

Ideální počet aut taxislužby

Zadání

Majitel městské taxislužby zvažuje, zda pořídit další vozy a kolik jich pořídit tak, aby jeho výdělek byl co největší. Momentálně má 3 vozy, z nichž každý mu za měsíc vydělá průměrně 60 000 Kč. Dle letitých zkušeností v oboru však očekává, že s každým nakoupeným vozem průměrný výdělek každého vozu klesne o 5 000 Kč, neboť dojde k částečnému přelivu zákazníků do nového vozu. Musí také počítat s tím, že náklady na řidiče a vůz za jeden měsíc činí 40 000 Kč.

- Jaký je měsíční zisk majitele taxislužby nyní?
- Určete funkci, která vyjadřuje zisk majitele taxislužby v závislosti na počtu vozů. O kterou funkci se jedná a jak vypadá její graf?
- Stanovte maximální možný zisk majitele. O kolik se tento zisk liší od současného? Kolik vozů musí majitel koupit (nebo eventuálně prodat)?

Řešení a)

Každý ze tří vozů majiteli taxislužby vydělává čistý zisk (po odečtení nákladů) 20 000 Kč, dohromady tak nynější zisk činí 60 000 Kč.

Řešení b)

Označme x počet nově pořízených vozů a y zisk majitele za jednu noc. Víme, že čistý zisk jednoho vozu je 20 000 Kč, musíme však ještě odečíst částku za snížení tržby při koupi x vozů. Celkem tedy jeden vůz přinese majiteli zisk $20\,000 - 5\,000x$. Celkový zisk dostaneme vynásobením tohoto čísla novým počtem aut:

$$y = (20\,000 - 5\,000x)(x + 3)$$

Roznásobením a úpravou pravé strany jde vidět, že funkce $f: y = -5\,000x^2 + 5\,000x + 60\,000$ je kvadratická. Jejím grafem je konkávní parabola, protože koeficient u kvadratického členu je záporný.

Řešení c)

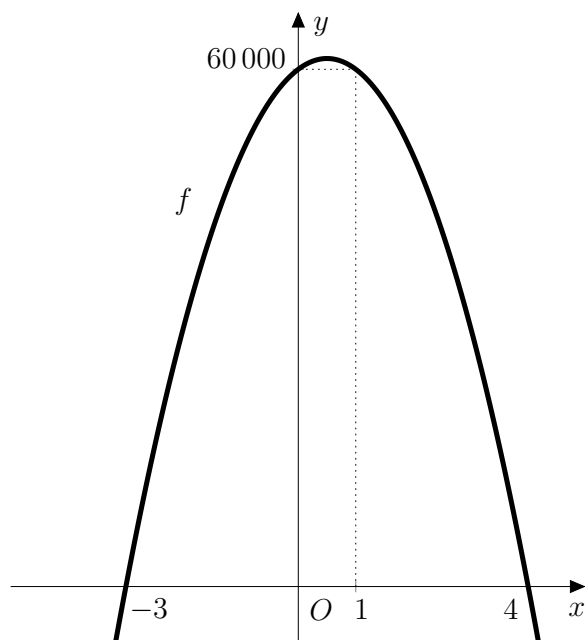
Naším úkolem je nyní určit maximum funkce f . To se nachází v bodě, který je aritmetickým průměrem reálných kořenů kvadratického polynomu (za předpokladu, že existují). Tyto kořeny nyní určíme:

$$-5\,000x^2 + 5\,000x + 60\,000 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou $x_1 = 4$ a $x_2 = -3$, tedy maximum funkce f je v bodě $x_{max} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$ (viz obrázek 1). Toto maximum je však nedosažitelné (nelze koupit půl auta). Nejvyšší funkční hodnota, kterou má smysl uvažovat, se nachází v nejbližších celočíselných bodech, tj. $x = 0$ nebo $x = 1$ (v obou bodech je stejná, jak plyne ze symetrie paraboly). To však znamená, že pro majitele není výhodné pořizovat další auta, protože jeho aktuální zisk je rovněž maximálním.



Obrázek 1: Graf funkce f

Poznámka: V databázi lze nalézt také podobné úlohy se slavnostmi (kde je odlišná interpretace výsledků) a kolotočem (kde žáci naopak analyzují předložený model).