidí, 47 z nich ovládá angličtinu, 35 němčinu a 23 zná oba jazyky. Kolik pracovníků nezná ani německy, ani anglicky?

[**1.** 15 **2.** 25; 20 **3.** $10^4(28 + 28^2 + 28^3)$ **4.** 20 variant **5.** 8]

Cvičení 167

1 Je dána množina $\mathsf{C} = \{a, b, c\}$. Vypište všechny variace první, druhé a třetí třídy z prvků této množiny.

2 Kolik existuje osmiciferných čísel, jež mají všechny číslice navzájem různé?

3 $\forall n \in \mathsf{N}$, $\forall k \in \mathsf{N}$, $k \leqq n - 1$: $V(k + 1; n) = (n - k) \cdot V(k; n)$. Dokažte.

4 Určete počet všech přirozených čísel menších než milión, která lze zapsat pouze použitím číslic 5 a 8.

5 Vypočtěte, kolik trojciferných přirozených čísel existuje v soustavě
a) dvojkové, b) dvanáctkové.

[**1.** (a), (b), (c); $(a; b)$, $(b; a)$, $(a; c)$, $(c; a)$, $(b; c)$, $(c; b)$; $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$ **2.** $V(8; 10) - V(7; 9)$ **4.** 126 **5.** a) 4; b) $11 \cdot 12^2$]

Cvičení 168

1 Kolik existuje čtyřciferných přirozených čísel, v nichž se každá z cifer 3, 4, 5, 6 vyskytuje právě jednou?

2 Kolik pěticiferných přirozených čísel lze napsat číslicemi 0, 1, 2, 3, 4, nemá-li se v žádném čísle žádná číslice opakovat?

3 Je dána soustava souřadnic v rovině s uzlovými body, jejichž souřadnicemi jsou přirozená čísla. Zjistěte počet všech nejkratších cest z bodu $A[1; 1]$ do bodu $B[6; 5]$, jestliže se pohyb může konat jen ve směru osy x nebo osy y a směr pohybu se může měnit jen v uzlových bodech.

4 Výrok G. I. Caesara při překročení řeky Rubiconu v roce 49 před Kristem se skrývá v anagramu AAAACEEJLSTT. Kolika způsoby lze v něm přemístit písmena?

5 Pro 8 studentů je v koleji připraveno ubytování ve 3 pokojích, z nichž jsou 2 třílůžkové a 1 dvoulůžkový. Kolik je způsobů rozdělení studentů do jednotlivých pokojů?

[**1.** 24 **2.** 96 **3.** 126 **4.** $\frac{12!}{2!2!4!} = 4\,989\,600$, Alea jacta est **5.** 560]

Cvičení 169

1 Kolik úhlopříček má konvexní n-úhelník?

2 Je dáno 10 různých bodů. Zjistěte, kolik rovin tyto body určují, jestliže
a) žádné 4 body neleží v téže rovině,
b) právě 6 bodů leží v téže rovině a v jiné rovině neleží žádné čtyři z daných bodů.

3 Určete, kolika způsoby lze ze 7 mužů a 5 žen vybrat čtyřčlennou skupinu, jestliže
a) nejsou stanoveny žádné omezující podmínky,
b) v ní mají být právě dvě ženy,
c) v ní mají být nejvýš dvě ženy.

4 Určete počet všech řešení rovnice $x + y + z = 4$ v množině všech trojic celých nezáporných čísel.

5 Kolika způsoby lze koupit v prodejně 5 sešitů, mají-li

a) 3 druhy sešitů v dostatečném množství,

b) od jednoho druhu sešitů pouze 4 sešity?

[**1.** $K(2;n) - n = \frac{1}{2}n(n-3)$ **2.** a) 120; b) 101 **3.** a) 495; b) 210; c) 420 **4.** 15 **5.** a) 21; b) 20]

Cvičení 170

1 V obchodě mají v dostatečném množství tři druhy kávy A, B, C, v balíčcích po 50 gramech. Kolika způsoby může zákazník provést nákup 200 gramů kávy?

2 Kolik existuje kvádrů, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž délky hran v cm jsou přirozená čísla z intervalu $(1;10\rangle$?

3 Nechť $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla. Kolik existuje kladných dělitelů čísla $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$? Mezi dělitele počítáme i čísla 1 a q.

4 Kolik různých částek můžeme zaplatit, máme-li k dispozici bankovky v hodnotách 100 Kč, 500 Kč, 2 000 Kč, 5 000 Kč a platíme-li jednou, dvěma nebo třemi bankovkami.

5 V košíku je 5 červených, 7 modrých a 6 žlutých velikonočních vajíček. Kolika způsoby lze z nich vybrat 5 vajíček tak, aby nebyla všechna stejné barvy?

1. Návod. Naším úkolem je určit počet všech čtyřčlenných skupin, ve kterých se vyskytují pouze prvky A, B, C, z nichž každý se může libovolněkrát opakovat. Přitom zřejmě nezáleží na pořadí členů ve skupině. 15 **2.** 220 **3.** 2^n **4.** 33 různých částek (přestože všech přípustných kombinací bankovek je 34, dvě z nich představují tutéž sumu) **5.** $K'(5;3) - 3 = 18$

Cvičení 171

1 Házíme dvěma mincemi. Určete množinu všech výsledků Ω a její podmnožiny A, B, které vyjadřují jevy: A — na obou mincích padl rub, B — aspoň na jedné minci padl líc.

2 Házíme dvěma kostkami. Určete množinu všech výsledků Ω a její podmnožiny A, B, které vyjadřují jevy: A — součet ok bude 7, B — na obou kostkách padne sudý počet ok.

3 Student si má vytáhnout 3 z 10 otázek. Je připraven na 5 otázek. Určete, kolik prvků mají množina Ω všech výsledků a její podmnožiny A, B, které vyjadřují jevy: A — student vytáhne právě jednu otázku, kterou umí, B — student nevytáhne žádnou otázku, kterou umí.

4 Pro libovolné jevy A, B vyjádřete v množinové symbolice, že

a) nastaly oba jevy,

b) nastal právě jeden z těchto jevů,

c) nenastal žádný z obou jevů,

d) nastal nejvýš jeden z těchto jevů.

5 V urně jsou 4 bílé a 3 černé koule. Z urny vybereme náhodně 3 koule. Označme jevy: A — všechny vytažené koule budou černé, B — všechny vytažené koule budou bílé, C — dvě vytažené koule budou černé a jedna bílá. Interpretujte jevy

a) A', b) $\mathsf{A} \cup \mathsf{C}$, c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$, e) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, f) $\mathsf{C}' \setminus \mathsf{A}$.

[**1.** $|\Omega| = 4$, $\Omega = \{(R;L),(L;R),(R;R),(L;L)\}$, $\mathsf{A} = \{(R;R)\}$, $\mathsf{B} = \{(L;R),$ $(R;L),(L;L)\}$ **2.** $|\Omega| = 36$, $\Omega = \{(1;1),(2;1),(1;2),\dots,(6;6)\}$, $|\mathsf{A}| = 6$, $\mathsf{A} =$ $= \{(1;6),(6;1),(2;5),(5;2),(3;4),(4;3)\}$, $|\mathsf{B}| = 9$, $\mathsf{B} = \{(2;2),(4;4),(6;6),(2;4),$ $(4;2),(2;6),(6;2),(4;6),(6;4)\}$ **3.** $|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$, $|\mathsf{A}| = \binom{5}{1}\binom{5}{2} = 50$, $|\mathsf{B}| = \binom{5}{3} =$ $= 10$ **4.** a) $\mathsf{A}\cap\mathsf{B}$; b) $(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}')\cup(\mathsf{A}'\cap\mathsf{B})$; c) $\mathsf{A}'\cap\mathsf{B}'$; d) $(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}')\cup(\mathsf{A}'\cap\mathsf{B})\cup(\mathsf{A}'\cap\mathsf{B}')$ **5.** a) aspoň jedna koule bude bílá; b) nejvýš jedna koule bude bílá; c) jev nemožný; d) jev nemožný; e) vytažené koule budou stejné barvy; f) aspoň dvě koule budou bílé]

Cvičení 172

1 Napište libovolné přirozené číslo menší než 20. Jaká je pravděpodobnost, že napíšete prvočíslo?

2 S jakou pravděpodobností padne součet 7 při hodu

a) dvěma kostkami, b) třemi kostkami?

Obě pravděpodobnosti porovnejte.

3 Jaká je pravděpodobnost, že zápis náhodně zvoleného trojciferného čísla končí

a) číslicí 5, b) číslicí větší než 5?

4 V tombole je 500 losů. Jakou pravděpodobnost hlavní výhry má účastník, který koupil 10 losů?

5 Míček o průměru 5 cm je vržen proti síti se čtvercovými oky o stranách délky 8 cm. Jaká je pravděpodobnost, že míček proletí, aniž se dotkne sítě?

[**1.** $\frac{2}{5}$ **2.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{72}$, $\frac{1}{6} > \frac{5}{72}$ **3.** a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{2}{5}$ **4.** 0,02 **5.** $\frac{9}{64}$]

Cvičení 173

1 Z 26 žáků třídy, která má 12 chlapců a 14 dívek, se losují 3 zástupci. Jaká je pravděpodobnost, že to budou

a) samé dívky,

b) dvě dívky a chlapec?

2 V urně je 11 koulí očíslovaných od 15 do 25. Náhodně vybereme 2 koule. Určete pravděpodobnost, že čísla na nich napsaná jsou soudělná.

3 V sérii n výrobků je r výrobků vadných. Ke kontrole se vybírá náhodně s výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude mít právě m výrobků vadu?

4 Číselný zámek má několik kotoučů s číslicemi na obvodu a otevírá se jen při jedné kombinaci číslic na kotoučích. Určete, který ze dvou zámků je bezpečnější:

a) zámek se 4 kotouči po 5 číslicích,

b) zámek s 5 kotouči po 4 číslicích.

5 V urně je 8 bílých, 7 červených a 5 modrých koulí. Vyjmeme náhodně 3 koule. Jaká je pravděpodobnost, že

a) všechny koule mají stejnou barvu,

b) každá má jinou barvu?

[**1.** a) 0,140; b) 0,420 **2.** 0,327 **3.** $\frac{\binom{r}{m}\cdot\binom{n-r}{s-m}}{\binom{n}{s}}$ **4.** všech kombinací na zámcích je a) 5^4; b) 4^5, bezpečnější je proto zámek b), neboť $5^4 < 4^5$ **5.** a) 0,088 6; b) 0,246]

Cvičení 174

1 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet 5 nebo 6?

2 Střelec zasahuje oblast terče s kruhy 10 až 8 s pravděpodobností 0,5 a oblast s kruhy 7 až 1 s pravděpodobností 0,4. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne terč v jedné nebo druhé oblasti?

3 Střelec zasahuje terč se spolehlivostí 0,9. Jestliže terč při prvním výstřelu nezasáhne, střílí ještě po druhé. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne terč prvním nebo druhým výstřelem?

4 Hodíme dvěma mincemi. Určete pravděpodobnost, že na první minci padne líc nebo na druhé minci rub.

5 V zásilce je 18 výrobků dobrých a 2 vadné. Namátkou vybereme 5 výrobků. Určete pravděpodobnost jevů:
A — aspoň jeden z vybraných výrobků je vadný,
B — nejvýš jeden z vybraných výrobků je vadný.

[**1.** $\frac{1}{4}$ **2.** 0,9 **3.** 0,99 **4.** 0,75 **5.** $P(\mathsf{A}) = \frac{17}{38}$, $P(\mathsf{B}) = \frac{18}{19}$]

Cvičení 175

1 Pro jevy A, B platí: $P(\mathsf{A}') = \frac{1}{3}$, $P(\mathsf{B}) = \frac{1}{2}$, $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \frac{1}{4}$. Určete $P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$.

2 Pro jevy A, B platí: $P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{B}) = \frac{1}{2}$. Rozhodněte, zda odtud plyne $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}')$.

3 Dokažte, že pro nezávislé jevy A, B platí

$$P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = 1 - P(\mathsf{A}') \cdot P(\mathsf{B}').$$

4 Nechť A, B jsou nezávislé jevy, $P(\mathsf{A}) = \frac{1}{5}$, $P(\mathsf{B}) = \frac{1}{4}$. Vypočtěte $P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$, $P(\mathsf{A}' \cup \mathsf{B}')$.

5 Nechť A, B jsou nezávislé jevy, $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \frac{1}{6}$, $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}') = \frac{1}{3}$. Vypočtěte $P(\mathsf{A})$, $P(\mathsf{B})$.

[**1.** $P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = \frac{11}{12}$ **2.** ano **4.** $P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = \frac{2}{5}$, $P(\mathsf{A}' \cup \mathsf{B}') = \frac{19}{20}$ **5.** $P(\mathsf{A}) = \frac{1}{2}$, $P(\mathsf{B}) = \frac{1}{3}$]

Cvičení 176

1 Házíme 4 kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň na jedné kostce padne šestka?

2 Mechanismus se skládá z 8 stejných součástek, které se vyrábějí v požadované kvalitě s pravděpodobností 0,94. Jestliže aspoň jedna součástka nemá požadovanou kvalitu, mechanismus nefunguje. Určete pravděpodobnost, že mechanismus bude pracovat.

3 Kolikrát musím hodit kostkou, aby šestka padla aspoň jednou s pravděpodobností větší než $\frac{1}{2}$?

4 Zkouška na vysoké škole se skládá ze tří po sobě jdoucích částí. K následující části se dostane jen student, který uspěl v části předchozí. Pravděpodobnosti úspěchu v jednotlivých částech zkoušky jsou následující: $P(\mathsf{A}) = \frac{1}{5}$, $P(\mathsf{B}) = \frac{3}{4}$ a $P(\mathsf{C}) = \frac{9}{10}$. Jaká je pravděpodobnost složení celé zkoušky?

5 Dva střelci střílejí na terč. První ho zasahuje s pravděpodobností 0,8 a druhý s pravděpodobností 0,7. Každý vystřelí jednou. Určete pravděpodobnost, že

a) oba zasáhnou, b) žádný nezasáhne,

c) první zasáhne, a druhý ne.

[**1.** $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}518$ **2.** $0{,}94^8 \doteq 0{,}609$ **3.** $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geqq 4$ **4.** $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = P(\mathsf{A}) \cdot P(\mathsf{B}) \cdot P(\mathsf{C}) = 0{,}135$ **5.** a) 0,56; b) 0,06; c) 0,24]

Cvičení 177

1 Fotbalista promění penaltu s pravděpodobností $p = 0{,}9$. Jaká je pravděpodobnost, že z 5 penalt promění

a) všech 5, b) právě 3, c) aspoň 4?

2 Dvanácti pacientům je podáván lék, který úspešně léčí jejich onemocnění v 95 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň deset z nich bude vyléčeno?

3 Klíčivost semen určitého druhu okurek je 93 %. Jaká je pravděpodobnost, že z 20 semen vyklíčí právě 18?

4 Předpokládejme, že pravděpodobnost narození chlapce a děvčete je stejná. Určete pravděpodobnost, že v porodnici mezi 5 narozenými dětmi

a) budou samí chlapci, b) budou právě 3 chlapci,

c) bude alespoň 1 chlapec.

5 Jaká je pravděpodobnost, že rodina se 6 dětmi bude mít právě 4 dcery?

[**1.** a) $p^5 = 0{,}590\,49$; b) $\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 \doteq 0{,}072\,9$; c) $p^5 + p^4(1-p) \doteq 0{,}918\,54$ **2.** asi 0,98 **3.** asi 0,252 **4.** a) asi 0,031 3; b) asi 0,313; c) asi 0,969 **5.** 0,234 375]

Cvičení 178

1 Při hodu jednou kostkou uvažujme jevy: A — padne sudé číslo, B — padne číslo větší nebo rovno 3. Vypočtěte $P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$.

2 S jakou pravděpodobností padne při hodu dvěma kostkami součet 7, vidíme-li, že na první kostce padlo číslo 2?

3 Určete $P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$, je-li $P(\mathsf{B}) > 0$, v těchto případech:

a) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, b) $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$, c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$.

4 Ve třídě s 30 žáky hraje 25 žáků volejbal, 10 basketbal a 7 hraje volejbal i basketbal. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný žák je volejbalista, víme-li, že hraje basketbal?

5 Nechť $P(\mathsf{B}|\mathsf{A}) = 0{,}216$, $P(\mathsf{A}) = 0{,}9$, $P(\mathsf{B}) = 0{,}45$. Vypočtěte $P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$.

[**1.** $P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{1}{2}$ **2.** $\frac{1}{6}$ **3.** a) $\frac{P(\mathsf{A})}{P(\mathsf{B})}$; b) 1; c) 0 **4.** $\frac{7}{10}$ **5.** 0,432]

Cvičení 179

1 Určete rozsah souboru n a sestavte tabulku rozložení absolutních a relativních četností věku posluchačů prvního ročníku vysoké školy. Zkontrolujte součet relativních četností a načrtněte spojnicový diagram četností.
18 18 19 18 19 18 20 18 21 20 18 19 21 19 18 21 22 21 18 19 23 19 18 19 20 18 23 20 22 20 22 19 18 22 22 18 20 19 21 18 19 20 20 18 19 20 18 21 18 19 19 19 21 18

2 Ve třídě s 25 žáky prospělo s vyznamenáním 7 žáků, prospělo 14 žáků, neprospěli 3 žáci, nebyl klasifikován 1 žák. Vypočtěte relativní četnosti znaku „prospěch" a ukažte, že jejich součet je roven 1. Sestrojte histogram rozdělení četností.

3 Z 360 studentů gymnázia bydlí 240 v místě školy, 90 dojíždí autobusem a 30 vlakem. Sestrojte odpovídající kruhový diagram rozdělení četností.

4 Při přípravě čajové směsi bylo smícháno 5 kg čaje v ceně 600 Kč za kg, 15 kg čaje v ceně 800 Kč za kg a 30 kg čaje v ceně 1 000 Kč za kg. Jaká bude cena 1 kg směsi?

5 Jaká bude výsledná koncentrace kyseliny sírové, při jejíž přípravě bylo použito 8 kg 18% kyseliny a 2 kg 96% kyseliny?

[**1.** $\frac{17}{54}$, $\frac{14}{54}$, $\frac{9}{54}$, $\frac{7}{54}$, $\frac{5}{54}$, $\frac{2}{54}$ **2.** $\frac{7}{25}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{1}{25}$ **4.** 900 Kč **5.** 33,6 %]

Cvičení 180

1 Na 10 pokusných polích se sleduje hektarový výnos pšenice. Jednotlivé výnosy jsou uvedeny v tabulce. Vypočtěte aritmetický průměr, medián, modus, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Pole	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q/ha	46,5	46,2	48,9	50,1	52,3	49,3	40,1	45,0	46,7	42,8

2 Určete aritmetický průměr $\overline{x}$, modus $\mathrm{Mod}(x)$ a medián $\mathrm{Med}(x)$ z dané tabulky rozdělení četností znaků x.

x_j	2	4	6	8	10	12
n_j	3	2	10	4	6	5

3 Za 5 let má vzrůst produkce podniku o 40 %. O kolik procent musí průměrně ročně vzrůst?

4 Pro 304 studentů prvního ročníku vysoké školy byla sestavena tabulka rozdělení četností n_j jejich věku x_j:

x_j	18	19	20	21	22	23
n_j	102	84	58	26	19	15

Vypočtěte aritmetický průměr $\overline{x}$, rozptyl s_x^2 a směrodatnou odchylku s_x.

5 Dva pracovníci provádějí opakovaně tutéž výrobní operaci. Prvnímu pracovníkovi trvá operace 2 minuty, druhému 6 minut. Jak dlouho trvá její vykonání průměrně jednomu pracovníkovi, pracují-li (každý samostatně) po stejnou dobu?

[**1.** $\overline{x} \doteq 46{,}8$; $\mathrm{Med}(x) = 46{,}6$; $\mathrm{Mod}(x) = 46{,}5$, $s_x^2 = 11{,}64$, $s_x = 3{,}41$ **2.** $\overline{x} = 7{,}53$; $\mathrm{Med}(x) = 7$; $\mathrm{Mod}(x) = 6$ **3.** asi o 7 % **4.** $\overline{x} = 19{,}41$; $\mathrm{Med}(x) = 19$; $\mathrm{Mod}(x) = 18$; $s_x^2 = 2{,}05$; $s_x = 1{,}43$ **5.** 3 minuty]

Posloupnosti a řady

Cvičení 181

1 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Dokažte.

2 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. Dokažte.

3 $\forall n \in \mathsf{N}\colon \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$. Dokažte.

4 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$. Dokažte.

5 $\forall n \in \mathsf{N}\colon (\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx$. Dokažte.

Cvičení 182

1 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 30 \mid 11^{4n+1} - 11$. Dokažte.

