Zvědavý skladník

Řešením ryze matematických problémů dostáváme přesné výsledky. Používáme-li však matematiku k řešení problémů světa kolem nás, dosáhneme absolutní přesnosti odpovědi jen zřídka. Přibližnost je někdy způsobena už jen tím, že při svých úvahách reálnou situaci zjednodušíme, jindy jsou pouze přibližně stanovena vstupní data (např. měřit délky nebo čas umíme jen s omezenou přesností) nebo je absolutně přesný výsledek reálně nedosažitelný a musí se zaokrouhlit. (Vezměme si jako příklad úlohu s papírovou čepicí, kde musí rodiče čepici vyrobit z kruhu o poloměru přesně $\frac{52}{2\pi}$ cm.)

S chybami vzniklými při zaokrouhlování musí počítat zejména uživatelé výpočetní techniky, která s čísly s nekonečným desetinným rozvojem pracovat neumí. Čísla $\sqrt{2}$ nebo π tak počítač chápe jako čísla s konečným (byť velkým) počtem desetinných míst. I čísla jako 0,1 však počítač zaokrouhluje, neboť se všemi čísly pracuje ve dvojkové poziční soustavě a platí

$$(0{,}1)_{10} = (0{,}0\overline{0011})_2.$$

Při opakovaném počítání se zaokrouhlenými hodnotami se vzniklé chyby mohou kumulovat. Tak i relativně malé zaokrouhlení vstupu programu může na jeho výstupu vést k významným chybám. 25. února 1991 třeba takové chyby způsobily selhání protiraketového systému Patriot v Saúdské Arábii, které vedlo k zásahu americké základny iráckými raketami. Při tomto jediném útoku zemřelo 28 vojáků.[1]

Abychom z málo zaokrouhlených vstupních dat dostali významně odlišný výsledek, nemusíme nutně s daty opakovaně počítat. O tom se přesvědčíme v následující sérii úloh, ve kterém využijeme tzv. zaokrouhlování na určitý počet platných číslic. Kladné reálné číslo r zaokrouhlíme na n platných číslic následujícím způsobem: vyjádříme r ve tvaru $a \cdot 10^b$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a \in \langle 1, 10)$ a $b \in \mathbb{Z}$, a následně zaokrouhlíme číslo a na $n-1$ desetinných míst podle standardních pravidel pro zaokrouhlování. Např. čísla $r = 31{,}258\,16$ a $s = 0{,}023\,123\,6$ zaokrouhlíme na čtyři platné číslice následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} r &= 31{,}258\,16 &&= 3{,}125\,816 \cdot 10^1 &&\doteq 3{,}126 \cdot 10^1 &&= 31{,}26 \\ s &= 0{,}023\,123\,6 &&= 2{,}312\,36 \cdot 10^{-2} &&\doteq 2{,}312 \cdot 10^{-2} &&= 0{,}023\,12. \end{aligned}$$

Zadání

Úlohy jsou inspirovány podobně formulovanou úlohou na stranách 9–15 publikace [1].

Úloha 1

Vedoucí skladu léčiv obdržel fakturu za objednané dva druhy vakcín, celkem za dodávku 597 balení vakcín Ixodinum proti encefalitidě a 386 balení vakcín Nopolio proti obrně bylo zaplaceno 401 950 Kč. Při vstupní kontrole však bylo zjištěno, že 86 balení Ixodinum a 19

[1] Podrobnosti viz [2, str. 208–210].

balení Nopolio je prošlých a musí být vráceny. Při reklamaci dostal za vrácené léky zpět 39 600 Kč.

Protože je zvědavý, chce si spočítat, jaká je nákupní cena jednoho balení obou vakcín. Nemá však na skladě kalkulačku, a proto se spokojí s přibližným řešením. Všechny údaje, které zná, před výpočtem zaokrouhlí na jednu platnou číslici.

