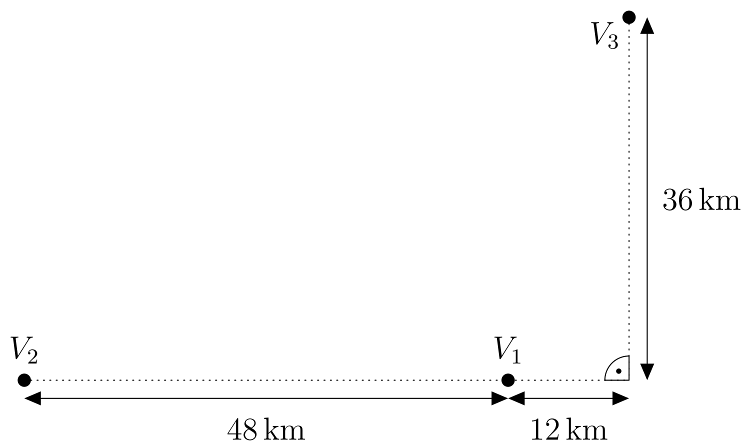
Hyperbolická navigace

Pokroky na poli elektrotechniky umožnily vývoj nových navigačních systémů založených na přenosu elektromagnetického vlnění. Příkladem takového systému je námořní navigace LORAN-C, která byla vyvinuta za druhé světové války v USA. Plavidlo zde přijímá synchronizovaný signál z dvojice vysílačů. Na základě zpoždění přijímaného signálu, které odpovídá rozdílu vzdáleností mezi plavidlem a vysílači, pak systém určí hyperbolu, na které dotyčné plavidlo musí ležet. Zpoždění signálu z jiné dvojice stanic pak určuje druhou hyperbolu, na které plavidlo leží, a tedy leží v průsečíku těchto hyperbol.

Zadání (úloha 1)

V krajině jsou rozmístěny tři vysílače V_1, V_2 a V_3. Známé vzdálenosti zachycuje obrázek 1.

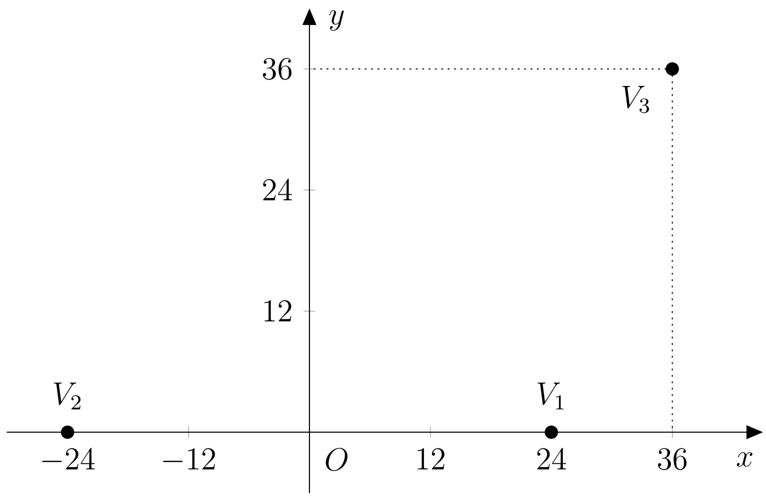


Obrázek 1: Zadání úlohy 1

Adamova turistická navigace přijme signál ze všech tří vysílačů. Jestliže signál z vysílače V_2 přijme ve stejnou dobu jako z vysílače V_1 a z vysílače V_3 přijme signál ve stejnou dobu jako z vysílače V_1, kde se Adam nachází? Polohu určete v souřadnicích vůči vámi zvolené soustavě. Předpokládejte, že signál urazí 300 000 km za sekundu.

