Jednoduchá azimutální zobrazení, azimutální projekce

Matematická kartografie

Osnova

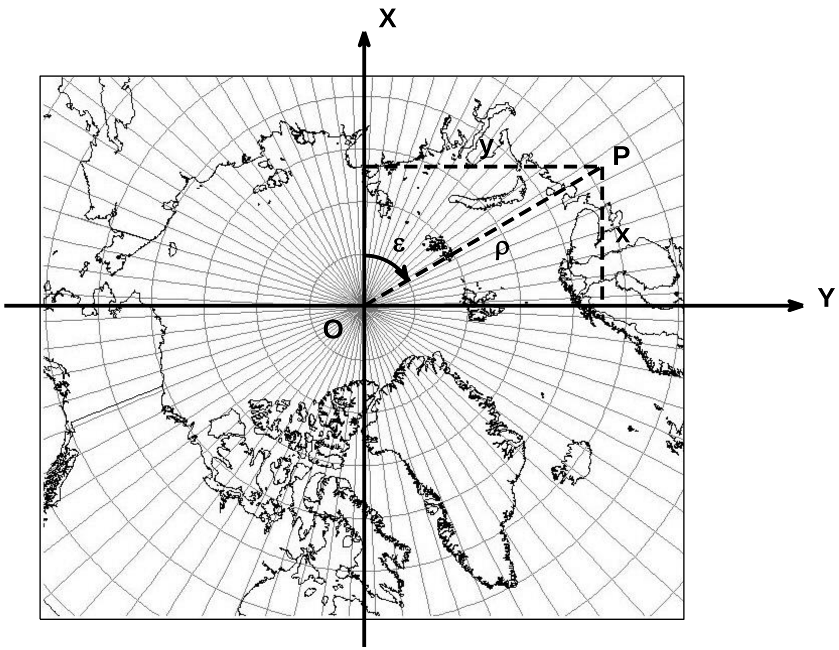
1. Základní vztahy a vzorce
2. Ekvidistantní zobrazení
3. Ekvivalentní zobrazení
4. Konformní zobrazení
5. Azimutální projekce

1

ZÁKLADNÍ VZTAHY A VZORCE

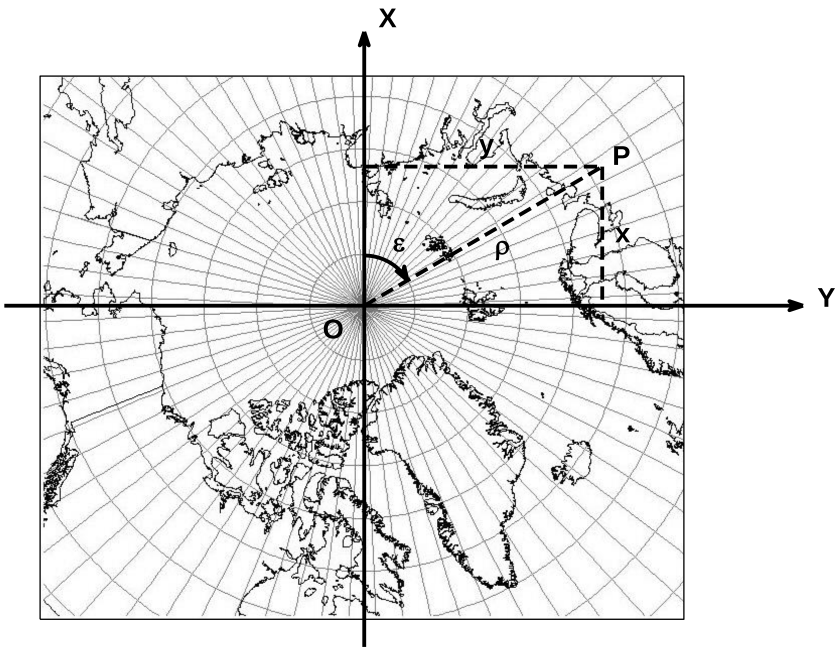
Základní vztahy a vzorce

- kuželová zobrazení: $\varepsilon = nV$
- azimutální zobrazení jsou mezní případ kuželových zobrazení, kdy konstanta n = 1
- počátek polární soustavy – vrchol kužele – splyne s pólem (zeměpisným nebo kartografickým)
- počátek rovinné pravoúhlé sítě – ztotožnění s obrazem pólu (středem zobrazení)
- osa x (svislá) se vloží do základního poledníku