2 $\forall n \in \mathsf{N}\colon 9 \mid 7^n + 3n - 1$. Dokažte.

3 V rovině je dáno n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Dokažte, že tyto přímky dělí rovinu na $p(n)$ oblastí, kde $p(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

4 Posloupnost je dána rekurentně takto: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pro každé $n \in \mathsf{N}$. Zjistěte, pro která $n \in \mathsf{N}$ platí $a_n = n^2 - 1$.

5 $\forall n \in \mathsf{N}$: $(n \geqq 5 \vee n = 1) \Rightarrow 2^n > n^2$. Dokažte.

Cvičení 183

1 Je dána posloupost $\left(n^2 - n + 17\right)_{n=1}^{+\infty}$. Přesvědčte se, že členy posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ jsou prvočísla. Ukažte, že člen a_{17} není prvočíslo.

2 Určete n-tý člen posloupnosti
a) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \ldots,$ b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \ldots$

3 Dokažte, že posloupnost $\left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je rostoucí.

4 Dokažte, že posloupnost $\left(2 + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je omezená.

5 Určete posloupnost $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{+\infty}$ rekurentně.

[**1.** 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 251 jsou prvočísla, $289 = 17^2$ není prvočíslo **2.** např. a) $\frac{n^2}{2n+1}$; b) $\frac{2n-1}{2^n}$ **5.** např. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$]

Cvičení 184

1 Dokažte, že posloupnost $(1 + 3n)_{n=1}^{+\infty}$ je aritmetická.

2 V které aritmetické posloupnosti platí $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 + a_4 = 19$? Hledanou posloupnost určete vzorcem pro její n-tý člen a_n.

3 Mezi čísla 1 a 25 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila několik prvních členů aritmetické posloupnosti o součtu 117.

4 Kolik prvních členů aritmetické posloupnosti 3, 5, 7, ... dává součet 120?

5 V které aritmetické posloupnosti se součty prvních pěti i prvních šesti členů aritmetické posloupnosti rovnají témuž číslu 60? Hledanou posloupnost určete vzorcem pro její n-tý člen a_n.

[**2.** $a_1 = 2$, $d = 3$, $a_n = 3n - 1$ **3.** 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 **4.** $n = 10$ **5.** $a_1 = 20$, $d = -4$, $a_n = 24 - 4n$]

Cvičení 185

1 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Jak velké jsou zbývající strany trojúhelníku?

2 Vypočtěte délky stran pravoúhlého trojúhelníku o obsahu $6\,\mathrm{dm}^2$, jsou-li vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

3 Existuje konvexní n-úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost $126°$ a jehož každý následující vnitřní úhel má velikost o $4°$ větší než předcházející?

4 Rozměry kvádru jsou vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti. Určete rozměry kvádru, je-li jejich součet 24 cm a objem kvádru 312 cm^3.

5 Železné roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy spodní. Do kolika vrstev jsou složeny 102 roury, má-li nejhořejší vrstva 3 roury? Kolik rour má vrstva nejspodnější?

[**1.** 18 cm, 30 cm **2.** 3 dm, 4 dm, 5 dm **3.** ano, $n = 10$ **4.** 3 cm, 8 cm, 13 cm **5.** 12, 14]

Cvičení 186

1 Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, jestliže

$$a_1 - a_2 + a_3 = 15, \qquad a_4 - a_5 + a_6 = 120.$$

2 Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou (ve správném pořadí) první tři členy geometrické posloupnosti. Určete je.

3 Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby vzniklo několik prvních členů geometrické posloupnosti, v níž součet vložených čísel je 630.

4 V geometrické posloupnosti je $a_2 - a_1 = 15$, $a_3 - a_2 = 60$. Určete s_4.

5 Pro které n v geometrické posloupnosti $a_1 = \frac{1}{16}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, ... platí $a_n + a_{n+3} = 2\,304$?

[**1.** $a_1 = 5$, $q = 2$ **2.** 5, 10, 20 **3.** 10, 20, 40, 80, 160, 320 **4.** $s_4 = 425$ **5.** $n = 13$]

Cvičení 187

1 Povrch kvádru je $78\,\mathrm{cm}^2$, součet jeho rozměrů je $13\,\mathrm{cm}$. Jak velký je jeho objem, jsou-li jeho rozměry vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti?

2 Délky stran trojúhelníku ABC v pořadí a, b, c jsou vyjádřeny třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti. Určete je, je-li jeho obvod $o = 42\,\mathrm{cm}$ a délka strany $b = 8\,\mathrm{cm}$

3 Jak velký je úhel $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\pi\right)$, tvoří-li $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?

4 Bakterie se množí půlením tak, že k dělení dojde vždy za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne za 12 hodin z jedné bakterie?

5 Poločas rozpadu rádia C je asi 20 minut. Jaké množství rádia C zbude za 4 hodiny z původního množství 1 mg? Jaké množství zbude za dobu t hodin?

[**1.** $27\,\mathrm{cm}^3$ **2.** úloha nemá řešení **3.** $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ **4.** asi 16 780 000 **5.** asi $\frac{1}{2^{12}}$ mg, asi $\frac{1}{2^{3t}}$ mg]

Cvičení 188

1 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+8}{n+2}$.

2 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n-1}$.

3 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}$.

4 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

5 Vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

[**1.** 3 **2.** 0 **3.** $\frac{2}{3}$ **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** e^2, e je Eulerovo číslo]

Cvičení 189

1 Vypočtěte součty:

a) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$,

b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3+\ldots$

2 Určete $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right)$.

3 S využitím nekonečné geometrické řady vyjádřete číslo $a=0,2\overline{17}$ ve tvaru zlomku v základním tvaru.

Poznámka. Zlomek je v základním tvaru, jsou-li čitatel a jmenovatel čísla nesoudělná.

4 V R řešte rovnice:

a) $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+\ldots=2$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n-1}=\dfrac{4x-3}{3x-4}$.

5 V R řešte rovnice:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = 1$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^{2n-2} x = 2 \operatorname{tg} x$

[**1.** a) 4; b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** $a = \frac{43}{198}$ **4.** a) $x = 10$; b) $x = 6$ **5.** a) -1; b) $\bigcup\limits_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$]

Cvičení 190

1 Je dán čtverec o straně délky a. Do něho je vepsán druhý čtverec tak, že jeho vrcholy jsou středy stran daného čtverce. Takto vzniklému čtverci je stejným způsobem opět vepsán další čtverec atd. Postup se stále opakuje. Určete součet

a) obvodů,

b) obsahů

všech takto vzniklých čtverců.

2 Spirála se skládá z půlkružnic, z nichž první má poloměr 10 cm a každá následující má poloměr rovný dvěma třetinám poloměru předcházející polokružnice. Určete délku spirály.

3 Do rovnostranného trojúhelníku o straně délky a je vepsán kruh, do tohoto kruhu je vepsán další rovnostranný trojúhelník, do tohoto trojúhelníku je vepsán další kruh atd. Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých

a) trojúhelníků,

b) kruhů.

4 Nahraďte zlomek $\dfrac{m}{m-x}$ nekonečnou konvergentní geometrickou řadou s prvním členem 1 a stanovte podmínku její konvergence.

5 Nahraďte zlomek $\dfrac{1}{\sin^2 \varphi}$ nekonečnou geometrickou řadou, která konverguje k danému zlomku pro všechna přípustná $\varphi \in \mathsf{R}$.

[**1.** a) $4a(2+\sqrt{2})$; b) $2a^2$ **2.** 30π cm **3.** a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}a^2$; b) $\frac{1}{9}\pi a^2$ **4.** $1+\frac{x}{m}+\left(\frac{x}{m}\right)^2+\ldots$, $|x|<|m|$ **5.** $1+\cos^2\varphi+\cos^4\varphi+\ldots$, $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$]

Diferenciální a integrální počet

Cvičení 191

1 V R řešte nerovnice s parametry $a \in \mathsf{R}$, $\delta \in \mathsf{R}^+$:

a) $|x - a| < \delta$ b) $0 < |x - a| < \delta$

2 Zapište intervalem v R dané okolí, určete jeho střed a a poloměr δ:

a) $|x + 1| < \dfrac{1}{2}$ b) $|x - 2| < 1$

3 Pomocí nerovnic s proměnnou $x \in \mathsf{R}$ zapište δ-okolí bodů $a = -4$, $b = 1$, pro $\delta = \dfrac{1}{10}$.

4 Přímo z definice, tj. bez užití Weierstrassovy věty ukažte, že funkce $f\colon y = x^2 - 2x + 1$ je v intervalu $\langle 0; 3\rangle$ omezená. Sestrojte graf funkce f v daném intervalu.

5 Ilustrujte význam Weierstrassovy věty na funkci $f\colon y = \sin x$ v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$. Sestrojte graf funkce f v daném intervalu.

[**1.** a) $x \in (a - \delta; a + \delta)$; b) $x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ **2.** a) $x \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $a = -1$, $\delta = \frac{1}{2}$; b) $x \in (1; 3)$, $a = 2$, $\delta = 1$ **3.** $|x + 4| < \frac{1}{10}$, $|x - 1| < \frac{1}{10}$ **4.** $\forall x \in \langle 0; 3\rangle$: $1 \leqq f(x) \leqq 4$ **5.** f je spojitá v $\langle 0; \pi\rangle$; maximum v bodě $\frac{1}{2}\pi$, minima v bodech 0 a π]

Cvičení 192

1 Dokažte, že rovnice $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ má v každém z intervalů $(-3; -1)$, $(0; 2)$, $(3; 5)$ jeden kořen.

2 Určete co nejmenší intervaly $(a; b)$, kde $a, b \in \mathsf{Z}$, ve kterých leží aspoň jeden kořen rovnice $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

3 S využitím vlastnosti spojitých funkcí řešte v R nerovnici

$$x^3 - 5x^2 + 6x \leqq 0.$$

4 S využitím vlastnosti spojitých funkcí řešte v R nerovnici

$$\frac{3x - x^2}{x + 1} \geqq 0.$$

5 S využitím vlastnosti spojitých funkcí řešte v R nerovnici

$$\frac{4}{x + 2} > 2.$$

[**1.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, $f(-3) \cdot f(-1) < 0$, $f(0) \cdot f(2) < 0$, $f(3) \cdot f(5) < 0$
2. $(-4; -2)$, $(2; 4)$ **3.** $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$ **4.** $(-\infty; -1) \cup \langle 0; 3\rangle$ **5.** $(-2; 0)$]

Cvičení 193

1 S využitím vlastnosti spojitých funkcí řešte v R nerovnici

$$x^3 \geqq x^2.$$

2 S využitím vlastnosti spojitých funkcí řešte v R nerovnici

$$2 + (x - 2) \cdot \ln x \geqq x.$$

3 V R řešte nerovnici

$$(x - 2)^2 (x + 2) \leqq 0.$$

4 V R řešte nerovnici

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \geqq 0.$$

5 V R řešte nerovnici

$$\frac{x}{x^2-5x+6} > 0.$$

[**1.** $\{0\} \cup \langle 1; +\infty)$ **2.** $(0; 2\rangle \cup \langle \mathrm{e}; +\infty)$ **3.** $(-\infty; -2\rangle \cup \{2\}$ **4.** $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty) =$ $= \mathsf{R} \setminus \{1\}$ **5.** $(0; 2) \cup (3; +\infty)$]

Cvičení 194

1 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)$.

2 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

3 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

4 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}+4}{1-x}$.

5 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

[**1.** 5 **2.** 1 **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 2 **5.** $\frac{1}{2}$]

Cvičení 195

1 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(4+x)^3-64}{x}$.

2 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

3 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$.

4 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

5 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, kde $m, n \in \mathsf{N}$.

[**1.** 48 **2.** $\frac{1}{8}$ **3.** $\frac{3}{4}$ **4.** $\frac{1}{4}$ **5.** $\frac{m}{n}$]

Cvičení 196

1 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$

2 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

4 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

5 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

[**1.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 8 **5.** 2]

Cvičení 197

1 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

2 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$

3 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{2x+5}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{2x+5}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+5}{x-3}$

4 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x$ b) $\lim\limits_{x\to 0-} \ln x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$

5 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{1}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1}{x^2-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2-4}$

[**1.** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) neexistuje **2.** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$ **3.** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) neexistuje **4.** a) $-\infty$; b) neexistuje; c) neexistuje **5.** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) neexistuje]

Cvičení 198

1 Načrtněte graf funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x+2}$ a vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2}$.

2 Načrtněte graf funkce $f\colon y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$ a vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{5x-2}$.

3 Načrtněte graf funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x^2+1}$ a vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$.

4 Načrtněte graf funkce $f\colon y = \mathrm{e}^x$ a vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$.

5 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

[**1.** 0 **2.** $\frac{2}{5}$ **3.** $0, 0$ **4.** $+\infty, 0$ **5.** 2]

Cvičení 199

1 Je dána funkce $f\colon y = -4x+1$ a číslo x_0. Vypočtěte

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2 Je dána funkce $f\colon y = x^2+1$ Vypočtěte

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

3 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{2}{x+1}$ a číslo x_0. Vypočtěte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

4 Je dána funkce $f\colon y = x^3 + 1$. Vypočtěte

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

5 Je dána funkce $f\colon y = \sin x$ a číslo x_0. Vypočtěte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

[**1.** -4 **2.** 4 **3.** $-\frac{2}{(x_0+1)^2}$ **4.** 3 **5.** $\cos x_0$]

Cvičení 200

Poznámka. Cílem Cvičení 200 je procvičit výpočet limity $k_T = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, která je směrnicí tečny ke grafu funkce f s bodem dotyku $T[x_0; y_0]$. Rovnice této tečny je $y - y_0 = k_T(x - x_0)$ neboli $y = k_T(x - x_0) + y_0$. Jinými slovy budeme určovat rovnici tečny bez použití pravidel pro výpočet derivace funkce.

1 Napište rovnici tečny grafu funkce $f\colon y = x^2 - 1$ v bodě dotyku $T[1, y_0]$. Proveďte příslušný náčrtek.

2 Napište rovnici tečny grafu funkce $f\colon y = x^3 + 1$ v bodě dotyku $T[0, y_0]$. Proveďte příslušný náčrtek.

3 Napište rovnici tečny grafu funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x-4}$ v bodě dotyku $T[-1, y_0]$. Proveďte příslušný náčrtek.

4 Napište rovnici tečny grafu funkce $f\colon y = -x^2 + 4$ v bodě dotyku $T[-2, y_0]$. Proveďte příslušný náčrtek.

5 Napište rovnici tečny grafu funkce $f\colon y = \mathrm{e}^x$ v bodě dotyku $T[0, y_0]$. Proveďte příslušný náčrtek.

[**1.** $y = 2x - 2$ **2.** $y = 1$ **3.** $y = -\frac{1}{25}(x+1) + \frac{1}{5}$ **4.** $y = 4x + 8$ **5.** $y = x + 1$]

Cvičení 201

1 Určete asymptoty grafu funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

2 Určete asymptoty grafu funkce $f\colon y = \dfrac{2x+3}{x-5}$.

3 Určete asymptoty grafu funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x-1} + x$.

4 Určete asymptoty grafu funkce $f\colon y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

5 Určete asymptoty grafu funkce $f\colon y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

[**1.** $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$ **2.** $y = 2$, $x = 5$ **3.** $y = x$, $x = 1$ **4.** $y = 0$, $x = 3$ **5.** $y = x + 2$, $x = 2$]

Cvičení 202

1 Přímo podle definice vypočtěte derivaci dané funkce v libovolném bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$:

a) $f\colon y = 1$ b) $f\colon y = ax + b$

2 Přímo podle definice vypočtěte derivaci dané funkce $f\colon y = ax^2+bx+c$ v libovolném bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$.

3 Přímo podle definice vypočtěte derivaci dané funkce $f\colon y = \dfrac{1}{ax+b}$ v libovolném bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$.

4 Přímo podle definice vypočtěte derivaci dané funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x^2}$ v libovolném bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$.

5 Přímo podle definice vypočtěte derivaci dané funkce $f\colon y = \cos x$ v libovolném bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$.

[**1.** a) $f'(x_0) = 0$; b) $f'(x_0) = a$ **2.** $f'(x_0) = 2ax_0 + b$ **3.** $f'(x_0) = -\frac{a}{(ax_0+b)^2}$ **4.** $f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^3}$ **5.** $f'(x_0) = -\sin x_0$]

Cvičení 203

1 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(1)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ b) $f\colon y = 5x^3 - 3x^5$

2 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(2)$ pro funkci:

a) $f\colon y = ax + b$ b) $f\colon y = ax^2 + bx + c$

3 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(0)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ b) $f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

4 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(1)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1+x^2}$ b) $f\colon y = \dfrac{x}{1+x^2}$

5 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(1)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ b) $f\colon y = x(\sqrt{x}+1)$

[**1.** a) $x^2 - 4x + 5$, 2; b) $15x^2 - 15x^4$, 0 **2.** a) a, a; b) $2ax + b$, $4a + b$ **3.** a) $\frac{1}{(x-1)^2}$, 1; b) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $\frac{ad-bc}{d^2}$ **4.** a) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 0 **5.** a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{5}{6}$; b) $\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + 1$, $\frac{5}{2}$]

Cvičení 204

1 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(\frac{1}{4}\pi)$ pro funkci:

a) $f\colon y = 4\sin x + 3\cos x$ b) $f\colon y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

2 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(\pi)$ pro funkci:

a) $f\colon y = x\sin x$ b) $f\colon y = \dfrac{\sin x}{x}$

3 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(1)$ pro funkci:

a) $f\colon y = x^2 \ln x$ b) $f\colon y = \dfrac{\ln x}{x}$

4 Vypočtěte $f'(x)$ a $f'(0)$ pro funkci:

a) $f\colon y = x\mathrm{e}^x$

b) $f\colon y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

5 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci $f\colon y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

[**1.** a) $4\cos x - 3\sin x$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$, 4 **2.** a) $\sin x + x\cos x$, $-\pi$; b) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $-\frac{1}{\pi}$ **3.** a) $x(2\ln x + 1)$, 1; b) $\frac{1-\ln x}{x^2}$, 0 **4.** a) $\mathrm{e}^x(1-x)$, 1; b) $\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$, $f'(0)$ není def. **5.** $\frac{2}{2\sin x\cos x - 1}$]

Cvičení 205

1 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = (x^2+1)^4$

b) $f\colon y = (ax^2+bx+c)^2$

2 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \sqrt{1-x^2}$

b) $f\colon y = \sqrt[3]{(2x+3)^2}$

3 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \sin^2 x$

b) $f\colon y = \sin x^2$

4 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \operatorname{cotg}\sqrt{x}$

b) $f\colon y = \operatorname{tg}(x^2+1)$

5 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = 3^{x^3}$ b) $f\colon y = x \cdot 10^{-x}$

[**1.** a) $8x(x^2+1)^3$; b) $2(ax^2+bx+c)(2ax+b)$ **2.** a) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+3}}$
3. a) $2\sin x\cos x$; b) $2x\cos x^2$ **4.** a) $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$; b) $\frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$
5. a) $3x^2 3^{x^3}\ln 3$; b) $(1-x\ln 10)\cdot 10^{-x}$]

Cvičení 206

1 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \ln(\sin x)$ b) $f\colon y = \ln(\cos x)$

2 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \ln(x^2+1)$ b) $f\colon y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

3 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \mathrm{e}^{-x^2}$ b) $f\colon y = \mathrm{e}^{1/x}$

4 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \mathrm{e}^x\sin x$ b) $f\colon y = \mathrm{e}^x\cos x$

5 Vypočtěte $f'(x)$ pro funkci:

a) $f\colon y = \sin^2 x^2$ b) $f\colon y = \ln\ln\ln x$

[**1.** a) $\operatorname{cotg} x$; b) $-\operatorname{tg} x$ **2.** a) $\frac{2x}{x^2+1}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **3.** a) $-2x\mathrm{e}^{-x^2}$; b) $-\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$
4. a) $\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$; b) $\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$ **5.** a) $4x\sin x^2\cos x^2$; b) $\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$]

Cvičení 207

1 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$:
$f\colon y = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$.

2 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$:
$f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$.

3 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$:
$f\colon y = \sin x$, $x_0 = 0$.

4 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$:
$f\colon y = \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$.

5 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce f v bodě $T[x_0, y_0]$:
$f\colon y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = -1$.

[**1.** $y = 3x$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ **2.** $y = -\frac{1}{4}x + 1$, $y = 4x - \frac{15}{2}$ **3.** $y = x$, $y = -x$
4. $y = x + 1$, $y = -x + 1$ **5.** $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -2x - \frac{3}{2}$]

Cvičení 208

Poznámka. Úlohou vyšetřit monotónnost funkce rozumíme určení všech intervalů, ve kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající. Vždy je tedy požadováno nalezení „maximálních intervalů“ monotónnosti.