Řešení (úloha 1)

Nejprve v obrázku zvolíme kartézskou soustavu souřadnic. Protože je Adam stejně vzdálen od vysílače V_1 i V_2, nachází se jeho poloha na ose úsečky V_1V_2. Protože totéž platí i pro dvojici vysílačů V_1 a V_3, je jeho poloha průsečíkem os úseček V_1V_2 a V_1V_3. Pro zjednodušení výpočtu zvolíme soustavu tak, aby osa úsečky V_1V_2 byla osou y, tedy počátek souřadnic O bude střed úsečky V_1V_2, kladný směr osy x bude určovat polopřímka OV_1 a kladný směr



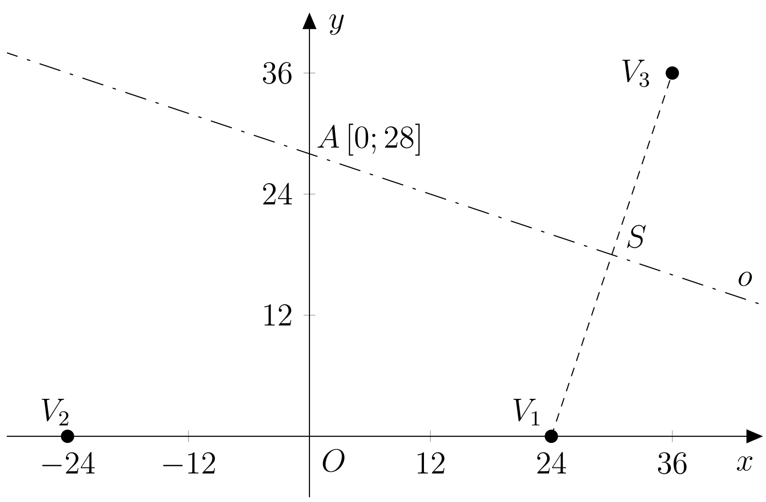
Obrázek 2: Zavedení soustavy souřadnic

osy y zvolíme tak, aby byla druhá souřadnice bodu V_3 kladná. Jednotky na obou osách budou odpovídat vzdálenosti 1 km. Situaci znázorňuje obrázek 2.

Osa úsečky V_1V_2 splývá s osou y, k řešení úlohy tak musíme určit její průsečík s osou úsečky V_1V_3. Tu označíme o a sestavíme její rovnici v obecném tvaru. Zvolme normálový vektor $\overrightarrow{n_o} = \frac{1}{12} \cdot \overrightarrow{V_1V_3} = (1; 3)$ a dále z toho, že střed S úsečky V_1V_3 se souřadnicemi $[30; 18]$ leží na přímce o, odvodíme rovnici přímky

$$o\colon\ x + 3y - 84 = 0.$$

Průsečík osy y s přímkou o musí mít první souřadnici nulovou. Po dosazení $x = 0$ do rovnice přímky o vypočítáme druhou souřadnici průsečíku $y = \frac{84}{3} = 28$ a určíme Adamovu polohu; v zadané soustavě souřadnic je to bod $A\,[0; 28]$. Řešení je znázorněno na obrázku 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy 1

Zadání (úloha 2)

Ve stejném rozmístění vysílačů jako v předchozí úloze přijme Adamova turistická navigace signál z vysílače V_2 o 80 µs později než z vysílače V_1 a z vysílače V_3 přijme signál ve stejnou dobu jako z vysílače V_1. Určete Adamovu polohu v souřadnicích vůči vámi zvolené soustavě souřadnic.

Řešení (úloha 2)

Nejprve opět zvolíme kartézskou soustavu souřadnic. Volbu zdůvodníme takto: protože je Adam stejně vzdálen od vysílače V_1 i V_3, nachází se jeho poloha opět na ose úsečky V_1V_3. Skutečnost, že z vysílače V_2 přijme jeho navigace signál o 80 µs později než z vysílače V_1 znamená, že je od vysílače V_2 o 24 km dále. Jeho poloha se proto také nachází na větvi hyperboly h s ohnisky V_1 a V_2 (kde rozdíl vzdáleností Adama od V_1 a V_2 je roven právě 24 km). Proto je výhodné umístit počátek soustavy souřadnic do středu úsečky V_1V_2, aby měla hyperbola h co nejjednodušší rovnici.