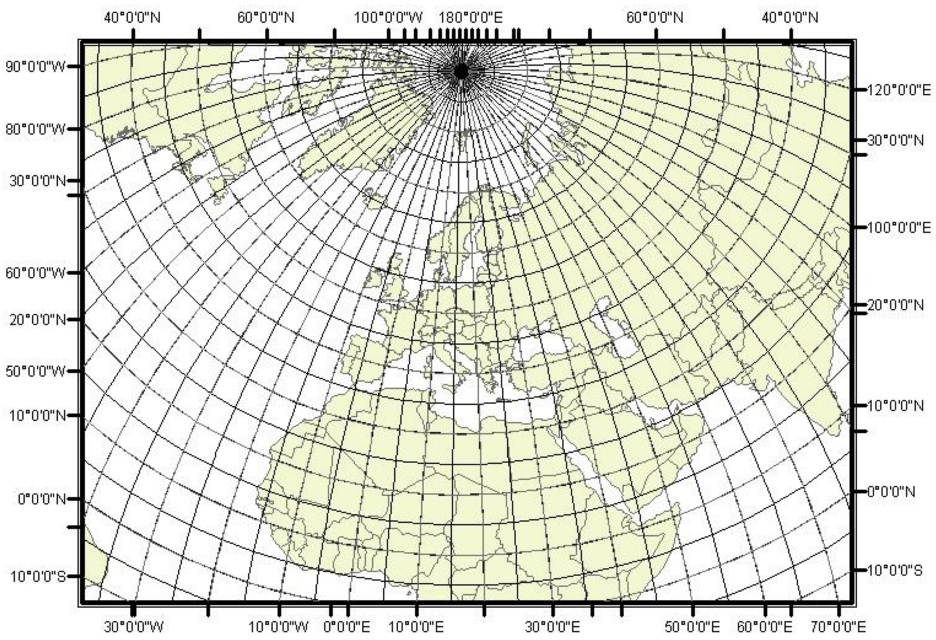
Základní vztahy a vzorce

- obrazem pólu je bod
- obrazem sítě poledníků jsou polopřímky z pólu
- obrazem rovnoběžek jsou soustředné kružnice se středem v pólu
- je to jednoduché zobrazení, poledníky a rovnoběžky jsou vzájemně kolmé
- ekvideformáty mají tvar soustředných kružnic se středem v pólu zobrazení



Základní vztahy a vzorce

- Odvozeno pro kouli, ale lze i pro elipsoid.
- Odvozeno pro pólovou polohu, ale používá se i šikmá nebo rovníková:
  - Obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složitými křivkami.
  - Pouze poledník procházející středem zobrazovaného území, který je totožný se základním kartografickým poledníkem (a tedy i s osou X), je zobrazen jako přímka.