1 Určete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = x^2 - x + 1$.

2 Určete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = 2x^2 - x^4$.

3 Určete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

4 Určete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = \dfrac{\ln x}{x}$.

5 Určete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

[**1.** klesající: $(-\infty; \frac{1}{2})$, rostoucí: $(\frac{1}{2}; +\infty)$ **2.** klesající: $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$, rostoucí: $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ **3.** klesající: $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, rostoucí: $(-1; 1)$ **4.** klesající: $(\mathrm{e}; +\infty)$, rostoucí: $(0; \mathrm{e})$ **5.** klesající: $(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$, rostoucí: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$]

Cvičení 209

1 Určete lokální extrémy funkce $f\colon y = x^3 - 6x^2$.

2 Určete lokální extrémy funkce $f\colon y = \sqrt{6x - x^2}$.

3 Určete lokální extrémy funkce $f\colon y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$.

4 Určete globální extrémy funkce v daném intervalu:
$f\colon y = -3x^4 + 6x^2$, $x \in \langle -2; 2\rangle$.

5 Určete globální extrémy funkce v daném intervalu:
$f\colon y = x + 2\sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 4\rangle$.

[**1.** v bodě 0 lokální maximum, $f(0) = 0$, v bodě 4 lokální minimum, $f(4) = -32$ **2.** v bodě 3 lokální maximum, $f(3) = 3$ **3.** v bodech -1 a 1 lokální maxima, $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$, v bodě 0 lokální minimum, $f(0) = 0$ **4.** globální minima v bodech -2 a 2, $f(-2) = f(2) = -24$, globální maxima v bodech -1 a 1, $f(-1) = f(1) = 3$ **5.** globální minimum v bodě 0, $f(0) = 0$, globální maximum v bodě 4, $f(4) = 8$]

Cvičení 210

1 Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce

$$f\colon y = 3x^4 - 4x^3.$$

2 Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce

$$f\colon y = \frac{1}{1+x^2}.$$

3 Najděte taková čísla a a b, aby bod $x = 1$ byl pro funkci

$$f\colon y = x^3 + ax^2 - 3x + b$$

inflexním bodem.

4 Je-li počátek inflexním bodem grafu funkce

$$f\colon y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

potom je její graf středově souměrný podle počátku. Dokažte.

5 Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce

$$f\colon y = x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$

1. konvexní v $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, konkávní v $\left(0; \frac{2}{3}\right)$, inflexní body jsou $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$ **2.** konvexní v $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, konkávní v $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, inflexní body jsou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $a = -3$, $b = 6$ **4.** Návod: Graf funkce je středově souměrný podle počátku, jestliže $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$. **5.** konvexní v $(-\infty; 2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2}; +\infty)$, konkávní v $(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$, inflexní body jsou $x = 2-\sqrt{2}$, $x = 2+\sqrt{2}$

Cvičení 211

Při řešení těchto úloh postupujte podle následujícího schématu:

1. definiční obor, parita funkce (sudá, lichá), periodičnost funkce;
2. body, ve kterých není funkce definována, ale má v nich jednostranné limity, výpočet těchto limit, limity v nevlastních bodech, intervaly spojitosti;
3. průsečíky s osami x a y, znaménka funkčních hodnot;
4. výpočet první derivace, nulové body první derivace a body, ve kterých není definována první derivace;
5. lokální extrémy, intervaly monotónnosti;
6. výpočet druhé derivace, nulové body druhé derivace a body, ve kterých není definována druhá derivace;
7. inflexní body, intervaly, v nichž je funkce konvexní, konkávní;
8. asymptoty;
9. obor hodnot;
10. graf.

1 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = 5x^3 - 3x^5$.

2 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

3 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \sqrt{4-x^2}$.

4 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \dfrac{1}{\cos x}$.

5 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \ln(1-x^2)$.

Cvičení 212

1 Rozložte číslo a na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

2 Součet dvou čísel je 12. Najděte tato čísla, jestliže součet jejich třetích mocnin je nejmenší možný.

3 Určete vzdálenost bodu $Q[1;2]$ od paraboly $y = \frac{1}{4}x^2$.

4 Drát dlouhý $(9 + 4\sqrt{3})$ cm se rozdělí na dva kusy. Z jednoho kusu se zhotoví čtverec a z druhého rovnostranný trojúhelník. Jaké by měly být délky kusů, aby součet obsahů obou obrazců byl minimální?

5 Na souřadnicové ose x najděte bod, jehož součet vzdáleností od bodů $A[0;4]$ a $B[4;2]$ je minimální.

[**1.** $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$ **2.** $6, 6$ **3.** $\sqrt{2}$ **4.** délka strany čtverce: $\sqrt{3}$ cm, délka strany trojúhelníku: 3 cm **5.** $[\frac{8}{3}; 0]$]

Cvičení 213

1 Pravoúhelník má obvod 100 cm. Určete délky jeho stran a, b tak, aby jeho obsah byl maximální.

2 Do trojúhelníku se základnou z a výškou v je vepsán pravoúhelník maximálního obsahu. Určete jeho obsah S.

3 Z lepenky tvaru čtverce o straně délky a se v rozích vyříznou stejně velké čtverce a ze zbylé části se slepí krabička. Jak velká musí být strana vyříznutého čtverce, aby byl objem krabičky největší?

4 Určete maximální obsah S lichoběžníku, jehož tři strany mají danou délku b.

5 Dvě chodby široké 2,4 m a 1,6 m se protínají pod pravým úhlem. Jaký nejdelší žebřík lze ve vodorovné poloze ještě přenést z jedné chodby do druhé?

[**1.** $a = 25\,\text{cm}$, $b = 25\,\text{cm}$. **2.** $S = \frac{1}{4}zv$ **3.** $\frac{1}{6}a$ **4.** $S = \frac{3}{4}\sqrt{3}b^2$ **5.** asi 5,6 m]

Cvičení 214

1 Najděte výšku v a poloměr r válce, který má při daném povrchu S maximální objem.

2 Kouli o poloměru r je vepsán kužel maximálního objemu. Určete poloměr ϱ podstavy a výšku v kužele.

3 Krabice má tvar kvádru a její délka je dvojnásobkem její šířky.

a) Jaký má nejmenší možný povrch (včetně dna a víka), je-li její objem $72\,\text{cm}^3$?

b) Jaký má největší možný objem, je-li její povrch $108\,\text{cm}^2$?

4 Do rotačního kužele o podstavě poloměru r a výšce v vepište rotační válec maximálního objemu. Určete poloměr ϱ podstavy a výšku h hledaného válce.

5 Navrhněte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem a objemem $32\,\text{m}^3$ tak, aby na vyzdění jeho stěn včetně dna bylo potřeba nejmenší množství materiálu.

[**1.** $v = 2r$, $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ **2.** $\varrho = \frac{1}{3}r\sqrt{8}$, $v = \frac{4}{3}r$ **3.** a) $108\,\text{cm}^2$; b) $72\,\text{cm}^3$ **4.** $\varrho = \frac{2}{3}r$, $h = \frac{1}{3}v$ **5.** $4\,\text{m} \times 4\,\text{m} \times 2\,\text{m}$]

Cvičení 215

1 Město B je $10\,\mathrm{km}$ východně od města A a město C je $3\,\mathrm{km}$ jižně od B. Z A do C se má postavit dálnice. Cena při budování dálnice podél existující přímé silnice z A do B je 4 miliony Kč za km, zatímco cena kdekoli jinde je 5 milionů Kč za km. V kterém místě P mezi body A, B by se měla napojit přímá odbočka do C, aby se minimalizovaly náklady? Jak velké pak budou?

2 Silnice široká b metrů je osvětlována lampou, která má stejnou vzdálenost od obou okrajů silnice. V jaké výšce x nad silnicí musí lampa být, aby byl okraj silnice nejvíce osvětlen?

3 Délka nakloněné roviny je d. Vyberte její výšku h tak, aby se kulička o hmotnosti m, která se kutálí z nejvyššího bodu nakloněné roviny, skutálela po celé její dráze v co nejkratší době. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

4 Akumulátor má elektromotorické napětí U a vnitřní odpor R_i. Jaký vnější odpor R je nutno zapojit, chceme-li ve vnějším proudovém okruhu získat největší výkon? Určete tento maximální výkon P_max.

5 Dvě přímé silnice se křižují v pravém úhlu. V okamžiku, kdy opouští křižovatku auto jedoucí rychlostí $v_1 = 60\,\mathrm{km/h}$, je na druhé silnici auto ve vzdálenosti $5\,\mathrm{km}$ od křižovatky a jede k ní rychlostí $v_2 = 80\,\mathrm{km/h}$. Za jak dlouho budou obě auta k sobě nejblíže a jak velká bude jejich vzdálenost?

[**1.** bod P umístit $6\,\mathrm{km}$ východně od A, 49 milionů Kč **2.** Návod. Osvětlení je dáno vztahem $E = d^{-2} I \cos\alpha$, kde I je fyzikální konstanta charakterizující danou lampu, d je její vzdálenost od okrajů silnice a α je odchylka příslušného paprsku od směru kolmého k silnici, takže $\cos\alpha = \frac{x}{d}$; $x = \frac{1}{4} b\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ **3.** $h = d$ **4.** Návod. Výkon je dán vztahem $P = RI^2 = R\left(\frac{U}{R+R_\mathrm{i}}\right)^2$; $R = R_\mathrm{i}$, $P_\mathrm{max} = \frac{U^2}{4R_\mathrm{i}}$. **5.** $t = 2{,}4\,\mathrm{min}$, $d = 3\,\mathrm{km}$]

Cvičení 216

1 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int (3x^2 + 2x - 4)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (ax + b)\,\mathrm{d}x$

2 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x}+1}{x}\,\mathrm{d}x$

3 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int (2\sin x - 3\cos x)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

4 Vypočtěte integrály s kladným parametrem a:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x a^x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{a^x}\,\mathrm{d}x$

5 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^2\,x\,\mathrm{d}x$

1. a) x^3+x^2-4x+C; b) $\frac{1}{2}ax^2+bx+C$ **2.** a) $\frac{2\sqrt{x^5}}{5}-2\sqrt{x}+C$; b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\ln|x|+C$
3. a) $C-2\cos x-3\sin x$; b) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$ **4.** a) $\frac{\mathrm{e}^x a^x}{1+\ln a}+C$; b) $\frac{\mathrm{e}^x}{a^x(1-\ln a)}+C$
5. a) $\mathrm{tg}\,x-x+C$; b) $C-\mathrm{cotg}\,x-x$

Cvičení 217

1 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

2 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{3x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

3 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

4 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^5\,\mathrm{d}x$

5 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

[**1.** a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; b) $\frac{1}{2}\ln|x^2-3|+C$ **2.** a) $C-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$; b) $C-\frac{3}{4(1+x^2)^2}$ **3.** a) $\ln|\ln x|+C$; b) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$ **4.** a) $C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$; b) $\frac{1}{18}(x^3+1)^6+C$ **5.** a) $\sqrt{1+x^2}+C$; b) $C-2\sqrt{1-x^2}$]

Cvičení 218

1 Vypočtěte integrál s parametry $n\in\mathsf{N}$, $a\in\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathsf{R}$:

$$\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x.$$

2 Vypočtěte integrál s parametry $n\in\mathsf{N}$, $a\in\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathsf{R}$:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x.$$

3 Vypočtěte integrál s parametry $a \in \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathsf{R}$:
$$\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x.$$

4 Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x.$

5 Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{4+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

[**1.** $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ **2.** $C - \frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$ **3.** $\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C$ **4.** $C - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$ **5.** $\ln(4+\mathrm{e}^x) + C$]

Cvičení 219

1 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

2 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

3 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

4 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

5 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

[**1.** a) $C - \ln|\cos x|$; b) $\ln|\sin x| + C$ **2.** a) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$; b) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$ **3.** a) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$; b) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$ **4.** a) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$; b) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ **5.** a) $C - \sin x - \frac{1}{\sin x}$; b) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$]

Cvičení 220

1 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$, kde $a \in \mathsf{R}$, $a \neq 0$.

2 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 9}$.

3 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 + 2}$.

4 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2}$.

5 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2 + 1}$.

[**1.** $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ **2.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$ **3.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C$ **4.** $\operatorname{arctg}(x+1) + C$ **5.** $x - \operatorname{arctg} x + C$]

Cvičení 221

1 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

2 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$.

3 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{5x-12}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

4 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$.

5 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1}$.

[**1.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ **2.** $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ **3.** $2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$ **4.** Návod. Uvažte rozklad $\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$; $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **5.** Návod. Uvažte rozklad $\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$; $\ln|x+1|+\operatorname{arctg} x+C$.]

Cvičení 222

1 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

2 Vypočtěte integrál: $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$.

3 Vypočtěte integrál: $\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

4 Vypočtěte integrál: $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

5 Vypočtěte integrál: $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

[**1.** $x\ln x - x + C$ **2.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C$ **3.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ **4.** $x^2\sin x +$ $+ 2x\cos x - 2\sin x + C$ **5.** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,\ x \in (-1;1)$]

Cvičení 223

1 Vypočtěte určité integrály:

a) $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x$

2 Vypočtěte určité integrály:

a) $\displaystyle\int_1^4 (6x-11)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x$

3 Vypočtěte určité integrály:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$

4 Určete všechna čísla $b > 1$, pro která platí:

$$\int_1^b (b - 4x)\,\mathrm{d}x \geqq 6 - 5b.$$

5 V R řešte nerovnici

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,\mathrm{d}x \leqq a.$$

[**1.** a) $c(b-a)$; b) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ **2.** a) 12; b) $-\frac{1}{6}$ **3.** a) 1; b) 2 **4.** $b = 2$
5. $a \in (-\infty; 0\rangle \cup \{1\}$]

Cvičení 224

1 Vypočtěte určitý integrál: $\displaystyle\int_2^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

2 Vypočtěte určitý integrál: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

3 Vypočtěte určité integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

4 Vypočtěte určitý integrál: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

5 Vypočtěte určitý integrál: $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

[**1.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **2.** $\frac{1}{3}$ **3.** a) $\frac{1}{4}\pi$; b) $\frac{1}{2}\pi$ **4.** $\frac{1}{4}\pi$ **5.** 1]

Cvičení 225

1 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami, které mají rovnice $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

2 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami, které mají rovnice $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

3 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami, které mají rovnice $4y = x^2$, $y^2 = 4x$.

4 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami, které mají rovnice $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

5 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami, které mají rovnice $y = \ln x$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$.

[**1.** $S = 36$ **2.** $S = \frac{35}{2} - 6\ln 6$ **3.** $S = \frac{16}{3}$ **4.** $S = 2$ **5.** $S = 1$]

Cvičení 226

1 Užitím integrálního počtu odvoďte vzorec $S = \pi r^2$ pro obsah S kruhu o poloměru r.

2 Vyjádřete obsah S rovinného útvaru omezeného elipsou s rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami s rovnicemi $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 1$.

4 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami s rovnicemi $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = \ln 2$.

5 Vypočtěte obsah S rovinného útvaru omezeného parabolou s rovnicí $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $A[1; 3]$, $B[4; 0]$.

[**1.** integrujte funkci $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $x \in \langle -r; r \rangle$ **2.** $S = \pi ab$ **3.** $S = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})$ **4.** $S = \frac{1}{2}$ **5.** $S = \frac{9}{4}$]

Cvičení 227

1 Pomocí vzorce $V(T) = \pi \displaystyle\int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x$ ověřte platnost vzorce pro výpočet objemu válce s poloměrem postavy r a výškou v.

2 Vypočtěte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného útvaru omezeného grafem funkce $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ a přímkami o rovnicích $y = -x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x.

3 Vypočtěte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného útvaru omezeného grafem funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ a přímkami o rovnicích $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ kolem osy x.

4 Vypočtěte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného útvaru omezeného grafem funkce $f\colon y = x^3$ a přímkami o rovnicích $y = 1$, $x = 2$ kolem osy x.

5 Vypočtěte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného útvaru omezeného grafem funkce $f\colon y = \sin x$ a přímkami o rovnicích $y = 0$, $x = \pi$ kolem osy x.

[**1.** uvažte konstantní funkci $y = r$ pro $x \in \langle 0; v\rangle$, $a = 0$, $b = v$; $V = \pi r^2 v$ **2.** $V = \frac{224}{15}\pi$ **3.** $V = \frac{2}{3}\pi$ **4.** $V = \frac{120}{7}\pi$ **5.** $V = \frac{1}{2}\pi^2$]

Cvičení 228

1 Vyjádřete objem V koule o poloměru r.

2 Vyjádřete objem V rotačního elipsoidu.

3 Vypočtěte objem V rotačního kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.

4 Vypočtěte objem V rotačního komolého kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou v.

5 Vypočtěte objem V rotačního tělesa, jež vznikne rotací hyperboly o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kolem osy x v intervalu $\langle a; k\rangle$, $k > a$.

[**1.** využijte rotaci grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ **2.** $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$, $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ **3.** využijte rotace grafu funkce $y = \frac{r}{v}x$ kolem osy x; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ **4.** využijte rotaci grafu funkce $y = \frac{r_1 - r_2}{v}x + r_2$ kolem osy x; $V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ **5.** $V = \frac{\pi b^2}{3a^2}(k-a)^2(k+2a)$]

Cvičení 229

Poznámka. Obsah S rotační plochy, která vznikne rotací grafu spojité a nezáporné funkce f, jež má spojitou první derivaci, kolem osy x v intervalu $\langle a; b\rangle$, se vypočte podle vzorce

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

1 Vypočtěte obsah S kulové plochy o poloměru r.

2 Nevertikální úsečka délky 1 se středem v bodě $S[0; 1]$ rotuje kolem osy x. Ukažte, že obsah S vzniklé rotační plochy je $S = 2\pi$ bez ohledu na směrnici úsečky.

3 Určete obsah S plochy vytvořené otáčením oblouku křivky dané rovnicí $y^2 = 4 + x$ omezeného přímkou o rovnici $x = 2$ kolem osy x.

4 Určete obsah S pláště rotačního kužele výšky v a s poloměrem podstavy r.

5 Vypočtěte délku s kružnice o poloměru r.

[**1.** uvažujte funkci $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; $S = 4\pi r^2$ **3.** $S = \frac{62}{3}\pi$ **4.** uvažujte funkci $y = \frac{r}{v}x$, $S = \pi rs$, $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ **5.** Návod: Délka oblouku rovinné křivky dané rovnicí $y = f(x)$, kde $x \in \langle a; b\rangle$, se vypočte podle vzorce $s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$; uvažujte funkci $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.]

Cvičení 230

Pohybuje-li se hmotný bod po přímce a velikost síly závisí na souřadnici x podle vztahu $F = f(x)$, pak pro výpočet práce vykonané na dráze $\langle a; b\rangle$ platí vztah $W = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1 Jaká práce W se vykoná při natažení pružiny o malou délku b z jejího klidového stavu ve směru osy pružiny?

2 Jakou práci W je třeba vykonat, aby těleso hmotnosti m bylo dopraveno do výše h nad povrch Země, jejíž poloměr je R a hmotnost je M?

3 Homogenní válec o hustotě ϱ, podstavě o poloměru r a výšce h je ponořen svisle do kapaliny hustoty ϱ_k, $\varrho_k < \varrho$, tak, že jeho horní podstava splývá s hladinou kapaliny. Vypočítejte práci W potřebnou ke zvednutí válce do polohy, v níž jeho dolní podstava bude právě na hladině kapaliny.

Poznámka. Je-li velikost v rychlosti pohybujícího se hmotného bodu funkcí času t, tedy $v = f(t)$, pak jeho dráhu s v době od t_1 do t_2 vypočítáme podle vztahu $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4 Určete dráhu tělesa, jestliže pro jeho rychlost platí $v(t) = \frac{1}{3}t^2$ a v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ je dráha nulová.

5 Určete závislost dráhy s tělesa na čase t, platí-li pro jeho rychlost v libovolném čase $t \geqq 0$ rovnice $v(t) = at$, kde $a > 0$ je konstanta, a urazilo-li do času $t = 0$ těleso dráhu s_0.