Soustavu souřadnic tak volíme totožnou jako v předchozí úloze a označme neznámou polohu Adama A. Z předchozí úlohy také převezmeme označení přímky o (osa úsečky V_1V_3) a bodu S (střed úsečky V_1V_3). Přímku o vyjádříme parametricky; její směrový vektor $\overrightarrow{u_o}$ musí být kolmý na normálový vektor $\overrightarrow{n_o} = (1;3)$, zvolme třeba $\overrightarrow{u_o} = (3;-1)$:

$$o\colon X = S + t \cdot \overrightarrow{u_o}$$

$$\begin{aligned} x &= 30 + 3t \\ y &= 18 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Určeme nyní rovnici hyperboly. Jelikož jsou body V_1 a V_2 ohniska hyperboly h, je středem hyperboly bod O a její excentricita e je rovna $|OV_1|$, tedy $e = 24$. Dále, protože je rozdíl $|AV_1| - |AV_2| = 24$ dvojnásobkem hlavní poloosy hyperboly, je hlavní poloosa a rovna 12. Délku vedlejší poloosy b vypočítáme dosazením do vztahu $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{576 - 144} = 12\sqrt{3}$. Můžeme tak napsat rovnici hledané hyperboly

$$h : \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{432} = 1.$$

Bod A leží na její „pravé“ větvi, tj. nutně musí být jeho první souřadnice $x_A > 0$.

Vypočítejme nyní souřadnice průsečíků přímky o a hyperboly h. Dosazením parametrických rovnic úsečky do rovnice hyperboly tak dostáváme

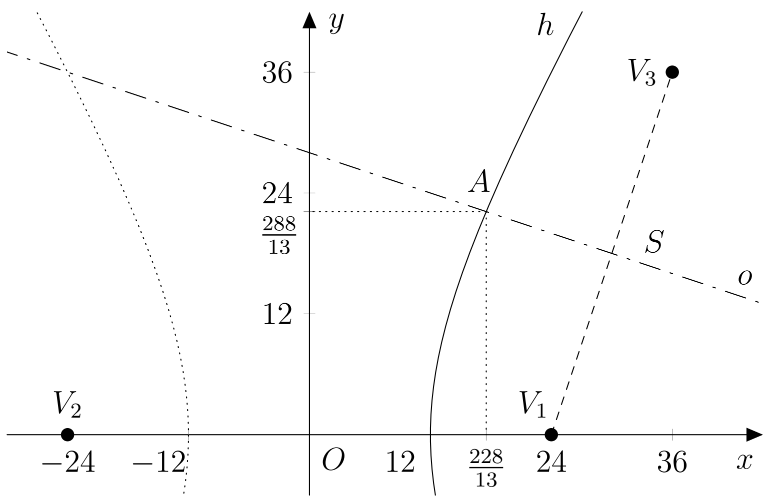
$$\begin{aligned} \frac{(30+3t)^2}{144} - \frac{(18-t)^2}{432} &= 1 \\ 3 \cdot (30+3t)^2 - (18-t)^2 &= 432 \\ 13t^2 + 288t + 972 &= 0 \end{aligned}$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $t_1 = -\frac{54}{13}$ a $t_2 = -18$. Dosadíme tyto kořeny postupně do parametrických rovnic:

$$x_1 = 30 + 3 \cdot \left(-\tfrac{54}{13}\right) = \tfrac{228}{13} \qquad x_2 = 30 + 3 \cdot (-18) = -24$$
$$y_1 = 18 - \left(-\tfrac{54}{13}\right) = \tfrac{288}{13} \qquad y_2 = 18 - (-18) = 36$$

$$A_1\left[\tfrac{228}{13}; \tfrac{288}{13}\right] \qquad A_2\,[-24; 36]$$

Bod A_2 však nevyhovuje podmínce $x_A > 0$ (leží na druhé větvi hyperboly), tedy dostáváme jedinou možnou Adamovu polohu, a to $A\left[\frac{228}{13}; \frac{288}{13}\right]$. Řešení je znázorněno na obrázku 4.



Obrázek 4: Řešení úlohy 2

Poznámka. Jestliže by Adam nebyl stejně vzdálený od přijímačů V_1 a V_3, řešit úlohu by znamenalo hledat průsečíky větví dvou hyperbol. To je však pro zadanou polohu přijímačů nad rámec středoškolské matematiky.

Literatura

- Vondrák J. (2013). Historie navigace – od kvadrantu k GNSS. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 58 (1)*, 11–20.