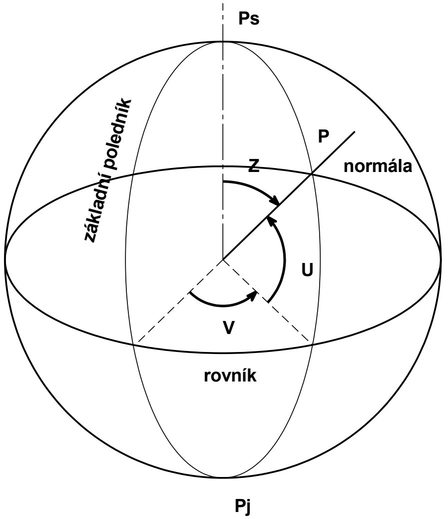


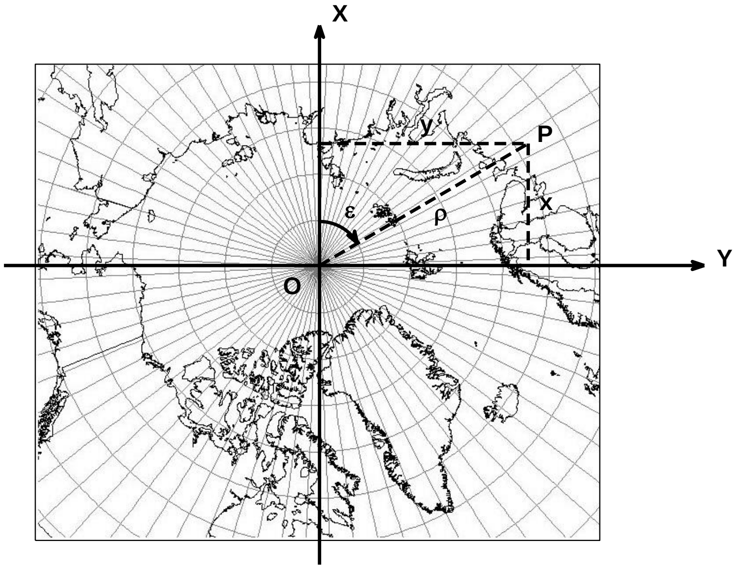
Základní vztahy a vzorce

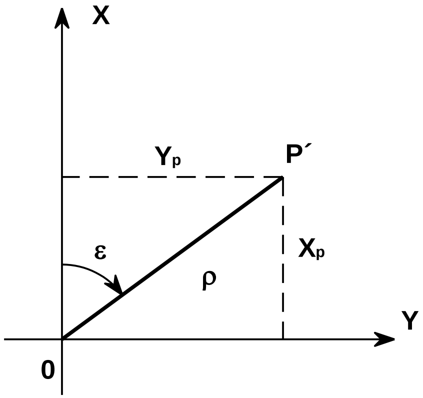
- zobrazovací rovnice v polárních souřadnicích
- použití zenitové vzdálenosti Z místo U

$$\rho = f(Z) \qquad Z = 90° - U$$

$$\varepsilon = V$$







přepočet do pravoúhlých souřadnic:

$$x = \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

Základní vztahy a vzorce

Podobné jako u kuželového zobrazení, ale:

- bez konstanty n,
- se Z místo U,
- bez záporného znaménka – Z a ρ mají stejný směr.

rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{d\rho}{R dZ} \qquad m_r = \frac{\rho}{R \sin Z} \qquad m_{pl} = m_r m_p \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

2

EKVIDISTANTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvidistantní azimutální zobrazení

- asi nejběžnější ekvidistantní azimutální zobrazení – Postelovo
- ekvidistantní v polednících

$$m_p = \frac{d\rho}{R dZ} = 1$$ podmínka

$$\int_0^\rho d\rho = R\int_0^Z dZ$$

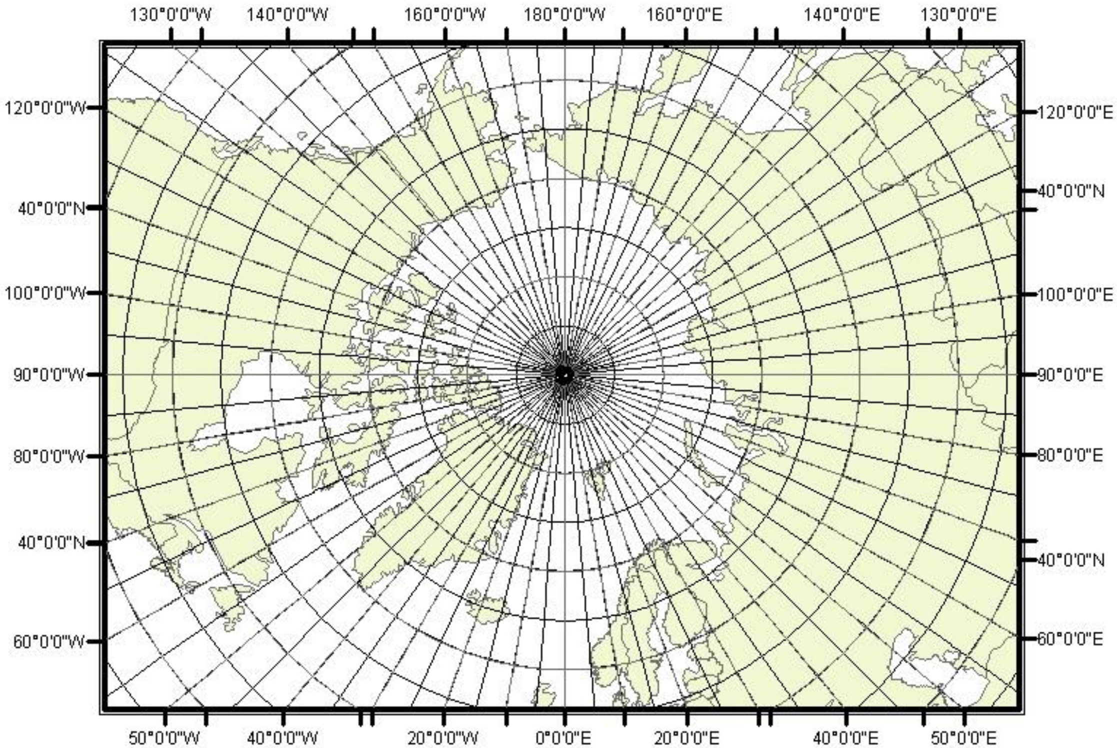
$$\rho = RZ$$ 1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$ 2. zobrazovací rovnice