1. Návod. Pro dostatečně malá napnutí platí Hookeův zákon, podle nějž velikost F síly, kterou pružinu napínáme ve směru osy x, je přímo úměrná výchylce x koncového bodu pružiny, tedy $F(x) = kx$, kde k je konstanta závislá na dané pružině. $W = \frac{1}{2}kb^2$ **2.** Návod. Velikost síly je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti $R + x$ daných těles podle vztahu $F(x) = \kappa\frac{mM}{(R+x)^2}$, kde κ je gravitační konstanta. $W = \kappa\frac{mMh}{R(R+h)}$ **3.** Návod. Pro velikost síly F, kterou držíme válec ve výšce x horní podstavy nad hladinou, platí $F(x) = \pi r^2 hg\varrho - \pi r^2 g\varrho_k x = \pi r^2 g(\varrho h - \varrho_k x)$, kde konstanta g je tíhové zrychlení. $W = \pi r^2 gh^2(\varrho - \frac{1}{2}\varrho_k)$ **4.** $s = \frac{1}{9}t^3$ **5.** $s = \frac{1}{2}at^2 + s_0$, $t \geqq 0$

Opakování pro maturanty

Cvičení 231

1 Výrok $p \Rightarrow q$ zapište pouze pomocí:

a) negace a disjunkce,

b) negace a konjunkce.

2 Je dána věta: Jestliže n je prvočíslo, potom $n - 1$ není prvočíslo. Vyslovte:

a) větu obrácenou,

b) větu obměněnou,

c) negaci dané věty.

3 Symetrická diference (symetrický rozdíl) dvou množin A, B je množina $\mathsf{A} \Delta \mathsf{B} = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \setminus (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B platí:

a) $\mathsf{A} \Delta (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathsf{A} \setminus \mathsf{B}$,

b) $(\mathsf{A} \Delta \mathsf{B}) \Delta (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

4 Zjednodušte zápis množiny M:

$$\mathsf{M} = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}') \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}') \cup [(\mathsf{B} \cup \mathsf{C})' \cap \mathsf{A}].$$

5 Jsou dány množiny $\mathsf{F} = \{1; 2\}$, $\mathsf{G} = \{a; b\}$. Určete

a) počet všech relací mezi množinami F a G,

b) počet všech zobrazení množiny F do množiny G,

c) počet všech prostých zobrazení mezi množinami F a G.

[**1.** a) $p' \vee q$; b) $(p \wedge q')'$ **2.** a) Jestliže $n - 1$ není prvočíslo, potom n je prvočíslo. b) Jestliže $n - 1$ je prvočíslo, potom n není prvočíslo. c) n je prvočíslo a současně $n - 1$ je prvočíslo. **4.** $\mathsf{M} = (\mathsf{A} \setminus \mathsf{C}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$ **5.** a) 16; b) 4; c) 2]

Cvičení 232

1 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = \sqrt{2^n} \cos \frac{1}{4} n\pi,$

b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots = \sqrt{2^n} \sin \frac{1}{4} n\pi.$

2 V N řešte rovnici $K'(3, x) + K(3, x) = 6x$.

Poznámka. Symbol $K(a, b)$ značí počet kombinací bez opakování a symbol $K'(a, b)$ značí počet kombinací s opakováním.

3 Kolik existuje navzájem různých kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla z intervalu $\langle 1; 15 \rangle$?

4 Pravděpodobnost jevu A je dané číslo $p \in (0; 1)$. Daný pokus opakujeme n-krát. Jak velké musí být n, aby jev A nastal aspoň jednou s pravděpodobností větší než 0,5?

5 Přední pneumatika motocyklu se opotřebuje po 20 000 km a zadní po 30 000 km jízdy. Kolik km lze na dvou nově zakoupených pneumatikách najet, jestliže je ve vhodném okamžiku navzájem vyměníme?

[**2.** $x = 4$ **3.** 680 **4.** $n > \frac{\log 0{,}5}{\log(1-p)}$ **5.** 24 000 km]

Cvičení 233

1 Vyjádřete v procentech změnu obsahu obdélníku o stranách délek a, b, jestliže délka strany a byla zkrácena o 25 % a délka strany b byla prodloužena o 25 %.

2 Určete všechny pětice po sobě jdoucích přirozených čísel, pro něž platí, že součet druhých mocnin prvních tří čísel se rovná součtu druhých mocnin zbývajících dvou čísel.

3 Je-li $n \in \mathsf{N}$ číslo liché, potom zlomek $\dfrac{3^n+1}{7^n+1}$ lze krátit čtyřmi. Dokažte.

4 Číslo $a = 5xy49z$ je dělitelné číslem 396. Určete číslice x, y, z.

5 Určete všechny dvojice $[x;y]$ přirozených čísel, pro něž platí:

a) $x - y = 48 \wedge \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 18$,

b) $\dfrac{1}{p+x} + \dfrac{1}{p+y} = \dfrac{1}{p}$, p je dané prvočíslo.

1. Zmenšení obsahu o 6,25 %. **2.** $[10;11;12;13;14]$ **3.** Návod. Je-li n číslo liché, pak platí $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. **4.** $[x;y;z] = [2;5;2]$, $a = 525\,492$, $[x;y;z] = [8;4;6]$, $a = 584\,496$ **5.** Návod. Využijte rovnost $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$. a) $[49;1]$; b) $[p;p]$, $[p^2;1]$, $[1;p^2]$

Cvičení 234

1 Určete reálná čísla a, b, c, pro která platí:

a) $\forall x \in \mathsf{R},\ x \neq -1\colon \dfrac{x-1}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$,

b) $\forall x \in \mathsf{R},\ x \neq 1\colon \dfrac{3}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.

2 Určete základ z číselné soustavy, ve které platí $26_z \cdot 35_z = 888_z$.

3 Usměrněte výraz

$$V(x,y) = \frac{x+y}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$$

a výsledek ověřte pro hodnoty $x = 1$, $y = 8$, tj. dosaďte do původního výrazu i do upraveného výrazu.

4 Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n = 1.$$

5 Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $V(x,y) = x^3 + y^3$, je-li dáno:
a) $x + y = 1$,
b) $x + y = a$.

[**1.** a) $a = 1$, $b = -2$; b) $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$ **2.** $z = 11$ **3.** $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$; $V(1,8) = 3$ **4.** $n = 12k$, $k \in \mathsf{N}$ **5.** a) $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; b) $V(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^3$]

Cvičení 235

1 Vyjádřete délku úsečky, která je průnikem pravoúhlého trojúhelníku a osy jeho pravého úhlu, pomocí délek odvěsen a, b.

2 V rovnoběžníku $ABCD$ jsou body M, N po řadě středy stran BC a CD. Úsečka AM protíná úhlopříčku BD v bodě P a úsečka AN protíná úhlopříčku BD v bodě Q. Dokažte, že platí $|BP| = |PQ| = |QD|$.

3 V lichoběžníku $ABCD$, $AB \parallel CD$, $|AB| = a$, $|CD| = b$, $a > b$, vyjádřete délku příčky vedené průsečíkem úhlopříček a rovnoběžné s AB.

4 Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dán součet $u + a$ délek úhlopříčky a strany čtverce.

5 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana AB má délku a. Okolo jeho vrcholů A, B, C jsou opsány kružnice k_1, k_2, k_3, které mají vnější dotyk. Vypočtěte obsah útvaru ležícího uvnitř trojúhelníku vně těchto kružnic.

[**1.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ **2.** Návod. Uvažujte o těžištích trojúhelníků ABC a ADC. **3.** $x = \frac{2ab}{a+b}$
5. $\frac{1}{8}a^2(2\sqrt{3} - \pi)$]

Cvičení 236

1 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ výšky v.

a) Zobrazte řez jehlanu rovinou PQR, kde Q je střed hrany DV, $P \in \mapsto DA$, $|PD| : |DA| = 5 : 2$, $R \in \mapsto DC$, $|RD| : |CD| = 5 : 2$.

b) V jaké vzdálenosti x od vrcholu V je třeba rozříznout jehlan $ABCDV$ rovinou rovnoběžnou s podstavou, aby se odřízl jehlan, jehož objem je $\frac{1}{3}$ objemu jehlanu $ABCDV$?

2 Je dán čtyřstěn $ABCD$, bod T je těžiště stěny ABC. Uvnitř úsečky TD zvolte bod L a na polopřímce AB za bodem B zvolte bod M. Zobrazte průsečíky přímky LM s hranicí (povrchem) čtyřstěnu.

3 Vypočtěte objem V a povrch S kvádru, jsou-li čísla udávající v cm délky jeho hran kořeny rovnice

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0.$$

4 Rotační kužel má povrch S, jeho strana má od roviny podstavy odchylku α. Vypočtěte poloměr r podstavy tohoto kužele.

5 Dřevěná koule plove ve vodě tak, že je ponořena do tří pětin svého průměru. Vypočtěte hustotu ϱ dřeva.

[**1.** b) $x = v\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ **3.** $V = 60\,\mathrm{cm}^3$; $S = 94\,\mathrm{cm}^2$ **4.** $r = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}}$ **5.** $\varrho \doteq$ $\doteq 0{,}648\,\mathrm{g/cm}^3$]

Cvičení 237

1 Určete obraz bodu $B[3;-3;8]$ v rovinové souměrnosti určené rovinou o rovnici $x - y - 2 = 0$.

2 Vypočtěte odchylku φ hrany AD od stěny ABC čtyřstěnu $ABCD$, kde $A[2;-1;1]$, $B[4;1;-9]$, $C[3;-2;4]$, $D[14;11;-5]$.

3 Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 6 cm. Užitím analytické geometrie určete vzdálenost bodu D od roviny BEG a vzdálenost rovin ACH, BEG.

4 Na mapě jsou zobrazeny dvě obce A, B a přímá železniční trať. Ve zvolené soustavě souřadnic je poloha obcí A, B určena v uvedeném pořadí souřadnicemi $[-1;4]$, $[5;8]$ a poloha železniční trati je určena rovnicí $x - 2y + 6 = 0$. Na železniční trati se má v místě X vybudovat nádraží. Určete polohu místa X tak, aby délka silnice budované z A do B a vedoucí přes X byla nejkratší. Vypočítejte také délku d této nejkratší silnice za předpokladu, že souřadnice bodů jsou uvedeny v kilometrech.

5 Ve zvolené soustavě souřadnic byla zjištěna poloha letadla nejprve v místě $A[5; 1; 1]$ a pak za 5 minut v místě $B[0; -4; 1]$. Jednotce délky v soustavě souřadnic odpovídá ve skutečnosti vzdálenost 10 km. Letadlo letí rovnoměrným přímočarým pohybem a je sledováno z řídicí věže, která je v počátku soustavy souřadnic. Vypočítejte rychlost v letadla v km/h a určete souřadnice místa X, ve kterém byla vzdálenost d letadla od řídicí věže nejmenší, a vypočtěte ji.

[**1.** $B'[-1; 1; 8]$ **2.** $\varphi = 45°$ **3.** $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$ **4.** $X[2; 4]$; $d = 8\,\text{km}$ **5.** $v \doteq 849\,\text{km/h}$; $X[2; -2; 1]$; $d = 30\,\text{km}$]

Cvičení 238

1 Dokažte, že rovnice $x^2 - y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ je analytickým vyjádřením hyperboly. Napište rovnici její tečny v bodě $T[8; 5]$ a vypočtěte obsah S trojúhelníku, který je určen touto tečnou a asymptotami hyperboly.

2 V soustavě souřadnic v rovině jsou dány body $A[1; 0]$, $B[-1; 0]$. Dokažte, že množinou všech bodů X, které mají od bodů A, B daný poměr vzdáleností $|AX| : |BX| = \lambda$, kde $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, je kružnice se středem na přímce AB (tzv. Apolloniova kružnice). Určete její střed S a poloměr r.

3 Úsečka pevné délky d se pohybuje tak, že její krajní body P, Q probíhají dvě navzájem kolmé přímky p, q. Určete množinu všech bodů, které přitom probíhá daný vnitřní bod R úsečky PQ.

4 Parabole o rovnici $y^2 = 4ax$, $a > 0$, je vepsán rovnostranný trojúhelník tak, že jeho vrchol A splývá s vrcholem paraboly a strana BC je kolmá k ose x. Určete:

a) souřadnice vrcholů tohoto trojúhelníku,

b) délku strany a obsah trojúhelníku.

5 Určete obecnou rovnici přímky, na níž leží tětiva hyperboly o rovnici $x^2 - y^2 = 1$, která je půlena bodem $A[-2; 1]$.

1. hyperbola: $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$; tečna: $5x - 4y - 20 = 0$; $S = 9$ **2.** $S[\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}; 0]$, $r = \frac{2\lambda}{|1-\lambda^2|}$ **3.** Návod. Označte $a = |RQ|, b = |RP|$ a zvolte soustavu souřadnic tak, aby přímky p, q splývaly po řadě s osami x, y. Hledanou množinou je pak elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, která má pro $a > b$ hlavní osu v ose x a pro $a < b$ hlavní osu v ose y; je-li $a = b$, je hledanou množinou kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. **4.** a) $A[0; 0]$, $B[12a; 4a\sqrt{3}]$, $C[12a; -4a\sqrt{3}]$; b) $|AB| = 8a\sqrt{3}$, $S = 48a^2\sqrt{3}$ **5.** $2x + y + 3 = 0$

Cvičení 239

1 Je dán polynom $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24$.

a) Rozložte polynom $P(x)$ na součin kořenových činitelů.

b) Určete kořeny rovnice $P(x) = 0$.

c) Na základě rozkladu $P(x)$ načrtněte graf funkce $f\colon y = P(x)$.

d) Načrtněte graf funkce $g\colon y = |P(x)|$.

e) V R řešte graficky rovnici $|P(x)| = b$ s parametrem $b \in$ R.

2 Je dána funkce $f\colon y = (x-1)^3 + 2$.

a) Najděte funkci f^{-1} inverzní k funkci f.

b) Do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí f, f^{-1}.

c) V R řešte početně i graficky rovnici $f(x) = x + 1$.

3 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

a) Najděte funkci f^{-1} inverzní k funkci f.

b) Do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí f, f^{-1}.

c) Funkci f vyjádřete ve tvaru $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

d) V R řešte graficky rovnici $|f(x)| = b$ s parametrem $b \in \mathsf{R}$.

4 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 24}$.

a) Určete $\mathsf{D}(f)$ a napište rovnice asymptot grafu funkce f.

b) Načrtněte graf funkce f a určete $\mathsf{H}(f)$.

5 Je dána funkce $f\colon y = \big|3 - |x-1|\big|$.

a) Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a sestrojte graf funkce f.

b) V R graficky řešte rovnici $f(x) = b$ s parametrem $b \in \mathsf{R}$.

[**1.** a) $P(x) = (x-2)^2(x+2)(x-3)$; b) $-2, 2, 3$ **2.** a) $f^{-1}\colon y = \sqrt[3]{x-2}+1$; c) $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ **3.** a) $f^{-1}\colon y = \frac{x+3}{x-2}$; b) $f\colon y = \frac{5}{x-1} + 2$ **4.** a) $\mathsf{D}(f) = R \setminus \{4; 6\}$, asymptoty: $x = 4$, $x = 6$, $y = 0$; b) $\mathsf{H}(f) = (-\infty; -1\rangle \cup (0; +\infty)$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+$]

Cvičení 240

1 Je dána funkce $f\colon y = a \cdot 2^x + b$ s parametry $a, b \in \mathsf{R}$.

a) Určete a, b tak, aby graf funkce f procházel body $A[0; 0]$, $B[1; 1]$.
V dalších úkolech už počítejte s hodnotami a, b určenými v a).

b) Najděte funkci f^{-1} inverzní k funkci f.

c) Do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí f, f^{-1}.

d) V R řešte graficky nerovnici $|f(x)| \leqq |x| + c$ s parametrem $c \in \mathsf{R}$.

e) Načrtněte graf funkce $\left|2^{|x|} - 3\right|$.

2 V R^2 řešte soustavu rovnic

$$\log(x+y) + \log(x-y) = 2,$$
$$\log x + \log y = 4\log 2 + \log 39.$$

3 Dokažte následující věty o logaritmech:

a) $\forall a \in \mathsf{R}^+\colon\ \ln a = \log a \cdot \ln 10$

b) $\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}$

4 V soustavě souřadnic v rovině graficky znázorněte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y splňují nerovnici

$$\log_y(\log_x y) \leqq 0.$$

5 V R řešte nerovnici

$$\log_x \sqrt{x+12} < 1.$$

[**1.** a) $a = 1$, $b = -1$; b) $y = \log_2(x+1)$ **2.** $[26; 24]$ **3.** Návod k b). Ekvivalentními úpravami upravte na nerovnost $\pi^3 < 2^5$. **5.** $(0;1) \cup (4;+\infty)$]

Příprava
k maturitní zkoušce
z matematiky

1 Základy matematické logiky

1 Dokažte, že číslo $\log 2$ je iracionální.

2 Dokažte, že výrok

a) $(p \Rightarrow q')' \Rightarrow (q' \wedge p)'$ je tautologie,

b) $[(p \vee q)' \Rightarrow (p \wedge q)']'$ je kontradikce.

3 Dokažte, že dané výroky jsou tautologie:

a) $(a \wedge b)' \Leftrightarrow (a' \vee b')$

b) $(a \vee b)' \Leftrightarrow (a' \wedge b')$

c) $(a \Rightarrow b)' \Leftrightarrow (a \wedge b')$

d) $(a \Leftrightarrow b)' \Leftrightarrow (a \wedge b') \vee (b \wedge a')$

4 Vysvětlete princip důkazu sporem výroku $p \Rightarrow q$ a dokažte sporem větu: $\forall n \in \mathsf{N}\colon 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$.

5 Vysvětlete princip přímého důkazu výroku $p \Rightarrow q$ a proveďte přímý důkaz věty:
Jestliže čísla $(b+c)^{-1}$, $(c+a)^{-1}$, $(a+b)^{-1}$ jsou po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pak i čísla a^2, b^2, c^2 jsou po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

6 Vysvětlete princip přímého důkazu výroku p a proveďte přímý důkaz věty: $\forall a, b \in (1; +\infty)\colon\ \log_a b + \log_b a \geqq 2$.

7 Vysvětlete princip důkazu sporem výroku p a dokažte sporem větu: $\forall x \in \mathsf{R}^+\colon x + \dfrac{1}{x} \geqq 2$.

8 Vysvětlete princip důkazu věty $\forall n \in \mathsf{N}\colon V(n)$ matematickou indukcí a dokažte větu: $\forall n \in \mathsf{N}\colon 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

9 Jsou dány výroky:

a) p: $\forall a, b \in \mathsf{R}\colon a \leqq b \Rightarrow a^2 \leqq b^2$,

b) q: $\forall a, b \in \mathsf{R}\colon 0 \leqq a \leqq b \Rightarrow a^2 \leqq b^2$.

Zapište negace výroků p, q a rozhodněte, které z výroků p, q, $\neg p$, $\neg q$ jsou pravdivé.

10 Zapište negace následujících výroků:
a) Daná rovnice má nejvýš 2 kořeny.
b) Daná rovnice má aspoň 2 kořeny.
c) Daná rovnice má právě 2 kořeny.
d) Daná rovnice nemá žádný kořen.

[**9.** a) $\neg p$: $\exists a, b \in \mathsf{R}\colon a \leqq b \wedge a^2 > b^2$; b) $\neg q$: $\exists a, b \in \mathsf{R}\colon 0 \leqq a \leqq b \wedge a^2 > b^2$; pravdivé jsou $\neg p$, q **10.** a) Daná rovnice má aspoň 3 kořeny. b) Daná rovnice má nejvýš 1 kořen. c) Daná rovnice má nejvýš 1 nebo aspoň 3 kořeny. d) Daná rovnice má aspoň 1 kořen.]

2 Základy teorie množin

1 Graficky znázorněte množiny $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, je-li
$\mathsf{A} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2;\, x^2 \leqq 2y\}$, $\mathsf{B} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2;\, x^2 + y - 2x \leqq 1\}$.

2 Graficky znázorněte množinu $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$, je-li
$\mathsf{A} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2;\, 4x^2 + 9y^2 \leqq 36\}$, $\mathsf{B} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2;\, x + y \geqq 1\}$,
$\mathsf{C} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2;\, y < \sqrt{x}\}$.

3 Rozhodněte, které z následujících relací jsou zobrazení:
$f\colon x^2 + y^2 = 1$, $\quad g\colon x^2 - 2x + y + 1 = 0$,
$h\colon y + \sqrt{x} = 0$, $\quad i\colon |y| = x$.

Poznámka. V úloze máme na mysli zobrazení, u kterých jako obvykle x značí vzor a y obraz (a ne naopak).

4 Jsou dány intervaly $\mathsf{A} = \langle a; b\rangle$, $\mathsf{B} = (a; b)$. Určete množiny:
a) $\mathsf{P} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ b) $\mathsf{Q} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ c) $\mathsf{U} = \mathsf{A} \setminus \mathsf{B}$ d) $\mathsf{V} = \mathsf{A}'_{\mathsf{R}} \cup \mathsf{B}'_{\mathsf{R}}$

5 Jsou dány množiny A, B, pro které je $|\mathsf{A}| = a$, $|\mathsf{B}| = b$. Určete:
a) $|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}|$ b) $|\mathsf{A} \times \mathsf{B}|$ c) $|\mathsf{P}(\mathsf{A})|$ d) $|\mathsf{P}(\mathsf{A} \times \mathsf{B})|$

Poznámka. Zápis $|\mathsf{X}|$ značí počet prvků množiny X, zápis $\mathsf{P}(\mathsf{X})$ značí potenční množinu množiny X.

