Negace a kvantifikátory

Příklad 1. Negujte následující výroky (Písmena A, B, C označují množiny reálných čísel, písmena K, L, M množiny přirozených čísel):

(1) Přirozené číslo m je sudé a číslo $m^2 + 1$ je prvočíslo.

(2) Množina A je konečná nebo má konečně mnoho záporných prvků.

(3) Trojúhelník, který má dvě shodné těžnice, je rovnoramenný.

(4) Je-li číslo m^2 dělitelné devíti, je číslo m^3 dělitelné 27.
(Předpokládáme, že číslo m je celé.)

(5) Nejvýše 12 žáků naší třídy nosí brýle.

(6) Nastane to v alespoň devíti případech z deseti.

(7) Ve třídě je právě sedm dívek a více než třikrát tolik chlapců.
(Negaci výhodně vyjádřete ve formě implikace.)

(8) Každé číslo z množiny A je větší než 10.

(9) Existuje prvek množiny B, který není prvkem množiny A.

(10) Existuje přímka p jdoucí bodem X, která je kolmá k dané přímce q.

(11) Existuje přímka p, která je kolmá k oběma daným mimoběžkám q a r.

(12) Některé číslo z A je větší než druhá mocnina libovolného čísla z B.

(13) Je-li každý prvek A záporné číslo, pak žádný prvek B není větší než 1.

(14) Je-li některý prvek A kladné číslo, pak všechna čísla z B jsou celá.

(15) V množině K neleží žádné prvočíslo nebo libovolné číslo z L je liché.

(16) Pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $b \leqq a^2$.

(17) Pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $b > a + c$ pro každé $c \in C$.

(18) Některá z množin K, L, M obsahuje nekonečně mnoho prvočísel.

(19) Žádné číslo z K není násobkem žádného čísla z L.

(20) Některé číslo z K není násobkem žádného čísla z L.

(21) V množině K neleží žádný násobek jistého čísla z L.

(22) Jsou-li v K alespoň čtyři prvočísla, pak v L jsou nejvýše dvě prvočísla.

(23) Jsou-li některá dvě čísla $a \in A$ a $b \in B$ navzájem opačná, pak jsou to jedině čísla $a = 1$ a $b = -1$.

(24) Pro libovolná čísla $x \in A$, $y \in B$ a $z \in C$ platí $x \leqq y^2 \leqq z^3$.

Příklad 2. Ke všem implikacím z Příkladu 1 vytvořte obměněné implikace.

Nutné, postačující a ekvivalentní podmínky

Příklad. Do konstrukcí „K tomu, aby ... , je nutné, aby ...“, „K tomu, aby ... , stačí, aby ...“, „K tomu, aby ... , je nutné a stačí, aby ...“ doplňte následující dvojice výroků A a B tak, aby výsledné tvrzení bylo pravdivé.

(1) A: Úhly α a β jsou pravé.
B: Úhly α a β jsou shodné.

(2) A: Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.
B: Čtyřúhelník $ABCD$ je obdélník.

(3) A: Číslo x je dělitelné devíti.
B: Číslo x je dělitelné osmnácti.

(4) A: Číslo x je dělitelné devíti.
B: Číslo x má ciferný součet dělitelný osmnácti.

(5) A: Číslo x je dělitelné desíti.
B: Číslo x je dělitelné dvěma a pěti.

(6) A: Čísla x a y jsou dělitelná sedmi.
B: Číslo $x + y$ je dělitelné sedmi.

(7) A: Čísla x a y jsou dělitelná sedmi.
B: Číslo $x + 2y + 1$ není dělitelné sedmi.

(8) A: Přirozená čísla x a y jsou nesoudělná.
B: Přirozená čísla x a y jsou různá.

(9) A: Reálné číslo x je menší než 1.
B: Druhá mocnina reálného čísla x je menší než 1.

(10) A: Číslo x je celé.
B: Číslo $x + x$ je celé.

(11) A: Čtverce $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ mají stejný obsah.
B: Čtverce $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ mají stejnou stranu.

(12) A: Obdélníky $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$ mají stejný obsah.
B: Obdélníky $\mathcal{O}_1$ a $\mathcal{O}_2$ mají shodnou šířku i shodnou délku.

(13) A: Pravoúhlé trojúhelníky $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ mají shodné přepony.
B: Obě odvěsny $\mathcal{T}_1$ jsou shodné s odvěsnami $\mathcal{T}_2$.

(14) A: Trojúhelník $\mathcal{T}$ má právě dva vnitřní úhly ostré.
B: Trojúhelník $\mathcal{T}$ je tupoúhlý.