$$m_p = 1$$

$$m_r = m_{pl} = \frac{Z}{\sin Z}$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z}$$



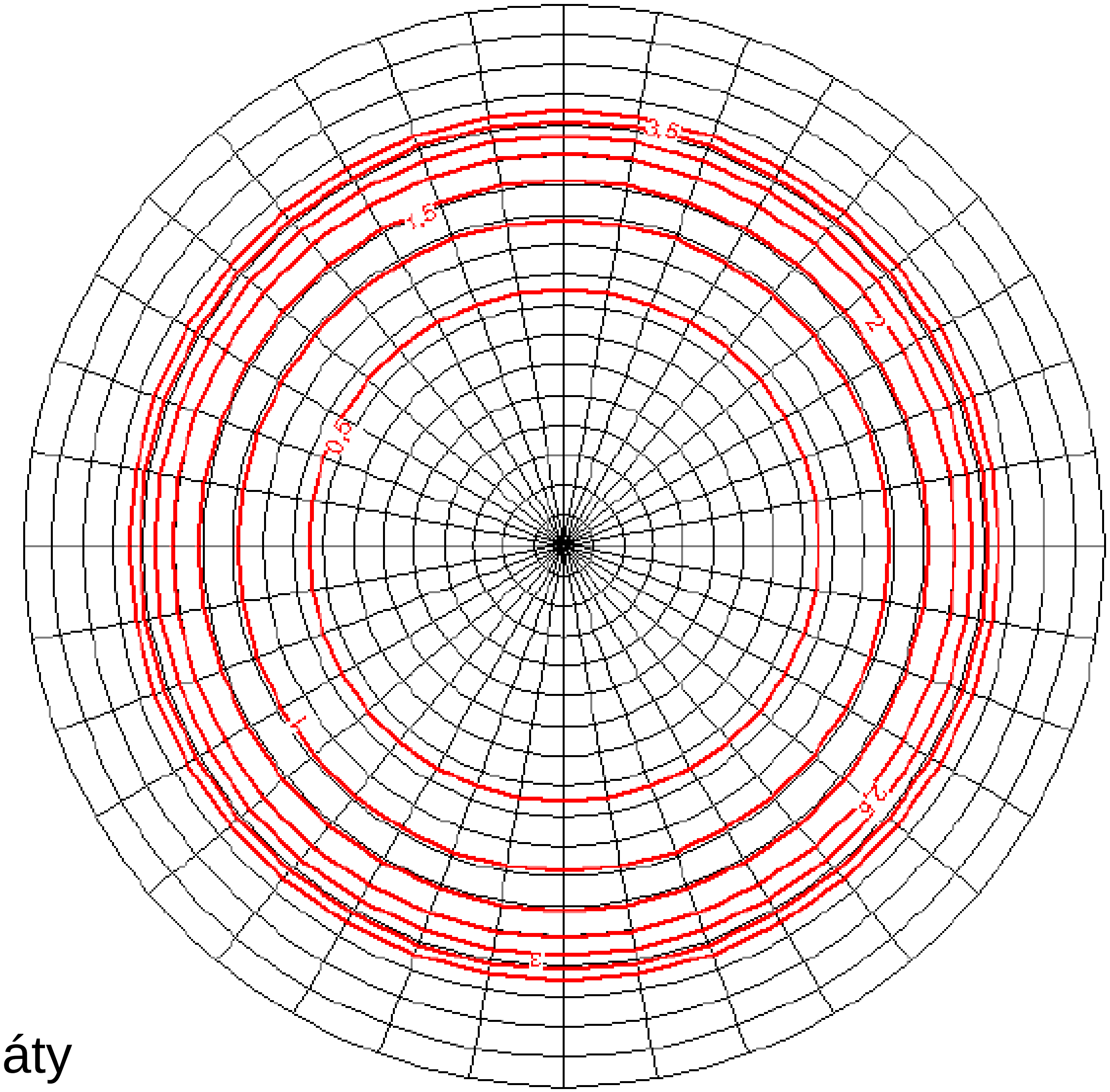
Kde se typicky používá?

Ekvidistantní azimutální zobrazení

- Zachovává vzdálenosti od pólu k libovolnému bodu v zobrazovaném prostoru
  - vzdálenosti obrazů rovnoběžek jsou stejné
  - zkreslení v polednících není (m_p=1)
- Vhodné pro rychlé zjišťování vzdáleností od pozorovacího místa - např. displeje radiolokátorů.

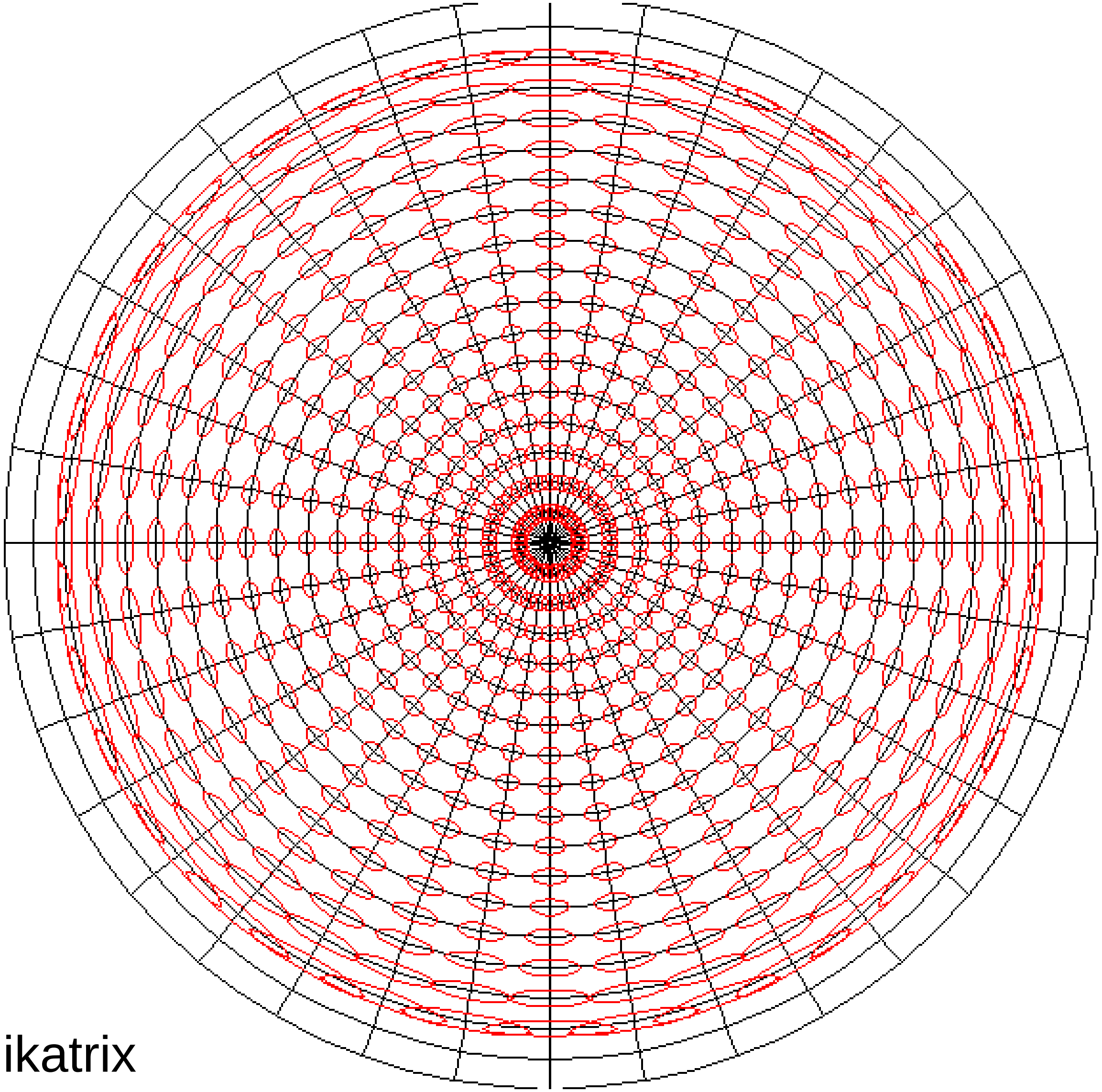
Jaké je zkreslení u pólu? A jaké na 60° rovnoběžce?