6 Zapište všechny podmnožiny množiny $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\}$. Jak souvisí řešení této úlohy s polynomem $P(x) = (1 + x)^3$? Proveďte zobecnění pro případ, že množina A má n prvků.

7 Pomocí Vennových diagramů ověřte, že pro každé tři množiny platí:
a) $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$, b) $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$.

8 Zjistěte, zda pro libovolné množiny A, B, C, D platí $(\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}) \cap (\mathsf{C} \setminus \mathsf{D}) = \emptyset$.

9 Určete a graficky znázorněte definiční obor D a obor pravdivosti P následujících výrokových forem:
a) $A(x, y)\colon \sqrt{x - y} < \sqrt{x + y - 2}$,
b) $B(x, y)\colon \log x^2 \geqq \log(1 - y^2)$.

10 Jsou dány relace: $\mathsf{A}(x, y)\colon |x| + |y| \leqq 4$, $\mathsf{B}(x, y)\colon x^2 + y^2 \geqq 1$. Sestrojte graf relace $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

3. zobrazení jsou g, h **4.** a) $\mathsf{P} = \mathsf{B}$; b) $\mathsf{Q} = \mathsf{A}$; c) $\mathsf{U} = \{a, b\}$; d) $\mathsf{V} = (-\infty; a\rangle \cup \langle b; +\infty)$ **5.** a) $\max(a, b) \leqq |\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| \leqq a + b$; b) ab; c) 2^a; d) 2^{ab} **6.** $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ **8.** platí **9.** a) $\mathsf{D} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2; 2 - x \leqq y \leqq x\}$, $P = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2; 1 < y \leqq x\}$; b) $\mathsf{D} = \{[x; y] \in \mathsf{R}^2; x \neq 0 \vee |y| < 1\}$, $\mathsf{P} = \mathsf{D} \cap \{[x; y] \in \mathsf{R}^2; x^2 + y^2 \geqq 1\}$

3 Kombinatorika

1 V N řešte:
a) $3\binom{2x}{x+1} = 2\binom{2x+1}{x-1}$, b) $\binom{n}{2} + \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+6}{2} < 93$.

2 Dokažte následující věty:

a) $\forall n \in \mathsf{N}\colon \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \ldots + \dbinom{n}{n} = 2^n.$

b) $\forall k, n \in \mathsf{N}, k < n : \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}.$

3 Kolik racionálních sčítanců má binomický rozvoj $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{100}$?

4 Který člen binomického rozvoje $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^6$ neobsahuje x?

5 Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky p a q. Na přímce p je dáno m různých bodů a na přímce q je dáno n různých bodů. Vypočtěte, kolik existuje trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

6 Kolika způsoby si mohou 3 osoby rozdělit bez krájení

a) 5 stejných jablek,

b) 5 stejných jablek a 3 stejné hrušky?

7 Na lavici v tělocvičně se má posadit 6 chlapců, mezi nimiž jsou 2 bratři. Kolika způsoby lze chlapce na lavici posadit, mají-li bratři sedět vedle sebe?

8 Na nádraží stojí 1 jídelní vůz, 3 stejné lůžkové vozy a 7 stejných obyčejných vozů. Vypočtěte, kolika způsoby lze těchto 11 vozů seřadit do vozové soupravy. Kolik takových souprav má jídelní vůz uprostřed?

9 Kolik existuje lichých přirozených čísel, v jejichž zápisu se vyskytují pouze číslice 1, 2, 3, 4, a to každá nejvýš jednou?

10 Kolik existuje k-ciferných čísel v číselné soustavě o základu z?

[**1.** a) 4; b) 2, 3, 4 **3.** 26 **4.** 5. člen **5.** $\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}$ neboli $\binom{m}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{m}{2}$
6. a) 21; b) 210 **7.** 240 **8.** 1 320; 120 **9.** 32 **10.** $(z-1)z^{k-1}$]

4 Základy pravděpodobnosti a statistiky

1 Házíme 3 mincemi. Určete množinu Ω všech možných výsledků a množiny A, B, které vyjadřují jevy:
A — Aspoň na dvou mincích padl rub.
B — Právě na dvou mincích padl rub.

2 Náhodně vybraný výrobek může být první, druhé nebo třetí jakosti. Označme jevy: A — vybraný výrobek je první jakosti, B — vybraný výrobek je druhé jakosti, C — vybraný výrobek je třetí jakosti. Interpretujte jevy:

a) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ b) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})'$ c) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$

3 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet:

a) právě 11, b) aspoň 11,
c) nejvýš 11, d) nejvýš 12?

4 Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme všechna trojciferná přirozená čísla, v jejichž dekadickém zápisu se každá z těchto číslic vyskytuje nejvýše jednou. Určete pravděpodobnost, že z nich namátkou vybrané číslo je

a) dělitelné čtyřmi, b) dělitelné třemi,
c) dělitelné třemi a zároveň čtyřmi, d) dělitelné třemi nebo čtyřmi.

5 Každý ze dvou hráčů A, B hodí dvěma stejnými mincemi. Padne-li hráči A více lvů než hráči B, vyhraje hráč A. Jinak vyhraje hráč B. Vypočtěte pravděpodobnost výhry hráče A.

6 V písemné práci je 10 otázek a u každé z nich se má vybrat jedna ze 3 variant odpovědí, z nichž je právě jedna správná. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň 8 odpovědí bude vybráno správně, vybíráme-li je náhodně?

7 Jsou-li A, B nezávislé jevy, pak jsou také nezávislé jevy

a) $\mathsf{A}, \neg\mathsf{B}$, b) $\neg\mathsf{A}, \neg\mathsf{B}$.

Dokažte.

8 Nechť $A(a,b,c)$, $G(a,b,c)$, $H(a,b,c)$ značí po řadě aritmetický, geometrický a harmonický průměr kladných reálných čísel a, b, c.

a) Vypočtěte $A(4,5,6)$, $G(4,5,6)$, $H(4,5,6)$.

b) Dokažte, že pro každá kladná reálná čísla a, b, c platí: $H(a,b,c) \leqq \leqq A(a,b,c)$.

9 Určete aritmetický průměr, modus, medián a směrodatnou odchylku délky x, jsou-li naměřené hodnoty délek x_i a jejich četnosti n_i dány tabulkou:

x_i	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
n_i	4	7	7	13	10	5	4

Sestrojte sloupkový diagram (histogram) a polygon četností pozorovaného znaku.

Poznámka. K výpočtu požadovaných údajů, zejména směrodatné odchylky, použijte vhodný kalkulátor.

10 Ověřte, že pro rozptyl s_x^2 a aritmetický průměr $\overline{x}$ znaku x s n hodnotami x_i platí:

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2.$$

1. $\Omega = \{[R,R,R],[R,R,L],[R,L,R],[L,R,R],[L,L,R],[L,R,L],[R,L,L],[L,L,L]\}$; $\mathsf{A} = \{[R,R,L],[R,L,R],[L,R,R],[R,R,R]\}$; $\mathsf{B} = \{[R,R,L],[R,L,R],[L,R,R]\}$
2. a) vybraný výrobek je první nebo druhé jakosti; b) vybraný výrobek je třetí jakosti; c) jev nemožný **3.** a) $\frac{1}{18}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{35}{36}$; d) 1 **4.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{5}{16}$ **6.** 0,003 404 **7.** Návod. Zřejmě je $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{B} \cup (\mathsf{A} \cap \neg\mathsf{B})$, a tedy $\mathsf{P}(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{B}) + \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \neg\mathsf{B})$. **8.** $A(4,5,6) = 5$, $G(4,5,6) = \sqrt[3]{120}$, $H(4,5,6) = \frac{180}{37}$
9. $\overline{x} = 4{,}998$; $\mathrm{Mod}(x) = 5{,}0$; $\mathrm{Med}(x) = 5{,}0$; $s_x = 0{,}166$

5 Elementární teorie čísel

1 Vyhledejte všechna přirozená čísla, která dávají při dělení čísly 16 a 24 zbytek 5?

2 Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo

a) 2 652, b) 4 812.

3 Určete všechny dvojice $[x; y]$ přirozených čísel, pro něž platí:

a) $3x + 2y = 24$, b) $2x + 3y = xy$.

4 Určete všechny dvojice $[x; y]$ celých čísel x, y, pro něž platí

$$x^2(x^2 + 7) = 9y^2.$$

5 Ověřte platnost vztahu $D(a, b) \cdot n(a, b) = ab$ pro $a = 980$, $b = 1\,386$.

6 Určete všechny dvojice $[x; y]$ přirozených čísel x, y, pro která platí:

a) $D(x, y) = 4 \wedge n(x, y) = 24$, b) $D(x, y) + 5 = n(x, y)$.

7 Dokažte následující věty:

a) $\forall a, b \in \mathsf{N}\colon a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$,

b) $\forall a, b, c \in \mathsf{N}\colon a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$,

c) $\forall a, b, c, m, n \in \mathsf{N}\colon a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (mb + nc)$.

8 Druhá mocnina lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná 8. Dokažte.

9 Součet třetích mocnin libovolných tří po sobě jdoucích sudých přirozených čísel je dělitelný 24. Dokažte.

10 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou v cm vyjádřeny přirozenými čísly. Jedna odvěsna má délku 5 cm. Určete délku druhé odvěsny a přepony.

1. $48k + 5$, $k \in \mathsf{N}$ **2.** a) 17; b) 401 **3.** a) $[2; 9]$, $[4; 6]$, $[6; 3]$; b) $[4; 8]$, $[5; 5]$, $[6; 4]$, $[9; 3]$ **4.** $[3; 4]$, $[3; -4]$, $[-3; 4]$, $[-3; -4]$, $[0; 0]$ **5.** $D(a, b) = 14$, $n(a, b) = 97\,020$ **6.** a) $[4; 24]$, $[8; 12]$, $[12; 8]$, $[24; 4]$; b) $[1; 6]$, $[6; 1]$, $[2; 3]$, $[3; 2]$, $[5; 10]$, $[10; 5]$ **10.** 12 cm; 13 cm

6 Číselné obory

1 Určete, pro která čísla $a \in \mathsf{R}$ je definována mocnina a^n, je-li:

a) $n \in \mathsf{N}$ b) $n \in \mathsf{Z}$ c) $n \in \mathsf{Q}$

2 Pro která $a, b \in \mathsf{N}$ platí $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$?

3 Daná racionální čísla vyjádřená periodickými desetinnými rozvoji zapište ve tvaru zlomků v základním tvaru:

a) $0{,}12\overline{3}$ b) $-3{,}\overline{07}$
c) $2{,}23\overline{04}$ d) $-11{,}60\overline{61}$

4 Na číselné ose znázorněte obrazy čísel:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

5 Dokažte sporem: $\sqrt{11 + \sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$.

6 Dokažte, že mezi každými dvěma racionálními čísly leží aspoň jedno další racionální číslo.

7 V N řešte rovnici: $\left(\dfrac{0{,}1\overline{6} + 0{,}\overline{3}}{0{,}\overline{3} + 1{,}1\overline{6}}\right) \cdot x = 10.$

8 Jsou dána čísla $a = \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}$. Vypočtěte:

a) $a - b$ b) $a + b$

9 Určete všechny racionální sčítance binomického rozvoje

$$\left(\sqrt[7]{7} + \sqrt[5]{5}\right)^{24}.$$

10 Dané zlomky zapište ve tvaru zlomku $\dfrac{c}{10^n}$, $c \in \mathsf{Z}$, $n \in \mathsf{N}$, nebo nekonečným periodickým rozvojem s vyznačenou periodou:

a) $\dfrac{7}{8}$ b) $\dfrac{29}{160}$ c) $\dfrac{5}{7}$ d) $\dfrac{14}{270}$

[**1.** a) $a \in \mathsf{R}$; b) $a \in \mathsf{R} \setminus \{0\}$; c) $a \in \mathsf{R}^+$ **2.** $a = 5, b = 2$ **3.** a) $\frac{37}{300}$; b) $-\frac{304}{99}$; c) $\frac{22\,081}{9\,900}$; d) $-\frac{114\,901}{9\,900}$ **7.** $x = 30$ **8.** a) 10; b) $8\sqrt{2}$ **9.** 11. člen, 2 402 538 600 **10.** a) $c = 875$, $n = 3$; b) $c = 18\,125$, $n = 5$; c) $0{,}\overline{714\,285}$; d) $0{,}0\overline{518}$]

7 Komplexní čísla

1 V Gaussově rovině sestrojte obrazy všech komplexních čísel z, pro něž platí:

a) $|z| = r$, $r \in \mathsf{R}^+$, b) $|z - z_0| = r$, $r \in \mathsf{R}^+$,

c) $1 < |z - 1 + \mathrm{i}| \leqq 2 \wedge |z - 1| \geqq |z + \mathrm{i}|$.

2 Vypočtěte z^{10}, jestliže je $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$.

3 Vypočtěte obsah S čtverce $ABCD$, jehož vrcholy A, B jsou po řadě obrazy komplexních čísel $a = 1 + 4\mathrm{i}$, $b = 3 - 2\mathrm{i}$.

4 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Těžiště trojúhelníku je obrazem komplexního čísla $z = 0$ a vrchol C je obrazem komplexního čísla $c = \mathrm{i}$. Určete komplexní čísla a, b, která jsou obrazy vrcholů A, B.

5 Řešte v C rovnici $x^4 - 1 = 0$
a) převedením na součinový tvar,
b) jako binomickou rovnici.
Jaká je geometrická interpretace řešení této rovnice?

6 Užitím Moivreovy věty vyjádřete $\cos 3x$, $\sin 3x$ pomocí $\sin x, \cos x$.

7 V C řešte rovnici $\left(5 - \dfrac{1}{\mathrm{i}}\right) \cdot \overline{z} + 2z = 2\mathrm{i}$.

8 Nechť $\mathrm{Arg}(z)$ značí kteroukoliv z hodnot argumentu nenulového komplexního čísla z. Dokažte, že pro libovolná nenulová komplexní čísla u a v a každé $n \in \mathsf{N}$ platí:
a) $\mathrm{Arg}(u \cdot v) = \mathrm{Arg}(u) + \mathrm{Arg}(v)$,
b) $\mathrm{Arg}(u^n) = n \cdot \mathrm{Arg}(u)$,
c) $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \mathrm{Arg}(u) - \mathrm{Arg}(v)$.

9 V C řešte rovnice:
a) $\mathrm{i}x^2 + 3x + 10\mathrm{i} = 0$
b) $x^2 + (2 - \mathrm{i})x + 3 - \mathrm{i} = 0$

10 Charakterizujte zobrazení v Gaussově rovině, které obrazu komplexního čísla z přiřazuje obraz komplexního čísla w:
a) $w = z + a$, $a \in \mathsf{C}$, $a \neq 0$;
b) $w = k \cdot z$, $k \in \mathsf{R}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$;
c) $w = \bar{z}$.
Ve všech daných zobrazeních zobrazte trojúhelník ABC, jehož vrcholy jsou po řadě obrazy komplexních čísel $1 + 2t$, $2 + t$, $3 + 3t$, je-li dáno $a = 4 = 2t$, $k = 2$.

2. $z^{10} = z$ **3.** $S = 40$ **4.** $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ **5.** $-1,\ 1,\ -\mathrm{i},\ \mathrm{i}$ **6.** $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$; $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$ **7.** $\frac{1}{11} - \frac{7}{11}\mathrm{i}$ **9.** a) $5\mathrm{i},\ -2\mathrm{i}$; b) $-1+2\mathrm{i},\ -1-\mathrm{i}$ **10.** a) Posunutí určené vektorem $\boldsymbol{OA}$, kde O je počátek a bod A je obrazem komplexního čísla a; b) stejnolehlost se středem v počátku; c) osová souměrnost podle reálné osy.

8 Algebraické výrazy

1 Lomený výraz $V(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$ napište ve tvaru součtu dvou zlomků, jejichž čitatelé jsou celá čísla a jmenovatelé lineární dvojčleny (tzv. rozklad na parciální zlomky), a uveďte příklad užití takového rozkladu.

2 Určete definiční obor $\mathsf{D} \subset \mathsf{R}$ daného výrazu a výraz upravte:

$$V(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}.$$

3 V množině R proveďte rozklad daných polynomů na součin lineárních, nejvýše kvadratických činitelů:

a) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ b) $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

c) $R(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ d) $S(x) = x^6 - 1$

4 Je dán polynom $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + c$. Určete hodnotu parametru c tak, aby dělení $(2x^3 - 3x^2 - 11x + c) : (x+2)$ vyšlo beze zbytku.

5 Vypočtěte: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

6 Určete definiční obor daného výrazu a výraz zjednodušte:

$$V(a,b)=\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

7 Dokažte, že platí $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+r}{2}}+\sqrt{\frac{a-r}{2}}$, kde $r=\sqrt{a^2-b}$, $a,b\in\mathsf{N}$, $a^2\geqq b$. Na základě výše uvedeného vztahu zjednodušte výraz $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

8 Vypočtěte $\displaystyle\int\frac{3x+5}{(x+3)(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

9 Určete definiční obor D výrazu $V(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{2x+1}}$.

10 Určete nejmenší hodnotu výrazu $W(x,y,z)=2x^3+y^3+z^3$, splňují-li reálná čísla x, y, z podmínky $x+y=2$ a $x+z=1$.

[**1.** $V(x)=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+3)}$ **2.** $\mathsf{D}=\mathsf{R}\setminus\{-1;1\}$, $V(x)=\frac{1}{x-1}$ **3.** a) $P(x)=(x+1)\times$ $\times(x-1)(x+2)(x-2)$; b) $Q(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$; c) $R(x)=(x+1)(x+1)(x^2-x+1)$; d) $S(x)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ **4.** $c=6$ **5.** $-\frac{1}{3}$ **6.** $V(a,b)=$ $=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a\neq b$, $a\geqq 0, b\geqq 0$ **7.** $\sqrt{5}+1$ **8.** $2\ln|x+3|+\ln|x+1|+C$ **9.** $\mathsf{D}=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\langle 3;+\infty)$ **10.** $\frac{11}{4}$]

9 Algebraické rovnice

1 Pro které hodnoty parametru $q\in\mathsf{R}$ má rovnice $x^2-2x+q=0$ v R

a) právě dvě řešení, b) právě jedno řešení?

c) Pro které hodnoty parametru q nemá daná rovnice řešení?

2 Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice $ax^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$, pak $x_1 \cdot x_2 = 1$. Dokažte.

3 V R řešte početně i graficky rovnice s parametrem $b \in \mathsf{R}$:

a) $4 - |x + 1| = b$ b) $|x - 2| = bx$

4 V R řešte rovnice:

a) $x^5 - 2x^4 - x + 2 = 0$ b) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ d) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

5 Rovnice $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ má kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Určete koeficienty a, b a kořen x_3.

6 V R^2 řešte početně i graficky soustavy rovnic:

a) $y = x^2 - 3$, $|x| + |y| = 3$ b) $xy = 3$, $|x| + |y| = 4$

c) $x^2 + y^2 = 10$, $|x| + |y| = 4$ d) $x^2 + 3y^2 = 4$, $|x| + |y| = 2$

7 V R řešte rovnice:

a) $3 - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3x - 2}$ b) $x + \sqrt{10x + 6} = 9$

8 V C řešte rovnice:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

9 V R^3 řešte soustavu rovnic:

a)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 3y + 7z &= 7 \\ 3x - 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 5x - 8y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

10 Vypočtěte délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC, víte-li, že jsou vyjádřeny přirozenými čísly a že číselné hodnoty obvodu a obsahu trojúhelníku jsou stejné.

1. a) $q \in (-\infty; 1)$; b) $q = 1$; c) $q \in (1; +\infty)$ **3.** a) $b < 4 \Rightarrow \mathsf{K} = \{3 - b, b - 5\}$; $b = 4 \Rightarrow \mathsf{K} = \{-1\}$; $b > 4 \Rightarrow \mathsf{K} = \emptyset$; b) $b \in (-\infty; -1) \Rightarrow \mathsf{K} = \{\frac{2}{b+1}\}$; $b \in \langle -1; 0) \Rightarrow \mathsf{K} = \emptyset$; $b = 0 \Rightarrow \mathsf{K} = \{2\}$; $b \in (0; 1) \Rightarrow \mathsf{K} = \{\frac{2}{1-b}; \frac{2}{1+b}\}$; $b \in \langle 1; +\infty) \Rightarrow \mathsf{K} = \{\frac{2}{b+1}\}$ **4.** a) -1, 1, 2; b) -1, $\frac{1}{3}$, 1, 3; c) -2, -1, 1, 2; d) -1, 2, 3 **5.** $a = 11$, $b = -6$, $x_3 = 3$ **6.** a) $[0; -3]$, $[1; -2]$, $[2; 1]$, $[-1; -2]$, $[-2; 1]$; b) $[1; 3]$, $[3; 1]$, $[-1; -3]$, $[-3; -1]$; c) $[1; 3]$, $[3; 1]$, $[-1; -3]$, $[-3; -1]$, $[1; -3]$, $[3; -1]$, $[-1; 3]$, $[-3; 1]$; d) $[1; 1]$, $[1; -1]$, $[-1; 1]$, $[-1; -1]$, $[2; 0]$, $[-2; 0]$ **7.** a) 2; b) 3 **8.** a) $2 + 3\mathrm{i}$, $2 - 3\mathrm{i}$; b) 2, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ **9.** a) $\mathsf{K} = \{[3; 2; 1]\}$; b) $\mathsf{K} = \left\{\left[\frac{10t}{7} + \frac{16}{7}; \frac{8t}{7} + \frac{3}{7}; t\right], t \in \mathsf{R}\right\}$
10. $a = 8\,\mathrm{cm}$, $b = 6\,\mathrm{cm}$, $c = 10\,\mathrm{cm}$; $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 12\,\mathrm{cm}$, $c = 13\,\mathrm{cm}$

10 Algebraické nerovnice

1 V R řešte nerovnice:

a) $x^3 + x^2 - 12x \geqq 0$

b) $\dfrac{4x - x^2}{x + 7} \leqq 0$

c) $(x + 1)(x - 3)^2 > 0$

d) $\dfrac{x + 1}{5 - x^2} > 0$

2 V R řešte nerovnice:

a) $x^3 - 7x + 6 > 0$

b) $x^3 + x - 10 < 0$

3 V R řešte početně i graficky nerovnice:

a) $\sqrt{x + 7} > 2x - 1$

b) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 15} < 6$

4 V R řešte početně i graficky nerovnice:

a) $|x^2 - 2x - 3| < x + 1$

b) $|2x - 3| \geqq |3x - 2|$

5 V R řešte nerovnice:

a) $\dfrac{|x| + 1}{x - 1} > 3$

b) $\left|\dfrac{x + 1}{x - 1}\right| > 3$

6 V R řešte nerovnice:

a) $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \leqq 0$ b) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$

7 V R řešte nerovnice:

a) $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$ b) $\sqrt{x-1} > 1 + \sqrt[3]{x-2}$

8 Pro které hodnoty parametru $a \in \mathsf{R}$ je soustava nerovnic

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

splněna pro všechna $x \in \mathsf{R}$?

9 Určete definiční obory funkcí:

a) $f\colon y = \sqrt{2x^2-x+1}$ b) $g\colon y = \dfrac{3}{\log\sqrt{\dfrac{2x+1}{4-x}}}$

10 V R^2 řešte graficky soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} x+2y &< 1 \\ x-y &\geqq -1 \\ 2x-4y &< -1 \end{aligned}$$

1. a) $\langle -4;0\rangle \cup \langle 3;+\infty)$; b) $(-1;3)\cup(3;+\infty)$; c) $(-7;0\rangle \cup \langle 4;+\infty)$; d) $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right) \cup \cup\left(-1;\sqrt{5}\right)$ **2.** a) $(-3;1)\cup(2;+\infty)$; b) $(-\infty;2)$ **3.** a) $\langle -7;2)$; b) $\langle -3;1)$ **4.** a) $(2;4)$; b) $\langle -1;1\rangle$ **5.** a) $(1;2)$; b) $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;2)$ **6.** a) $(-1;2\rangle$; b) $\left\langle 1;\frac{3}{2}\right)$ **7.** a) $(-\infty;-\sqrt{3})\cup \cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{3};+\infty)$; b) $(1;2)\cup(10;+\infty)$ **8.** $a \in (-1;2)$ **9.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(g) = \left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;4)$

11 Základy planimetrie

1 Dokažte následující věty:

a) Pro každé tři přímky p, q, r v rovině platí $p \perp q \wedge q \perp r \Rightarrow p \parallel r$.

b) Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmici.

2 Které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik dvou obdélníků?

3 V rovině jsou dány přímky a, b, c, které nemají společný bod. Na obrázku vyznačte dvojice úhlů vedlejších, vrcholových, střídavých a souhlasných. Dokažte, že osy dvou vedlejších úhlů jsou navzájem kolmé polopřímky.

4 Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že $|AX| < |BX|$.

5 Sestrojte všechny body v rovině, z nichž je vidět danou úsečku AB pod daným úhlem α.

6 Vyslovte a dokažte Eukleidovu větu o výšce a Eukleidovu větu o odvěsně.

7 Jsou dány úsečky délek a, b. Sestrojte úsečky, které mají délky

a) $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, b) $\dfrac{2ab}{a+b}$, c) $\sqrt{ab}$, d) $\sqrt{a^2 + b^2}$.

8 V rovině jsou dána shodná zobrazení I — *identita*, S — *středová souměrnost*, O — *osová souměrnost*, R — *rotace (otočení)*, T — *translace (posunutí)*. V každém z těchto zobrazení zobrazte bod, přímku a kružnici. Charakterizujte daná zobrazení podle počtu samodružných bodů.

9 Jsou dány středové souměrnosti S_1, S_2 se středy S_1, S_2. Určete zobrazení $\mathsf{Z} = \mathsf{S}_2 \circ \mathsf{S}_1$, je-li dáno:

a) $S_1 = S_2$, b) $S_1 \neq S_2$.

10 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC s těžištěm T a délkou strany a cm. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC v rotaci (otočení) $R(T, \frac{1}{3}\pi)$. Charakterizujte útvar $\mathsf{M} = \triangle ABC \cap \cap \triangle A'B'C'$ a vypočtěte jeho obsah S_{M}.

[**2.** Množina prázdná, bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník, osmiúhelník **9.** a) identita; b) posunutí **10.** M je pravidelný šestiúhelník, $S_{\mathsf{M}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}a^2$ cm^2]

12 Trojúhelník a mnohoúhelníky

1 Dokažte, že pro každý pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí:

$$\varrho = \frac{a + b - c}{2}$$

2 K danému pravoúhlému trojúhelníku ABC s odvěsnami délek a, b sestrojte čtverec a rovnostranný trojúhelník stejného obsahu.

3 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) c, v_c, γ, b) t_a, t_b, t_c, c) b, v_c, ϱ, d) a, t_c, $\gamma = \frac{1}{2}\pi$.

4 Trojúhelník ABC rozdělte na dvě části stejného obsahu přímkou p

a) rovnoběžnou se stranou AB, b) kolmou ke straně AB.

5 Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána délka u jedné jeho úhlopříčky a poloměr r kružnice kosočtverci vepsané.

6 Obsah kruhu je třikrát větší než obsah obdélníku, který je danému kruhu vepsán. Vypočtěte poměr stran $a : b$ tohoto obdélníku.

7 Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, je-li dáno:

a) $a + c$, b, d, v,

b) a, c, α, β, $a > c$.

8 Dokažte, že středy stran libovolného konvexního čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku, jehož obsah je polovinou obsahu čtyřúhelníku.

9 V pravidelném n-úhelníku je velikost vnitřního úhlu $\alpha = 108°$ a poloměr kružnice vepsané $\varrho = 5\,\text{cm}$. Určete číslo n a vypočtěte obsah S tohoto n-úhelníku.

10 Vyjádřete obvod o a obsah S pravidelného n-úhelníku pomocí

a) poloměru ϱ kružnice vepsané,

b) poloměru r kružnice opsané,

c) délky a jeho strany.

[**6.** $a : b = \frac{6-\sqrt{36-\pi^2}}{\pi}$ **9.** $n = 5$; $S \doteq 90{,}8\,\text{cm}^2$ **10.** a) $o(\varrho) = 2n\varrho \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, $S(\varrho) = n\varrho^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$; b) $o(r) = 2nr \sin \frac{\pi}{n}$, $S(r) = \frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{2\pi}{n}$; c) $o(a) = na$, $S(a) = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$]

13 Kružnice, kruh

1 Pravidelnému šestiúhelníku je vepsána a opsána kružnice. Obsah odpovídajícího mezikruží je 4π. Vypočtěte obsah šestiúhelníku.

2 Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných tětiv délek 5 cm a 8 cm v kružnici $k(S; 5\,\text{cm})$.

3 Vypočtěte poloměr r největšího kruhu, který lze vyříznout z kusu plechu tvaru čtvrtkruhu o poloměru R.

4 Daný kruh $\mathsf{K}(S; r)$ rozdělte dvěma soustřednými kružnicemi $k_1(S; r_1)$, $k_2(S; r_2)$, $r_1 < r_2 < r$, na tři části stejného obsahu.

5 Jsou dány poloměry r, ϱ opsané a vepsané kružnice v pravoúhlém trojúhelníku. Vyjádřete vzdálenost jejich středů jenom pomocí čísel r, ϱ.

6 Tětiva kružnice o poloměru r dělí průměr k ní kolmý v daném poměru $m : n$, $m > n$. Vypočítejte délku tětivy.

7 Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M, $|SM| > r$. Bodem M jsou vedeny dvě různé sečny, které vytínají na kružnici k tětivy AB a $A'B'$. Dokažte, že platí $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.

8 Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$, $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Sestrojte společné tečny obou kružnic.

9 Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $m(O, r)$ a dané přímky p v daném bodě $T \in p$. (Úloha Pappova)

10 V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 \geqq r_2$, $|S_1S_2| = r_1 + r_2$ a jejich vnější společná tečna t. Vypočtěte poloměr r_3 kružnice $k_3(S_3, r_3)$, která se dotýká kružnic k_1, k_2 a přímky t.

[**1.** $24\sqrt{3}$ **2.** $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + 3\right)$ cm nebo $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 3\right)$ cm **3.** $r = R(\sqrt{2} - 1)$ **4.** $r_1 = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}r\sqrt{6}$ **5.** Výsledek: $x = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$. Návod. Nejprve ukažte, že $(a - \varrho) + (b - \varrho) = c = 2r$ a $ab = (a + b + 2r)\varrho$. **6.** $\frac{4r\sqrt{mn}}{m+n}$ **10.** $r_3 = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$]

14 Trigonometrie

1 Dokažte, že pro obsah pravoúhlého trojúhelníku platí $S = xy$, kde x, y jsou velikosti úseků na přeponě určené bodem dotyku kružnice trojúhelníku vepsané.

2 Charakterizujte trojúhelníky ABC, ve kterých platí:

a) $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ b) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$

c) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$ d) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$

3 Určete obsah S_m mezikruží omezeného kružnicí vepsanou a opsanou pravidelnému n-úhelníku, který má obsah S.

4 Jsou-li a, b délky odvěsen a c délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, potom platí $a + b \leqq c\sqrt{2}$. Dokažte.

5 Nepřístupný bod C v rovině byl zaměřen ze dvou stanovišť A, B, jejichž vzdálenost je c, pod úhly α, β. Vypočtěte vzdálenosti bodu C od obou stanovišť.

6 Z okna, které se nachází 8 m nad zemí, je vidět vrchol věže pod výškovým úhlem 60°, patu věže pod hloubkovým úhlem 30°. Určete výšku věže.

7 Osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníku v poměru zbývajících stran. Dokažte.

8 Určete vzdálenost dvou nepřístupných bodů C, D, jestliže je známa vzdálenost d dvou přístupných bodů A, B a $|\sphericalangle CBA| = \alpha$, $|\sphericalangle DAB| = \beta$, $|\sphericalangle DBA| = \gamma$, $|\sphericalangle CAB| = \delta$.

Poznámka. V úloze 8 předpokládáme, že body A, B, C, D tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku $ABCD$.

9 Tři síly, jejichž velikosti jsou v poměru 4 : 7 : 9, působí v rovině v témž bodě tak, že jsou v rovnováze. Určete velikosti úhlů, které tyto síly svírají.

10 Ve čtverci $ABCD$, $|AB| = a$, leží na úhlopříčce AC bod X tak, že $|AX| = 2|CX|$. Určete obsah trojúhelníku ABX a dokažte, že pro jeho úhly platí: $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = 3$.

2. a) $\gamma = 120°$; b) $\gamma = 60°$; c) $\alpha = \beta \vee \alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$; d) $\alpha = \beta \vee \alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ **3.** $S_{\mathrm{m}} = \frac{1}{n}\pi S \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ **4.** Návod. Je-li $a > b$ a je-li α velikost úhlu proti odvěsně a, pak je $a + b = c\sin\alpha + c\sin(90° - \alpha)$. **5.** $|CA| = c\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $|CB| = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ **6.** 32 m **8.** $d \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\delta)} - \frac{2\sin\alpha\sin\gamma\cos(\beta-\delta)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}}$ **9.** přibližně 73,4°; 154,8°; 131,8° **10.** $S = \frac{1}{3}a^2$

15 Základy stereometrie

1 Jakou vzájemnou polohu mohou mít tři různé roviny v prostoru? Proveďte příslušné náčrtky a podejte algebraickou interpretaci.

2 Je dána krychle $ABCDEFGH$ a body K, L, M. Bod K leží na přímce DH tak, že bod H je střed úsečky DK. Bod L leží na přímce AB tak, že bod B je střed úsečky AL, bod M je střed hrany AE. Zobrazte
a) průsečíky přímky KL s povrchem krychle,
b) řez krychle rovinou KLM.

3 Zobrazte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou $\varrho = \leftrightarrow PQR$, kde
a) P je střed hrany AE, Q je střed hrany AB, R je bodem hrany CG, $|CR| : |RG| = 2 : 1$;
b) P je střed hrany AH, Q je střed hrany AB, R je střed hrany CG.

4 Zobrazte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou ϱ, která prochází body P, Q, R, kde P je středem hrany AV, Q je bodem hrany BV, $|BV| : |QV| = 1 : 5$, R je bodem hrany CV, $|CR| : |RV| = 1 : 3$.

5 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pravoúhlé průměty
a) bodu B do rovin ADH, ACG, CDE, EDG,
b) přímky DF do rovin ABC, ADH, ACG, DEG.

6 V krychli $ABCDEFGH$ vypočtěte odchylku φ

a) tělesových úhlopříček,
b) přímky BH od roviny ABC,
c) rovin ACF a ABC,
d) přímek AC a BG.

7 Nechť φ je odchylka boční hrany a ψ odchylka boční stěny pravidelného trojbokého jehlanu $ABCV$ od roviny podstavy ABC. Dokažte, že platí $\operatorname{tg}\psi = 2\operatorname{tg}\varphi$.

8 Označme α, β, γ velikosti úhlů, které svírá tělesová úhlopříčka kvádru se stěnami, jež procházejí jedním z vrcholů. Dokažte, že platí:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$,
b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

9 V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ s hranou délky a vypočtěte:

a) vzdálenost bodu D od roviny ABC,
b) vzdálenost přímek AB a CD.

10 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ vypočtěte vzdálenost vrcholu A od přímky VC, je-li $|AB| = a$, $|AV| = b$.

1. celkem 5 poloh; 1. každé dvě rovnoběžné, 2. dvě rovnoběžné, třetí s nimi různoběžná; 3. každé dvě různoběžné, společná přímka; 4. každé dvě různoběžné, společný bod; 5. každé dvě různoběžné, nemají společný bod **6.** a) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$; d) $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ **9.** a) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ **10.** $\frac{a}{b}\sqrt{2b^2 - a^2}$

16 Mnohostěny a rotační tělesa

1 Hranou krychle veďte rovinný řez tak, aby objemy obou částí krychle byly v daném poměru $m : n$, $m > n$.

2 Charakterizujte následující mnohostěny: tetraedr, hexaedr, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr. Vyjádřete povrch S a objem V tetraedru a oktaedru pomocí délky a jejich hran.

3 Objem komolého jehlanu, který má výšku v a jehož podstavy mají obsahy S_1 a S_2, určíme podle vzorce $V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$. Dokažte.

4 Určete objem a povrch pravidelného trojbokého jehlanu, znáte-li délku a podstavné hrany a odchylku φ boční hrany a roviny podstavy.

5 Pravidelný šestiboký hranol je dán svými tělesovými úhlopříčkami $u_1 = 12\,\mathrm{cm}$ a $u_2 = 13\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte povrch S a objem V hranolu.

6 Určete poměr povrchů a objemů rovnostranného válce a rovnostranného kužele, které jsou:

a) vepsány kouli s poloměrem r,

b) opsány kouli s poloměrem r.

Poznámka. Rovnostranný válec je válec, jehož osovým řezem je čtverec. Rovnostranný kužel je kužel, jehož osovým řezem je rovnostranný trojúhelník.

7 Užitím určitého integrálu odvoďte vzorec pro objem:

a) koule, b) rotačního kužele, c) komolého rotačního kužele.

8 Z jaké výše vidí letec část povrchu Země o rozloze $200\,000\,\mathrm{km}^2$?

9 Dutá koule má vnější průměr d. Určete tloušťku x její stěny, která je z kovu o hmotnosti m a hustotě ϱ. Řešte obecně a potom pro hodnoty $d = 40\,\mathrm{cm}$, $m = 25\,\mathrm{kg}$, $\varrho = 8{,}45\,\mathrm{g/cm}^3$.

10 Tři koule o poloměrech r_1, r_2, r_3 byly slity v jedinou kouli. Vypočtěte její poloměr r a porovnejte povrch této koule se součtem povrchů původních koulí. Zobecněte pro n koulí s poloměry $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

1. $x = \frac{2an}{m+n}$, a je délka hrany krychle, $x = |BQ|$, $Q \in AB$ **2.** tetraedr $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}a^3$, $S = \sqrt{3}a^2$, oktaedr $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}a^3$, $S = 2\sqrt{3}a^2$ **4.** $V = \frac{1}{12}a^3 \operatorname{tg}\varphi$, $S = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\varphi + 1}$ **5.** $V = \frac{225}{2}\sqrt{23}\,\mathrm{cm}^3$, $S = (75\sqrt{3} + 30\sqrt{69})\,\mathrm{cm}^2$ **6.** a) $V_V : V_K = 4\sqrt{2} : 3$, $S_V : S_K = 4 : 3$; b) $V_V : V_K = 2 : 3$, $S_V : S_K = 2 : 3$ **7.** a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$; c) $V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ **8.** přibližně 4,995 km **9.** $x = \frac{d}{2} - \sqrt[3]{\frac{d^3}{8} - \frac{3m}{4\pi\varrho}}$, $x \doteq 0{,}6\,\mathrm{cm}$ **10.** $r = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3}$, povrch nové koule je menší

17 Základy vektorové algebry

1 V krychli $ABCDEFGH$ je $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = D - A$, $\boldsymbol{w} = E - A$. Pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ vyjádřete vektor $\boldsymbol{z} = S - C$, kde S je střed stěny $ADHE$.

2 V trojúhelníku ABC s těžištěm T je $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = C - A$. Vyjádřete postupně vektory $\boldsymbol{u} = A - T$, $\boldsymbol{v} = B - T$, $\boldsymbol{w} = C - T$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a vypočtěte $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

3 Rozhodněte, zda vektor $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, je-li dáno: $\boldsymbol{w} = (-1; 1; 2)$, $\boldsymbol{u} = (1; 5; 2)$, $\boldsymbol{v} = (1; 2; 0)$. Výsledek interpretujte geometricky.

4 Určete vektor $\boldsymbol{v}$, který je kolmý k vektoru $\boldsymbol{u} = (5; 12)$ a má velikost $|\boldsymbol{v}| = 4$.

5 Pomocí skalárního součinu vektorů rozhodněte, zda jsou tělesové úhlopříčky krychle navzájem kolmé.

6 Pro jednotkové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$. Určete číslo $M = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$.

7 Pomocí vektorového součinu vypočtěte obsah S trojúhelníku ABC, je-li $A[2;1]$, $B[3;4]$, $C[1;6]$.

8 Jsou dány body $A[-2;1;4]$, $B[-1;0;-1]$, $C[-4;-1;6]$, $D[-2;-2;-5]$. Dokažte, že neleží v jedné rovině, a vypočtěte objem V čtyřstěnu $ABCD$.

9 Pro vzdálenost bodu X od přímky p v prostoru, která je dána jedním svým bodem P a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$, platí

$$|Xp| = \frac{|\boldsymbol{PX} \times \boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|}.$$

Ověřte platnost vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu $X[2;-3;1]$ od přímky p: $x = 3 + 2t$, $y = -3 + 3t$, $z = 3 + 6t$, $t \in \mathsf{R}$.

10 Pro vzdálenost mimoběžných přímek $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$ platí:

$$|p, q| = \frac{|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|} = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|},$$

kde $\boldsymbol{w}$ je vektor určený dvěma libovolnými body $E \in p$ a $F \in q$. Ověřte platnost vzorce pro výpočet vzdálenosti mimoběžných přímek p, q, je-li dáno: $A[2;-2;0]$, $B[2;3;-1]$, $\boldsymbol{u} = (1;-1;0)$, $\boldsymbol{v} = (0;1;-2)$.

