Ideální vstupné na slavnosti

Zadání

Pořadatel slavností chce určit vstupné na slavnosti tak, aby jeho zisk byl maximální. Ví, že při stávající ceně 260 Kč může očekávat návštěvnost asi 1 200 lidí. Z minulých let také odhaduje, že při nárůstu ceny vstupenky o 20 korun přijde asi o 150 návštěvníků méně, zatímco při poklesu ceny vstupenky o 20 korun přijde naopak o 150 návštěvníků více. Dále lze předpokládat, že každý návštěvník utratí za nápoje v průměru asi 120 korun, což pro pořadatele znamená zisk 60 korun. Kapacita prostoru, na kterém se slavnosti odehrávají, činí 2 100 míst.

a) Při jaké ceně by pořadatel dosáhl maximálního zisku?

b) O kolik je maximální zisk vyšší, než by byl zisk při původní ceně?

c) Při jaké ceně vstupenek by pořadatel prodal všechny vstupenky a jaký by byl jeho zisk v porovnání se stávající cenou?

Řešení a)

Předpokládejme, že pořadatel změní cenu vstupenky o $x \cdot 20\,\text{Kč}$.[1] Jedna vstupenka tak bude stát $(260 + 20x)$ Kč a pořadatel bude dle zadání očekávat návštěvnost $(1200 - 150x)$ lidí. Za každého návštěvníka ještě pořadatel očekává zisk 60 korun. Pro celkový zisk y tak dostáváme vztah

$$y = \underbrace{(260 + 20x)(1200 - 150x)}_{\text{zisk za vstupenky}} + \underbrace{60 \cdot (1200 - 150x)}_{\text{zisk za nápoje}}$$

Roznásobením a úpravou pravé strany dostáváme funkci $f\colon y = -3\,000x^2 - 24\,000x + {}$ $+ 384\,000$, jejímž grafem je konkávní parabola. Naším úkolem je nyní určit maximum této funkce.

Víme, že graf funkce f protíná osu x v bodech odpovídajících kořenům kvadratického polynomu v předpisu funkce.[2] Ze symetrie paraboly pak plyne, že první souřadnice vrcholu je aritmetickým průměrem těchto kořenů. Tyto kořeny nyní určíme:

$$\begin{aligned} -3\,000x^2 - 24\,000x + 384\,000 &= 0 \\ x^2 + 8x - 128 &= 0 \\ (x - 8)(x + 16) &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme kořeny $x_1 = -16$ a $x_2 = 8$, tedy $x_{\max} = \frac{-16+8}{2} = -4$. Tomu odpovídá cena 180 Kč za jednu vstupenku, což je odpověď na první část úlohy.

[1] Např. pro $x = 3$ to bude znamenat zdražení o 60 Kč, pro $x = -0{,}5$ slevu o 10 Kč.

[2] Hypoteticky by mohla být celá parabola pod osou x, což ale není tento případ, neboť $f(0) > 0$. Proto musí být část paraboly nad osou x.

Řešení b)

Odpověď na druhou část úlohy je rozdílem $f(-4) - f(0)$. Obě funkční hodnoty proto určíme:

$$\begin{aligned} f(-4) &= -3\,000 \cdot (-4)^2 - 24\,000 \cdot (-4) + 384\,000 = 432\,000 \\ f(0) &= -3\,000 \cdot 0^2 - 24\,000 \cdot 0 + 384\,000 \qquad\qquad = 384\,000 \end{aligned}$$

Rozdíl obou částek je pak 48 000 Kč.

Řešení c)

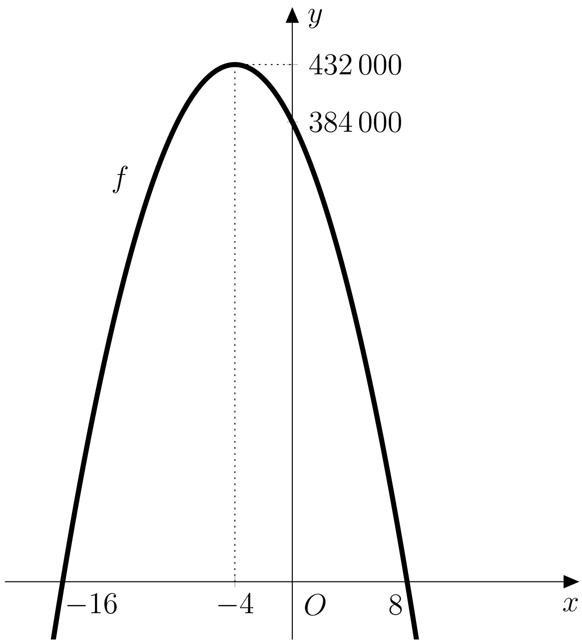
V poslední části úlohy předpokládáme, že na slavnosti přišel maximální možný počet lidí, tj. 2 100. Z úvodního odstavce víme, že při změně ceny vstupenky o $x \cdot 20$ Kč bude činit návštěvnost $(1200 - 150x)$ lidí. Dosadíme a vyřešíme jednoduchou lineární rovnici:

$$\begin{aligned} 1200 - 150x &= 2100 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Tomu odpovídá cena 140 Kč za jednu vstupenku. Celkový zisk pak odpovídá $f(-6)$, kterou určíme:

$$f(-6) = -3\,000 \cdot (-6)^2 - 24\,000 \cdot (-6) + 384\,000 = 420\,000$$

Rozdíl mezi tímto a stávajícím ziskem (z části b) víme, že činí 384 000 Kč) je 36 000 Kč.



Obrázek 1: Graf funkce f

Poznámka: Zadání úlohy vychází z jedné z neřešených úloh sbírky [1], str. 50, číslo 2.29. V databázi lze nalézt také podobné úlohy s taxislužbou (kde je odlišná interpretace výsledků) a kolotočem (kde žáci naopak analyzují předložený model).

Zdroje

[1] Robová J. et al. (2014). *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus.