

Matičky v sáčku

Zadání

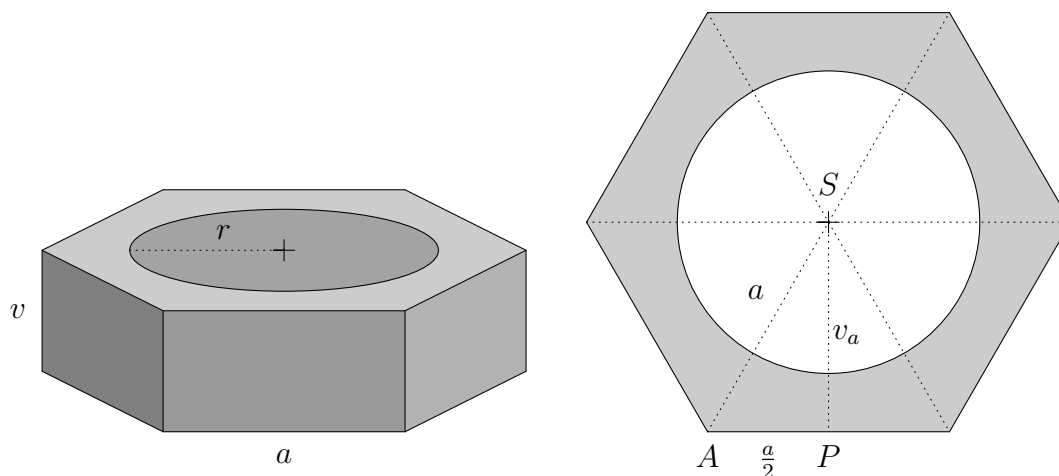
Matička má tvar pravidelného šestibokého hranolu o výšce 2 mm a délce hrany podstavy 4 mm, do kterého je naskrz vyvrtán válcový otvor o poloměru 2,5 mm. Jestliže jsou matičky vyrobeny ze zinku o hustotě $7,13 \text{ g cm}^{-3}$, a váhou v obchodě navážíme v papírovém sáčku 500 g takových matiček, kolik jich v sáčku přibližně máme?

Řešení

K řešení úlohy potřebujeme vypočítat hmotnost jedné matičky; protože známe hustotu materiálu, ze kterého je matička vyrobena, musíme nejdříve určit její objem. Ten je rozdílem objemů pravidelného šestibokého hranolu o délce strany podstavy $a = 4 \text{ mm}$ a výšce $v = 2 \text{ mm}$ a rotačního válce stejné výšky s poloměrem podstavy $r = 2,5 \text{ mm}$ (viz obrázek 1 vlevo). Objem prvního z řečených těles označme V_h , objem druhého V_v .

Určeme nejdříve V_h . Podstavu hranolu, pravidelný šestiúhelník, rozdělme třemi úhlopříčkami na šest shodných rovnostranných trojúhelníků a dále rozdělme jeden z těchto trojúhelníků výškou procházející středem S šestiúhelníka na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Tuto výšku označme v_a , její patu P a zbývající vrchol trojúhelníka pravoúhlého trojúhelníka A (viz obrázek 1 vpravo). Obsah podstavy je pak zřejmě dvanáctinásobkem obsahu trojúhelníku APS , který spočítáme užitím Pythagorovy věty:

$$S(\triangle APS) = \frac{\frac{a}{2} \cdot v_a}{2} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$



Obrázek 1: Axonometrický a pravoúhlý průmět matičky

Nyní určíme objem V_h :

$$V_h = 12 \cdot S(\triangle ABC) \cdot v = \frac{3va^2\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3} \text{ mm}^3.$$

Dosazením do vztahu pro výpočet objemu V_v válce dostáváme

$$V_v = \pi r^2 v = \frac{25}{2} \pi \text{ mm}^3,$$

a proto pro objem matičky V platí

$$V = V_h - V_v = 48\sqrt{3} - \frac{25}{2}\pi \doteq 43,87 \text{ mm}^3.$$

Užitím údaje o hustotě ρ zinku určíme dále hmotnost jedné matičky

$$m = \rho \cdot V = 7,13 \cdot 43,87 \cdot 10^{-3} \doteq 0,313 \text{ g},$$

a konečně určíme přibližný počet matiček N vydělením celkové hmotnosti plného sáčku hmotností jedné matičky (s ohledem na kontext úlohy počet zaokrouhlíme na desítky):

$$N = \frac{500}{0,313} \doteq 1600.$$

V sáčku o hmotnosti 500 g se nachází přibližně 1600 matiček.