Jak moc se bude jeho výsledek lišit od skutečné nákupní ceny? Pro oba druhy vakcín určete absolutní rozdíl vypočítané a skutečné ceny i relativní chybu v procentech.

Úloha 2

Po pár měsících přišla do skladu jiná dodávka, a to 504 balení vakcín Antiflu proti chřipce a 81 balení vakcín Kontradift proti záškrtu. Za dodávku bylo zaplaceno 198 900 Kč. Při vstupní kontrole bylo zjištěno, že 98 balení Antiflu a 18 balení Kontradiftu je prošlých, při vrácení dostal zpět 40 700 Kč.

Vedoucí skladu zopakoval svůj postup a spočítal si od ruky přibližnou nákupní cenu obou léků. Tentokrát se však nestačil divit. Z čeho vycházel jeho údiv a jak moc se jeho výsledek od skutečných cen lišil tentokrát?

Úloha 3

Soustavy z obou předchozích úloh znázorněte graficky ve vhodném softwaru (např. v GeoGebře). Porovnáním znázornění soustav z úlohy 1 se znázorněním soustav z úlohy 2 vysvětlete rozdíl v přesnostech výsledků obou úloh.

Řešení

Úloha 1

Vyřešme úlohu nejprve bez zaokrouhlování. Označme x cenu za jedno balení Ixodinu a y cenu za jedno balení Nopolio. Informace v zadání vedou na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 597x + 386y &= 401\,950 \\ 86x + 19y &= 39\,600, \end{aligned}$$

kterou vyřešíme a dostáváme skutečnou nákupní cenu balení Ixodinu 350 Kč a cenu balení Nopolio 500 Kč.
Po zaokrouhlení koeficientů řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 600x' + 400y' &= 400\,000 \\ 90x' + 20y' &= 40\,000, \end{aligned}$$

jejímž řešením je uspořádaná dvojice $\left[\frac{1000}{3}; 500\right]$. Výsledky úlohy shrneme v tabulce 1; relativní chybu přitom počítáme jako podíl rozdílu cen a skutečné ceny za jedno balení.

	skutečná cena	odhad ceny	rozdíl	relativní chyba
Ixodinum (1 balení)	350 Kč	$\frac{1000}{3} \doteq 333$ Kč	17 Kč	$\frac{17}{350} \doteq 4{,}9\,\%$
Nopolio (1 balení)	500 Kč	500 Kč	0 Kč	$\frac{0}{500} = 0\,\%$

Tabulka 1: Řešení úlohy 1

Úloha 2

Úlohu budeme řešit stejně jako předchozí, tentokrát označíme x cenu jednoho balení Antiflu a y cenu jednoho balení Kontradiftu. Tyto skutečné ceny jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} 504x + 81y &= 198\,900 \\ 98x + 18y &= 40\,700, \end{aligned}$$

odkud dostáváme $x = 250$ a $y = 900$. Po zaokrouhlení koeficientů řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 500x' + 80y' &= 200\,000 \\ 100x' + 20y' &= 40\,000, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $x' = 400$ a $y' = 0$. Z řešení vedoucího skladu se tedy zdá, že druhý lék byl do skladu dodán zadarmo, přitom je ve skutečnosti 2x dražší než první lék. Rozdíl cen i absolutní chybu zaneseme opět do tabulky (viz tabulka 2).

	skutečná cena	odhad ceny	rozdíl	relativní chyba
Antiflu (1 balení)	250 Kč	400 Kč	150 Kč	$\frac{150}{250} = 60\,\%$
Kontradift (1 balení)	900 Kč	0 Kč	900 Kč	$\frac{900}{900} = 100\,\%$

Tabulka 2: Řešení úlohy 2

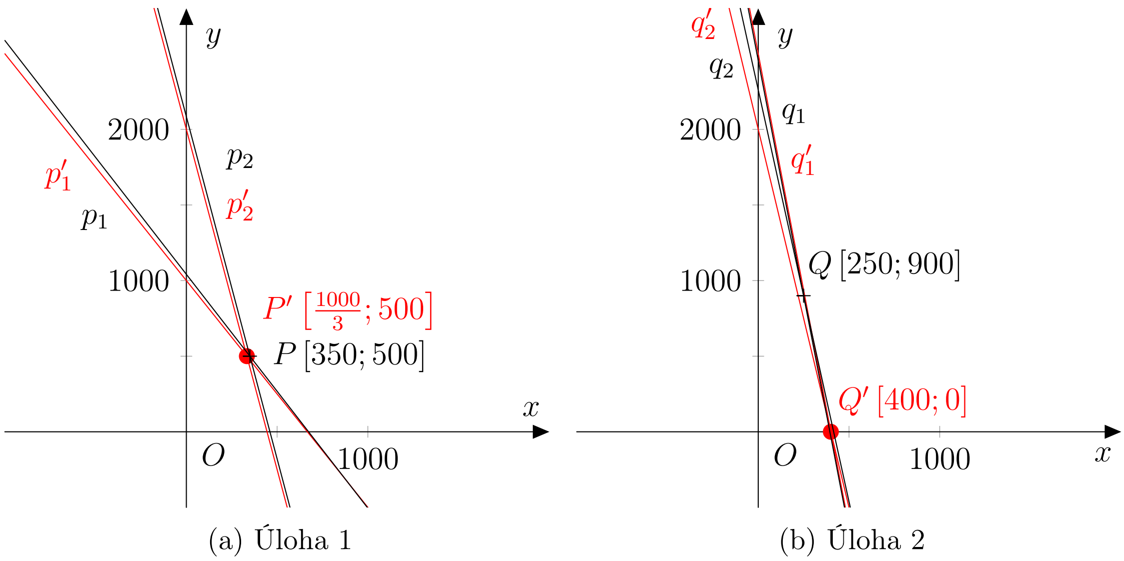
Úloha 3

Označme p_1, p_2 (resp. q_1, q_2) jednotlivé přímky dané rovnicemi soustavy s nezaokrouhlenými koeficienty v úloze 1 (resp. v úloze 2), jmenovitě

$$\begin{aligned} p_1&\colon 597x + 386y = 401\,950 \\ p_2&\colon 86x + 19y = 39\,600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1&\colon 504x + 81y = 198\,900 \\ q_2&\colon 98x + 18y = 40\,700. \end{aligned}$$

Přímky dané odpovídajícími rovnicemi se zaokrouhlenými koeficienty označme p_1', p_2', q_1' a q_2' a dále označme body $P \in p_1 \cap p_2$, $P' \in p_1' \cap p_2'$, $Q \in q_1 \cap q_2$ a $Q' \in q_1' \cap q_2'$. Grafické znázornění dvojice soustav pro každou úlohu zvlášť je vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Grafické znázornění soustav

Porovnáním obou grafických znázornění jde vidět, že v případě úlohy 2 je dvojice přímek q_1 a q_2 téměř rovnoběžná. Při zaokrouhlování koeficientů rovnice se obecně poloha přímek vůči souřadnému systému mění a mění se také poloha průsečíku. Změna polohy průsečíku je přitom daleko větší u přímek, které jsou téměř rovnoběžné. Z obrázku jde také vidět, proč bude zaokrouhlením v druhé úloze daleko více ovlivněna druhá souřadnice průsečíku (tj. cena vakcíny Kontradift), směrnice přímek q_1 a q_2 je totiž menší než -1.

Literatura

[1] Biermann K., Grötschel M., Lutz-Westphal B. (2010). *Besser als Mathe: Moderne angewandte Mathematik aus dem MATHEON zum Mitmachen.* Berlin: Vieweg+Teubner.

[2] Yates K. (2021). *Matematika pro život.* Kniha Zlín.