[**1.** $\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}$ **2.** $\boldsymbol{u} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{w} = \frac{2}{3}\boldsymbol{b} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$ **3.** ano, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$, dané vektory leží v jedné rovině **4.** $\boldsymbol{v} = \left(\frac{48}{13}; -\frac{20}{13}\right)$, nebo $\boldsymbol{v} = \left(-\frac{48}{13}; \frac{20}{13}\right)$ **5.** pro jejich odchylku φ platí $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, nejsou kolmé **6.** $M = -1{,}5$ **7.** $S = 4$ **8.** $V = 2$ **9.** 1 **10.** 3]

18 Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

1 Je dána přímka $p\colon y = k_1x + q_1$ a přímka $q\colon y = k_2x + q_2$. Dokažte, že platí
$$p \perp q \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

2 Jsou dány body $A[2;0]$, $B[4;4]$, $C[-2;2]$. Určete střed S a rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC.

3 Je dán trojúhelník ABC, kde $A[4;-2]$, $B[2;8]$, $C[-3;0]$. Určete
a) parametrické rovnice přímky, na níž leží těžnice t_a,
b) parametrické rovnice přímky, na níž leží výška v_a,
c) délku výšky v_a.

4 Dokažte, že pro vzdálenost d dvou rovnoběžných přímek $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ platí:
$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5 Bodem $A[-2;2]$ prochází přímka p a bodem $B[6;8]$ přímka q tak, že tyto přímky jsou navzájem kolmé a jejich průsečík Q leží na ose x. Určete přímky p, q jejich rovnicemi ve směrnicovém tvaru.

6 Dokažte, že přímka o rovnici $2x + y + 1 = 0$ odděluje body $A[-2;1]$, $B[1;4]$ a určete nerovnici poloroviny s hraniční přímkou $2x+y+1=0$ a vnitřním bodem B.

7 V rovnici přímky $3x + by - 1 = 0$ stanovte parametr b tak, aby
a) přímka procházela bodem $Q[2;2]$,
b) přímka byla rovnoběžná s osou y,
c) směrový úhel této přímky měl velikost $\frac{1}{6}\pi$.

8 Najděte obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem $Q[-3;0]$ a má od přímky $p\colon \sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$ odchylku $60°$.

9 Dokažte, že pro vzdálenost d bodu $Q[x_0; y_0]$ od přímky $ax+by+c=0$ platí
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

10 Vypočtěte obsah S čtverce, jehož rovnoběžné strany leží na přímkách určených rovnicemi $4x - 3y + 9 = 0$ a $-4x + 3y + 6 = 0$.

[**2.** $S[1;3]$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ **3.** a) $x = 4 - 3t$, $y = -2 + 4t$; $t \in \mathsf{R}$; b) $x = 4 + 8t$, $y = -2 - 5t$; $t \in \mathsf{R}$; c) $v_a = \frac{66\sqrt{89}}{89}$ **5.** $p\colon x + 2y - 2 = 0$, $q\colon 2x - y - 4 = 0$, $Q[2;0]$ **6.** $2x + y + 1 \geqq 0$ **7.** a) $b = -\frac{5}{2}$; b) $b = 0$; c) $b = -3\sqrt{3}$ **8.** q je jedna z přímek o rovnici $x = -3$, $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ **10.** $S = 9$]

19 Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině

1 Dokažte, že body $A[3;-6]$, $B[1;0]$, $C[5;-2]$ neleží v přímce a napište rovnici kružnice, která jimi prochází. Určete její základní charakteristiky a kružnici načrtněte.

2 Stanovte podmínky pro parametry $a, b, c \in \mathsf{R}$, aby rovnice
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
byla rovnicí kružnice. Určete její střed a poloměr.

3 Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, které mají od bodu $A[-3;6]$ dvakrát větší vzdálenost než od počátku soustavy souřadnic.

4 Určete základní charakteristiky kuželosečky dané rovnicí
$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$$
a pak ji načrtněte.

5 Elipse dané rovnicí $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište čtverec a vypočtěte souřadnice jeho vrcholů a délku jeho strany.

6 Určete základní charakteristiky kuželosečky dané rovnicí

$$y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$$

a pak ji načrtněte.

7 Určete základní charakteristiky V, p, d, F paraboly dané rovnicí $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

8 Napište rovnici paraboly s ohniskem $F[0; 0]$ a řídicí přímkou o rovnici $x + y + 1 = 0$. Parabolu načrtněte.

9 Určete souřadnice středu, poloosy, exentricitu, ohniska a rovnice asymptot hyperboly dané rovnicí

$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

10 Dokažte, že hyperbola o rovnici $xy = c$, $c \neq 0$, kde číslo c je nenulový parametr, má ve svém bodě $T[x_0; y_0]$ tečnu, která má rovnici $y_0x + x_0y = 2c$. Vyjádřete obsah S trojúhelníku, který je vymezen tečnou procházející bodem $T[x_0; y_0]$ a souřadnicovými osami.

1. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$; $S[2; -3]$; $r = \sqrt{10}$ **2.** $a^2 + b^2 - 4c > 0$; $S[-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}]$; $r = \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ **3.** kružnice $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 20$ **4.** elipsa, $a = 4$, $b = 3$, $e = \sqrt{7}$, $S[-2; 1]$ **5.** $A[-3; -3]$, $B[3; -3]$, $C[3; 3]$, $D[-3; 3]$, $a = 6$ **6.** parabola, hlavní osa rovnoběžná s osou x, $V[2; 1]$, $p = \frac{3}{2}$, $F\left[\frac{11}{4}; 1\right]$, $d\colon x = \frac{5}{4}$ **7.** $V[-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}]$, $p = \frac{1}{2a}$, $d\colon y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$, $F[-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2+1}{4a}]$ **8.** $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$ **9.** $S[0; 0]$, $a = b = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F[\sqrt{2}; 0]$, $G[-\sqrt{2}; 0]$, $y = x$, $y = -x$ **10.** $S = 2|c|$

20 Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru

1 Jsou dány body $A[1; 0; 1]$, $B[2; 2; 1]$, $C[4; 6; -2]$. Dokažte, že body A, B, C nejsou kolineární a napište obecnou rovnici roviny ABC.

2 Dokažte, že tělesová úhlopříčka CE krychle $ABCDEFGH$ protíná rovinu AFH v bodě M, který dělí úsečku CE v poměru $2 : 1$.

3 Jsou dány rovnice rovin $\alpha\colon 2x - 5y + 4z - 10 = 0$, $\beta\colon x - y - z - 2 = 0$. Dokažte, že roviny α, β jsou různoběžné, a najděte parametrické vyjádření jejich průsečnice.

4 Určete vzájemnou polohu rovin α, β, γ, je-li dáno:

$$\alpha\colon x - 2y - z + 1 = 0, \quad \beta\colon x + y + z - 7 = 0, \quad \gamma\colon 2x + y - z - 2 = 0.$$

5 Vypočtěte vzdálenost bodu $A[6; -6; 5]$ od přímky p určené parametrickým vyjádřením $x = 4$, $y = 1 - 6t$, $z = 4 - 6t$; $t \in \mathsf{R}$.

6 Jsou-li α, β, γ odchylky libovolné přímky p od souřadnicových os x, y, z kartézské soustavy souřadnic, pak platí:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Dokažte.

7 Dokažte, že přímky p, q jsou mimoběžky, a určete jejich vzdálenost d:
$p\colon x = 9 + 4t$, $y = -2 - 3t$, $z = t$; $t \in \mathsf{R}$,
$q\colon x = -2s$, $y = -7 + 9s$, $z = 2 + 2s$; $s \in \mathsf{R}$.

8 Světelný paprsek, který vychází z bodu $A[1; -2; 3]$, se odráží od roviny ϱ dané rovnicí $x + y - z + 1 = 0$ do bodu $B[3; 4; 11]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

9 Vypočtěte objem V čtyřstěnu $ABCD$, je-li $A[-2; -4; 1]$, $B[2; -6; 1]$, $C[1; -10; -2]$, $D[2; -6; -7]$.

10 Zjistěte, zda body $A[2;1;3]$, $B[4;1;5]$ leží ve stejném poloprostoru, nebo v opačných poloprostorech s hraniční rovinou, která má rovnici:

a) $2x - y + z + 4 = 0$ b) $x - y + 3z - 12 = 0$

[**1.** $2x - y - 2 = 0$ **3.** $x = 3t$, $y = 2t - 2$, $z = t$; $t \in \mathrm{R}$ **4.** $\alpha \nparallel \beta \nparallel \gamma \nparallel \alpha$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{Q\}$, $Q[3;0;4]$ **5.** $d = 6$ **7.** $d = 7$ **8.** Návod. Určete souřadnice bodu A' souměrně sdruženého s bodem A podle roviny ϱ; $Q[3;2;6]$ **9.** $V = 24$ **10.** a) leží ve stejném poloprostoru; b) leží v opačných poloprostorech]

21 Elementární funkce

Poznámka. V následujících úlohách rozumíme pod pojmem funkce zobrazení, kde x je vzor a y obraz. Paritou funkce se rozumí, zda je funkce sudá či lichá.

1 Rozhodněte, které z uvedených relací jsou funkce. V případě funkce určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf:

a) $|x| + |y| = 1$ b) $|x - 1| + y = 0$

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$ d) $y^2 = 1 + x^2$

2 K funkci f najděte funkci inverzní a sestrojte její graf:

a) $f\colon y = 2x - 3$ b) $f\colon y = x^3 + 1$

3 Objasněte pojem transformace soustavy souřadnic: $x' = x - m$, $y' = y - n$, resp. $y = f(x) \longrightarrow y - n = f(x - m)$. Výklad dokumentujte na příkladu funkce $g\colon y = x^2 - 2x + 2$ a napište příslušné rovnice pro transformaci posouvající vrchol paraboly, která je grafem funkce g, do počátku.

4 Vyjádřete se k paritě funkce φ v případě, že funkce f, g jsou obě sudé, obě liché, jedna je sudá a druhá lichá.

a) $\varphi\colon y = f(x) + g(x)$ b) $\varphi\colon y = f(x) - g(x)$

c) $\varphi\colon y = f(x) \cdot g(x)$ d) $\varphi\colon y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

5 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = |x|$ b) $g\colon y = \operatorname{sgn} x$

c) $h\colon y = [x]$ d) $i\colon y = |x| \operatorname{sgn} x$

6 Sestrojte grafy funkcí:

a) $f\colon y = \operatorname{sgn}(\cos x)$, $x \in (-2\pi; 2\pi)$ b) $g\colon y = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$

7 Určete definiční obory funkcí:

a) $f\colon y = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$ b) $g\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}$

8 Určete $f(x)$, je-li dáno:

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ b) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

9 Jsou dány funkce $f\colon y = 2x + 3$, $g\colon y = \dfrac{1}{x}$. Najděte funkce:

a) $h = g \circ f$ b) $i = g \circ g$

c) $j = f \circ g$ d) $k = f \circ f$

10 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = [x] - x$ b) $g\colon y = x - [x]$

1. a) ne; b) ano; c) ano; d) ne **2.** a) $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; b) $f^{-1}\colon y = \sqrt[3]{x-1}$ **3.** $x' = x - 1$, $y' = y - 1$, $y' = x'^2$ **4.** Vzor odpovědi. Jsou-li f, g obě liché, pak např.: $\varphi(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = (-f(x))\cdot(-g(x)) = f(x)\cdot g(x) = \varphi(x)$, funkce φ je sudá. **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+$; b) $\mathsf{D}(g) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(g) = \{-1; 0; 1\}$; c) $\mathsf{D}(h) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(h) = \mathsf{Z}$; d) $\mathsf{D}(i) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(i) = \mathsf{R}$ **7.** $\mathsf{D}(f) = \langle -1; +\infty)$; $\mathsf{D}(g) = (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ **8.** a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $|x| \geqq 2$; b) $f(x) = x^2 - 2$ **9.** a) $h(x) = \frac{1}{2x+3}$; b) $i(x) = x$; c) $j(x) = \frac{2}{x} + 3$; $k(x) = 4x + 9$ **10.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-1; 0\rangle$; b) $\mathsf{D}(g) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(g) = \langle 0; 1)$

22 Polynomické funkce

1 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = x^3 + bx^2$ vzhledem k parametru $b \in \mathsf{R}$.

2 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = 3x^5 - 5x^3$.

3 K funkci $f\colon y = (x-1)^3$ najděte funkci inverzní a načrtněte grafy obou funkcí.

4 V R řešte početně i graficky nerovnici $|2 - x^2| < x$.

5 Je dána funkce $f\colon y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Určete koeficienty a, b, c, je-li dáno $f(-1) = f(1) = f(3) = 0$.

6 Určete čísla $a, b \in \mathsf{R}$ tak, aby funkce $f\colon y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ měla lokální maximum v bodě $x = -1$ a lokální minimum v bodě $x = 3$.

7 Dokažte, že rovnice $x^4 - 4x + 1 = 0$ má v intervalu $(0; 1)$ právě jeden kořen.

8 Je dána funkce $f\colon y = ax^3 + bx^2 + 1$. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathsf{R}$ je bod $P[1; -1]$ inflexním bodem grafu funkce f. Pro taková a, b napište rovnici tečny t grafu funkce f v bodě P.

9 Je dána funkce $f\colon y = x^2 + 2x$. Ověřte, zda jsou pro funkci f splněny v intervalu $\langle -3; 0\rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty, a určete bod c, v němž $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-3)}{3}$.

10 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = x^3 + 3|x|$.

1. $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $b > 0$: v bodě $-\frac{2}{3}b$ lokální maximum, v bodě 0 lokální minimum; $b < 0$: v bodě 0 lokální maximum, v bodě $-\frac{2}{3}b$ lokální minimum; $b = 0$: nemá extrémy **2.** $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, v bodě -1 lokální maximum, v bodě 1 lokální minimum, inflexní body: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **3.** $f^{-1}\colon y = \sqrt[3]{x} + 1$ **4.** $(1; 2)$ **5.** $a = -3$, $b = -1$, $c = 3$ **6.** $a = -3$, $b = -9$ **7.** Návod. Musíte ukázat, že funkce $f(x) = x^4 - 4x + 1$ je v intervalu $(0; 1)$ monotónní a současně platí $f(0) \cdot f(1) < 0$. **8.** $a = 1$, $b = -3$; $t\colon 3x + y - 2 = 0$ **9.** $c = -\frac{3}{2}$ **10.** $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, lokální maximum v bodě -1, lokální minimum v bodě 0, $f'(0)$ neexistuje

23 Racionální lomené funkce

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ b) $f\colon y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ c) $f\colon y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ c) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

3 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{1 - x}$ b) $f\colon y = \dfrac{x}{1 - x}$ c) $f\colon y = \dfrac{|x|}{1 - x}$

4 Je dána funkce $f\colon y = x + \dfrac{1}{x}$. Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy, asymptoty a načrtněte graf funkce f.

5 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$. Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy, asymptoty a načrtněte graf funkce f.

6 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$. Určete základní vlastnosti funkce f a charakterizujte transformaci $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

7 Přímo podle definice vypočtěte derivaci funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ v daném bodě x_0 ($x_0 \neq 0$) a napište rovnici tečny grafu funkce f v bodě $T[x_0; f(x_0)]$.

8 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$.

9 Načrtněte graf funkce $f\colon y = \dfrac{1+|x|}{1-x^2}$.

10 Načrtněte graf funkce $f\colon y = \dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}$.

1. a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=(0;1\rangle$, lokální maximum v bodě 0; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)= = \left\langle -\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$, lokální minimum v bodě -1, lokální maximum v bodě 1; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f)=\langle 0;1)$, lokální minimum v bodě 0 **2.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=(0;+\infty)$, extrémy nemá; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-2;2\}$, $\mathsf{H}(f)=\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right\rangle\cup(0;+\infty)$, lokální maximum v bodě 0; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{2;3\}$, $\mathsf{H}(f)=(-\infty;-4\rangle\cup(0;+\infty)$, lokální maximum v bodě $\frac{5}{2}$ **3.** a) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, extrémy nemá; b) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-1\}$, extrémy nemá; c) $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{1\}$, $\mathsf{H}(f)=(-\infty;-1)\cup\langle 0;+\infty)$, lokální minimum v bodě 0 **4.** $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=(-\infty;-2\rangle\cup\langle 2;+\infty)$, lokální minimum v bodě 1, lokální maximum v bodě -1; asymptoty: $y=x$, $x=0$ **5.** $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{0\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}$, lokální minimum v bodě 2, asymptoty: $y=x$, $x=0$ **6.** $\mathsf{D}(f)=\mathsf{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$, $\mathsf{H}(f)=\mathsf{R}\setminus\{\frac{a}{c}\}$, asymptoty: $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$ **7.** $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$, $y_0x+x_0y-2=0$ **8.** $S=\frac{3}{2}$

24 Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice

1 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y=2^{x-3}-1$

b) $f\colon y=2^{|x-3|}-1$

c) $f\colon y=2^{|x|-3}-1$

d) $f\colon y=\left|2^{x-3}-1\right|$

2 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y=\mathrm{e}^{1-x^2}$

b) $f\colon y=x\mathrm{e}^{-x^2}$

c) $f\colon y=x^2\mathrm{e}^{-x}$

d) $f\colon y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

3 K funkci f najděte funkci inverzní a načrtněte grafy obou funkcí:

a) $f\colon y=\mathrm{e}^{x-1}+2$

b) $f\colon y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}-1$

4 V R řešte rovnice:

a) $4^{2x}-6\cdot 4^x+8=0$

b) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$

5 V R řešte nerovnice:

a) $3^{3-x^2} < 9^x$

b) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 > 0$

6 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$ a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \log_2 x - 3$

b) $f\colon y = \log_2 |x| - 3$

c) $f\colon y = \log_2(x - 3)$

d) $f\colon y = \log_2 |x - 3|$

7 K funkci f najděte funkci inverzní a načrtněte grafy obou funkcí:

a) $f\colon y = \log_2(x + 3) - 4$

b) $f\colon y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 1$

8 Určete $\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$, lokální extrémy a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = x - \ln x$

b) $f\colon y = x + \ln x$

c) $f\colon y = x \ln x$

d) $f\colon y = \dfrac{\ln x}{x}$

9 V R řešte rovnice:

a) $\log x + \dfrac{3}{\log x} = 4$

b) $\log_3\bigl(5 + 4\log_3(x - 1)\bigr) = 2$

10 V R řešte nerovnice:

a) $0 < \dfrac{|\log x| - 1}{3} < 1$

b) $\log_{2x+3} x^2 < 1$

1. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (-1; +\infty)$, extrémy nemá; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$, lokální minimum v bodě 3; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left\langle -\frac{7}{8}; +\infty\right)$, lokální minimum v bodě 0; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; +\infty)$, lokální minimum v bodě 3 **2.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = (0; \mathrm{e}\rangle$, lokální maximum v bodě 0; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}; \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\rangle$; lokální minimum v bodě $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, lokální maximum v bodě $\frac{\sqrt{2}}{2}$, inflexní body $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}_0^+$, lokální maximum v bodě 2, inflexní body $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = (-\infty; 0) \cup \langle \mathrm{e}; +\infty)$, lokální minimum v bodě 1 **3.** a) $f^{-1}\colon y = \ln(x-2) + 1$; b) $f^{-1}\colon y = -\log_3(x+1) - 2$ **4.** Návod. Substituce $\sqrt{5+\sqrt{24}} = a$, $\sqrt{5-\sqrt{24}} = b$, $ab = 1$. a) $\frac{1}{2}$, 1; b) -2, 2 **5.** a) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; b) $(1; +\infty)$ **6.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = (3; +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{3\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ **7.** a) $f^{-1}\colon y = 2^{x+4} - 3$; b) $f^{-1}\colon y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$ **8.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \langle 1; +\infty)$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \left\langle -\frac{1}{\mathrm{e}}; +\infty\right)$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{H}(f) = \left\langle -\infty; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **9.** a) 10, 10^3; b) 4 **10.** a) $(10^{-4}; 10^{-1}) \cup (10; 10^4)$; b) $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3)$

25 Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

1 Je dána funkce $f\colon y = Ag(Bx + C) + D$, kde $g \in \{\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}\}$. Určete její základní vlastnosti a vysvětlete význam parametrů A, B, C, D při transformaci $y = g(x) \longrightarrow y = Ag(Bx + C) + D$.