Ekvidistantní azimutální zobrazení



ekvideformáty

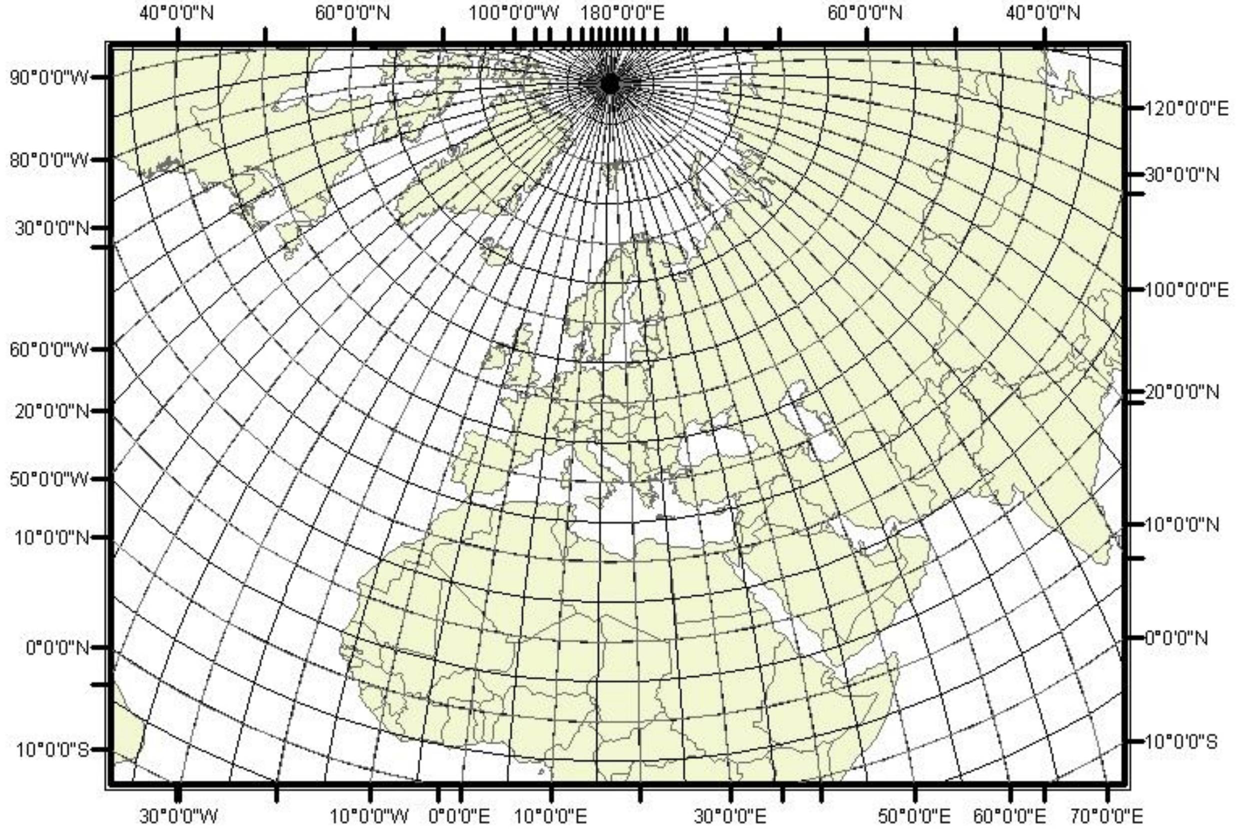
Ekvidistantní azimutální zobrazení



Tissotovy indikatrix

Ekvidistantní azimutální zobrazení

Šikmá poloha zobrazení - obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složité křivky.



Ukázka - kartografický pól v Brně (U_k = 49°12´, V_k =16°36´).

Ekvidistantní azimutální zobrazení

varianta zobrazení:

- doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0
- doplní se parametr c (redukční konstanta)

$$m_{r_0} c = 1 \xrightarrow{\text{dosazení}} m_{r_0} = \frac{Z_0}{\sin Z_0} \qquad c = \frac{\sin Z_0}{Z_0}$$

$\rho = cRZ$ 1. zobrazovací rovnice

$\varepsilon = V$ 2. zobrazovací rovnice

rovnice zkreslení:

$$m_p = c \qquad m_r = \frac{cZ}{\sin Z} \qquad m_{pl} = \frac{c^2 Z}{\sin Z} \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z}$$

c je konstanta, zkreslení v polednících není nulové, ale konstantní