2 Určete definiční obor, obor hodnot, periodu p a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \sin 2x$

b) $f\colon y = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$

c) $f\colon y = 3\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$

d) $f\colon y = 3\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) + 1$

3 Určete definiční obor, obor hodnot, periodu p a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \cos \frac{1}{2}x$

b) $f\colon y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$

c) $f\colon y = 2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$

d) $f\colon y = 2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi) - 1$

4 Určete definiční obor, obor hodnot, periodu p a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \operatorname{tg} 3x$ b) $f\colon y = \operatorname{tg}(3x - \dfrac{1}{2}\pi)$

c) $f\colon y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(3x - \frac{1}{2}\pi)$ d) $f\colon y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(3x - \frac{1}{2}\pi) + 2$

5 Určete definiční obor, obor hodnot, periodu p a načrtněte graf funkce:

a) $f\colon y = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x$ b) $f\colon y = \operatorname{cotg}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi)$

c) $f\colon y = 4\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi)$ d) $f\colon y = 4\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi) - 3$

6 Vyjádřete $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, je-li dáno $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ a $x \in \big(0; \frac{1}{2}\pi\big)$.

7 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

a) $\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = 1$ b) $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(\pi - 3x)$

c) $2\cos^2 x = \cos x + 1$ d) $\cos 3x = \sin x$

8 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice ($a, b, c \in \mathsf{R}$):

a) $a\sin x + b\cos x = c$ b) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -1$ d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

9 V R^2 řešte soustavu rovnic:

a) $\cos x + \cos y = \sqrt{3}$

$x + y = \frac{1}{3}\pi$

b) $\sin 2y = \sin x$

$x + y = \frac{1}{3}\pi$

10 V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte nerovnice:

a) $\sin x + \cos 2x > 1$ b) $\sin x > -\dfrac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} \leqq 3$ d) $\sin x + \cos x \leqq \dfrac{1}{\sin x}$

2. a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, $p = \pi$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, $p = \pi$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -3; 3\rangle$, $p = \pi$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -2; 4\rangle$, $p = \pi$ **3.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, $p = 4\pi$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, $p = 4\pi$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -2; 2\rangle$, $p = 4\pi$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -3; 1\rangle$, $p = 4\pi$ **4.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{1}{6}\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = \frac{1}{3}\pi$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{(k+1)\frac{1}{3}\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = \frac{1}{3}\pi$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{(k+1)\frac{1}{3}\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = \frac{1}{3}\pi$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{(k+1)\frac{1}{3}\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = \frac{1}{3}\pi$ **5.** a) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = 2\pi$; b) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{\frac{1}{2}(4k+1)\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = 2\pi$; c) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{\frac{1}{2}(4k+1)\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = 2\pi$; d) $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{\frac{1}{2}(4k+1)\pi;\ k \in \mathsf{Z}\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$, $p = 2\pi$ **6.** $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{1-t^2}{2t}$ **7.** a) $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$, $\frac{19}{12}\pi$; b) $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$; c) 0, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$; d) $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$ **8.** Návod. Rovnici $a\sin x + b\cos x = c$ upravíme na tvar $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a určíme $y \in \mathsf{R}$ tak, aby $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos y$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin y$. Odtud plyne $\sin x\cos y + \sin y\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ neboli $\sin(x+y) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. b) $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$; c) $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; d) 0, $\frac{2}{3}\pi$ **9.** a) $\{[\frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{1}{6}\pi - 2k\pi];\ k \in \mathsf{Z}\}$; b) $\{[\frac{2}{9}\pi - \frac{2}{3}k\pi; \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi];\ k \in \mathsf{Z}\}$; $\{[-\frac{1}{3}\pi - 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi];\ k \in \mathsf{Z}\}$ **10.** a) $\left(0; \frac{1}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \pi\right)$; b) $\left(0; \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi; 2\pi\right)$; c) $\left(0; \frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi; 2\pi\right)$; d) $\left(0; \frac{1}{4}\pi\right\rangle \cup \left\langle\frac{1}{2}\pi; \pi\right) \cup \left\langle\frac{5}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi\right\rangle$

26 Posloupnosti a řady

1 Je dána posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Zjistěte, zda je monotónní, omezená, a vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$:

a) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $b_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

2 Posloupnost danou vzorcem pro n-tý člen zadejte rekurentně:

a) $a_n = 2^{2-n}$ b) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

c) $a_n = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^n$

Poznámka. Uvedená řešení úlohy 2 mohou být vyjádřena i jiným způsobem, než je uvedeno ve výsledku.

3 Posloupnost danou rekurentně vyjádřete vzorcem pro n-tý člen:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n$ b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n$

c) $a_1 = \log 3,\ a_{n+1} = a_n + \log 3$ d) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + n^2$

4 Zjistěte, zda existuje konvexní n-úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 100° a každý následující úhel je o 10° větší než předcházející.

5 Čísla, pomocí nichž jsou vyjádřeny délky stran pravoúhlého trojúhelníku, tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte, že jsou v poměru $3:4:5$.

6 Dokažte, že

a) pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $s_n = \dfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$;

b) pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 1$ platí $s_n = a_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

7 Počet obyvatel státu na počátku roku 2000 byl N_0. V kterém roce překročí počet obyvatel tohoto státu k-násobek uvedeného počátečního stavu, jestliže předpokládaný stálý roční přírůstek je $p\,\%$?

8 Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 21, součet jejich druhých mocnin je 189. Vypočtěte je.

9 Určete:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{5}-2\right)^n$

10 V R řešte rovnice:

a) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$,

b) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = \sqrt{10 \cdot 2^x - 4}$,

c) $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \ldots = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}$,

d) $1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \ldots = \dfrac{8}{x+10}$.

1. a) rostoucí, $b_n \in \left\langle \frac{1}{2}; 1\right)$, 1; b) klesající pro $n \geqq 3$, $b_n \in \left(0; \frac{9}{8}\right\rangle$, 0 **2.** a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$; b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$; c) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}-1)$, $a_{n+1} = a_n(\sqrt{2}-1)$ **3.** a) $a_n = n!$; b) $a_n = 2^{n-1}$; c) $a_n = \log 3^n$; d) $a_n = 2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2 = 2+$ $+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ **4.** ano, pro $n = 9$, $n = 8$ **7.** $2\,000+n$; $n = \frac{\log k}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ **8.** Návod. Uvažte rovnosti: $1+q^2+q^4 = (1+q+q^2)^2 - 2q(1+q+q^2) = (1+q+q^2)(1-q+q^2)$; 3, 6, 12 **9.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ **10.** a) $\sqrt{2}-1$; b) -1, 1; c) $\{-\frac{1}{6}\pi + k\pi;\ k \in \mathrm{Z}\}$, $\{\frac{5}{6}\pi + k\pi;\ k \in \mathrm{Z}\}$; d) 4, -6

27 Spojitost a limita funkce

1 Užitím vlastností spojitých funkcí v uzavřeném intervalu řešte v R nerovnice:

a) $x^3 + x^2 - 12x \geqq 0$ b) $x^4 \leqq x^2$ c) $x^3 > x$ d) $x^3 < x^2$

2 Užitím vlastností spojitých funkcí v uzavřeném intervalu řešte v R nerovnice:

a) $\dfrac{x+1}{5-x^2} > 0$ b) $\dfrac{1}{x} < x$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{(x+1)^2} < 0$ d) $\dfrac{4x-x^2}{x+7} \leqq 0$

3 Dokažte, že rovnice $x + \mathrm{e}^x = 0$ má aspoň jeden kořen v intervalu $(-1, 0)$. Načrtněte grafy funkcí $f\colon y = x$, $g\colon y = \mathrm{e}^x$ a odhadněte graf funkce $h\colon y = x + \mathrm{e}^x$. Určete asymptoty grafu funkce h.

4 Určete rovnice asymptot grafu funkce $f\colon y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ a načrtněte graf funkce f. Pak dokažte, že $f(x) \geqq 3$ pro každé $x \in \mathsf{R}^+$.

5 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, je-li dáno:

a) $f\colon y = x^2$, $x_0 = 1$, b) $f\colon y = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$.

6 Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

7 Jsou dány polynomy $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, $Q(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

8 Dokažte, že rovnice $x^3 + 5x - 1 = 0$ má v intervalu $(0, 1)$ právě jeden kořen.

9 Věta. *Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, v němž platí $f(c) = 0$.*
Vyložte význam uvedené věty a ilustrujte ji náčrtky.

10 Určete intervaly (a, b), $a, b \in \mathsf{Z}$, $|b - a| = 1$, v nichž leží kořeny rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$.

1. a) $\langle -4; 0\rangle \cup \langle 3; +\infty)$; b) $\langle -1; 1\rangle$; c) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; d) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ **2.** a) $\left(-\infty; -\sqrt{5}\right) \cup \left\langle -1; +\sqrt{5}\right)$; b) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; c) $(-3; -1) \cup (-1; 2)$; d) $(-7; 0\rangle \cup \cup \langle 4; +\infty)$ **4.** rovnice asymptot $y = 2x$, $x = 0$ **5.** a) 2; b) $-\frac{1}{4}$ **6.** a) 3; b) 2; c) 2; d) -2; e) 2; f) -1 **7.** $\frac{1}{4}$; 0 **10.** $(-2; -1)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$

28 Derivace funkce

1 Přímo podle definice vypočtěte derivace funkcí

$$f\colon y = \cos x \qquad \text{a} \qquad g\colon y = \operatorname{tg} x$$

v bodě x_0.

2 Přímo podle definice vypočtěte derivaci funkce $f\colon y = x^n$ v daném bodě x_0 v případech a) $n \in \mathsf{N}$, b) $n \in \mathsf{Z}$.

3 Pod jakými úhly protíná graf funkce $f\colon y = \sin x$ souřadnicovou osu x?

4 Napište rovnici tečny t a normály n grafu funkce $f\colon y = 2x - \ln x$ v jeho bodě $T[x_0, y_0]$, kde $x_0 = 1$.

5 Určete rovnice tečen rovnoběžných s osou x ke křivce o rovnici $y = x^3 - 2x^2 + x$.

6 Vyslovte Rolleovu a Lagrangeovu větu a vysvětlete jejich geometrickou interpretaci na funkci $f\colon y = \sin x$ v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$, resp. $\left\langle 0; \frac{3}{4}\pi\right\rangle$.

7 Najděte čísla a, b taková, aby bod $[1,1]$ byl inflexním bodem grafu funkce $f\colon y = x^3 + ax^2 - 3x + b$.

8 Najděte polynomickou funkci $y = f(x)$ nejnižšího možného stupně, která má následující vlastnosti:

a) lokální maximum v bodě $x = 1$ a lokální minimum v bodě $x = 3$,

b) $f(1) = 6$, $f(3) = 2$.

9 Vyslovte L'Hospitalovo pravidlo a vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x$

10 Závislost dráhy tělesa vrženého svisle vzhůru na čase je dána rovnicí

$$s = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

kde v_0 je počáteční rychlost a g tíhové zrychlení.
Určete okamžitou rychlost tělesa v čase t. V kterém okamžiku a ve které poloze je rychlost tělesa rovna nule? S jakou rychlostí a ve kterém okamžiku dopadne těleso na místo, z kterého bylo vrženo?

1. $f'(x_0) = -\sin x_0$; $g'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0}$ **2.** v obou případech $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$ **3.** $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ **4.** $t\colon y = x + 1$, $n\colon y = -x + 3$ **5.** $y = 0$, $y = \frac{4}{27}$ **7.** $a = -3$, $b = 6$ **8.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ **9.** Návod. Pro $x > 0$ platí $x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. a) $\frac{1}{6}$; b) 0 **10.** $v = v_0 - gt$, $t = \frac{v_0}{g}$, $s = \frac{v_0^2}{2g}$, $t_1 = \frac{2v_0}{g}$, $v_1 = -v_0$

29 Užití diferenciálního počtu

1 Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \sqrt{1 - x^2}$.

2 V intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \sin x + \cos x$.

3 Číslo 28 vyjádřete jako součet dvou sčítanců tak, aby jejich součin byl maximální.

4 Která přímka procházející bodem $[1; 2]$ ohraničuje spolu s osami souřadnic v prvním kvadrantu trojúhelník o nejmenším obsahu?

5 Užitím diferenciálního počtu vypočtěte vzdálenost bodu Q od přímky AB, je-li $Q[1; 1]$, $A[1; 5]$, $B[-1; 1]$.

6 Najděte poloměr r a středový úhel φ kruhové výseče, která má při daném obvodu $2s$ maximální obsah.

7 Je dána elipsa o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Vypočtěte rozměry obdélníku, který je do elipsy vepsán tak, že je souměrný podle souřadnicových os, a který má přitom maximální obsah.

8 Vypočtěte rozměry obdélníku maximálního obsahu vepsaného do půlkruhu o poloměru r.

9 Na výrobu konzervy tvaru válce se má spotřebovat $8\,\mathrm{dm}^2$ bílého plechu. Jaké rozměry má konzerva mít, aby měla maximální objem?

10 V prostoru je umístěn bodový světelný zdroj. Určete poloměr x koule, jejíž střed má od světelného zdroje danou vzdálenost a, tak aby osvětlená část povrchu koule byla maximální.

[**1.** $\mathsf{D}(f) = \langle -1; 1\rangle$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0; 1\rangle$; minimum v bodech -1, 1; maximum v bodě 0 **2.** minimum v bodě $\frac{5}{4}\pi$; maximum v bodě $\frac{1}{4}\pi$; inflexní body $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ **3.** $14 + 14$ **4.** $y = -2x + 4$; $S = 4$ **5.** $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ **6.** $r = \frac{1}{2}s$, $\varphi = 2$ **7.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, $S = 2ab$ **8.** $r\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ **9.** $v = \frac{4}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{dm}$; $r = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{dm}$ **10.** $x = \frac{2}{3}a$]

30 Integrální počet

1 Najděte funkci F, pro kterou platí:

a) $\forall x \in \mathsf{R}\colon F'(x) = x^2 + 2x - 4,\ F(2) = 1,$

b) $\forall x \in \mathsf{R}^+\colon F'(x) = \dfrac{1}{x^2},\ F(1) = 2,$

c) $\forall x \in \mathsf{R}\colon F''(x) = x - 2,\ F'(1) = 2,\ F(2) = 3.$

2 Dokažte, že obě funkce $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$, $G(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$ jsou primitivní k funkci $f(x) = \sin x \cos x$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

3 Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int (2x+3)^5 \,\mathrm{d}x$

4 Lomený výraz $\dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ napište ve tvaru součtu dvou zlomků, jejichž čitatelé jsou celá čísla a jmenovatelé lineární dvojčleny (tzv. rozklad na parciální zlomky), a vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3}\,\mathrm{d}x.$$

5 Je-li f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li v intervalu $\langle a, b\rangle$ nerovnosti $m \leqq f(x) \leqq M$, potom $m(b-a) \leqq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a)$. Užitím této věty odhadněte integrál $\displaystyle\int_2^3 \ln x\,\mathrm{d}x$.

6 Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = 5x - x^2$, $y = x + 4$, $y = 0$, $x = 5$.

7 Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f, kde $f(x) = 4 - (x+1)^2$, a tečnami tohoto grafu v průsečících grafu funkce f s osou x.

8 Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolami o rovnicích

$$y = x^2 - 4x + 2,$$
$$y = -x^2 + 6x - 6.$$

9 Pomocí integrálního počtu vyjádřete objem

a) rotačního kužele, který má výšku v a podstavu o poloměru r,

b) rotačního komolého kužele, který má výšku v a podstavy o poloměrech r_1, r_2.

10 Vypočtěte obsahy obou částí kruhu, které na kruhu omezeném kružnicí o rovnici $x^2 + y^2 = 8$ vymezuje parabola o rovnici $y^2 = 2x$.

1. a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + \frac{7}{3}$; b) $F(x) = -\frac{1}{x} + 3$; c) $F(x) = \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{4}{3}$
3. a) $x \ln x - x + C$; b) $C - \ln|\cos x|$; c) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; d) $\frac{1}{12}(2x+3)^6 + C$
4. $\frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$ **5.** $\ln 2 < \int_2^3 \ln x \,\mathrm{d}x < \ln 3$ **6.** $\frac{59}{3}$ **7.** $\frac{16}{3}$ **8.** 9
9. a) $\frac{1}{3}\pi r^2 v$; b) $\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ **10.** $2\pi + \frac{4}{3}$, $6\pi - \frac{4}{3}$

LITERATURA

[1] *Benda, P., Daňková, B., Skála, J.*: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. SPN, Praha, 1971.

[2] *Bušek, I.*: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Prometheus, Praha, 2005.

[3] *Bušek, I.*: Sbírka úloh pro gymnázia. Analytická geometrie. Prometheus, Praha, 2008.

[4] *Bušek, I., Mannová, B., Šedivý, J., Riečan, B.*: Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií. SPN, Praha, 1987.

[5] *Bušek, I., Bero, P., Calda, E., Riečan, B., Smida, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií. SPN, Praha, 1991.

[6] *Bušek, I., Calda, E.*: Základní poznatky z matematiky. Prometheus, Praha, 2008.

[7] *Bydžovský, B., Vojtěch, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol. JČMF, Praha, 1924.

[8] *Bydžovský, B., Teplý, S., Vyčichlo, F.*: Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol. JČMF, Praha, 1936.

[9] *Calda, E.*: Komplexní čísla. Prometheus, Praha, 2008.

[10] *Calda, E., Dupač, V.*: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Prometheus, Praha, 2008.

[11] *Fuchs, E., Hrubý, D., a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha, 2000.

[12] *Fuchs, E., Kubát, J., a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Prometheus, Praha, 2001.

[13] *Hrubý, D., Kubát, J.*: Diferenciální a integrální počet. Prometheus, Praha, 2008.

[14] *Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L.*: Rovnice a nerovnice. Prometheus, Praha, 2008.

[15] *Kočandrle, M., Boček, L.*: Analytická geometrie. Prometheus, Praha, 2008.

[16] *Kubát, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ. Prometheus, Praha, 2008.

[17] *Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. Maturitní minimum. Prometheus, Praha, 2007.

[18] *Maška, O.*: Matematika v úlohách. I. Aritmetika a algebra. Barvič a Novotný, Brno, 1936.

[19] *Odvárko, O.*: Funkce. Prometheus, Praha, 2008.

[20] *Odvárko, O.*: Goniometrie. Prometheus, Praha, 2008.

[21] *Odvárko, O.*: Posloupnosti a řady. Prometheus, Praha, 2008.

[22] *Odvárko, O.*: Sbírka úloh pro gymnázia. Funkce. Prometheus, Praha, 2008.

[23] *Odvárko, O.*: Sbírka úloh pro gymnázia. Goniometrie. Prometheus, Praha, 2007.

[24] *Odvárko, O.*: Sbírka úloh pro gymnázia. Posloupnosti a řady. Prometheus, Praha, 2007.

[25] *Odvárko, O., a kol.*: Úlohy o relacích a vektorové algebře pro II. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1971.

[26] *Ostrý, M.*: Geometrie v úlohách. Česká grafická Unie, n. p., Praha, 1949.

[27] *Petáková, J.*: Matematika-příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, Praha, 2008.

[28] *Pomykalová, E.*: Planimetrie. Prometheus, Praha, 2008.

[29] *Pomykalová, E.*: Stereometrie. Prometheus, Praha, 2008.

[30] *Riečan, B., Franek, M., Červenková, O.*: Úlohy z matematiky pro III. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1972.

[31] *Riečan, B., Franek, M., Červenková, O.*: Úlohy z diferenciálního a integrálního počtu pro III. a IV. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1978.

[32] *Smida, J., Šedivý, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií. SPN, Praha, 1985.

[33] *Smida, J., Božek, M., Odvárko, O.*: Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií. SPN, Praha, 1986.

[34] *Šedivý, J., Lukátšová, J.*: Úlohy z algebry a geometrie pro I. ročník gymnázií. SPN, Praha, 1973.

[35] *Šedivý, J., a kol.*: Úlohy o výrocích a množinách pro I. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1970.

[36] *Tomší, F.*: Sbírka maturitních příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie. nákladem vlastním, Kutná Hora, 1927.

[37] *Vejsada, F., Polesný, V., Talafous, F., Šilháček, K.*: Sbírka úloh z algebry pro I.–III. ročník. SPN, Praha, 1965.

[38] *Vejsada, F., Talafous, F.*: Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ. SPN, Praha, 1969.

[39] *Vyšín, J., a kol.*: Úlohy z matematiky pro IV. ročník gymnázií. SPN, Praha, 1976.

RNDr. Dag Hrubý

Matematická cvičení
pro střední školy

Obálku navrhl Martin Mašek
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Čestmírova 10, 140 00 Praha 4,
roku 2008
tel./fax: 241 740 172
e-mail: odbyt@prometheus-nakl.cz
http://www.prometheus-nakl.cz

Edice Učebnice pro střední školy
Odpovědná redaktorka Mgr. Marie Nováková
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

1. vydání

96 21 216

ISBN 978-80-7196-374-5