3

EKVIVALENTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvivalentní azimutální zobrazení

- Ekvivalentní azimutální zobrazení – též Lambertovo.
- Lambert Azimuthal Equal Area (zkratka LAEA).
- Využíváno v rámci Evropského souřadnicové sítě Grid_ERTS_89-LAEA.
- Nezkresluje vzájemnou velikost kontinentů – používáno při zobrazování velkých územních celků na jedné mapě – např. hemisféry.
- Kartografický pól může být umístěn kdekoliv – např. na rovníku.
- Zmenšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.

$$m_p m_r = 1$$ podmínka

$$\frac{d\rho}{RdZ}\frac{\rho}{R\sin Z} = 1$$

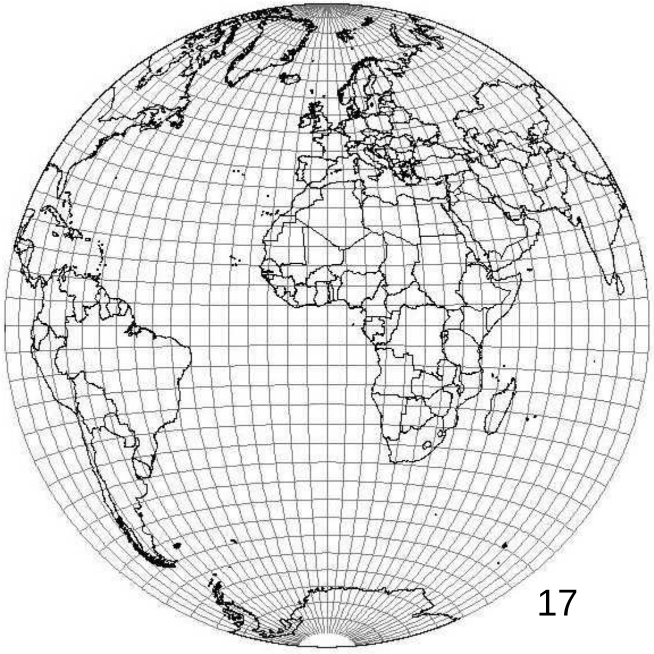
$$\int_0^{\rho} \rho d\rho = R^2 \int_0^{Z} \sin Z dZ$$

$$\rho = 2R\sin\frac{Z}{2}$$

1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$

2. zobrazovací rovnice



Ekvivalentní azimutální zobrazení

rovnice zkreslení

zobrazovací rovnice

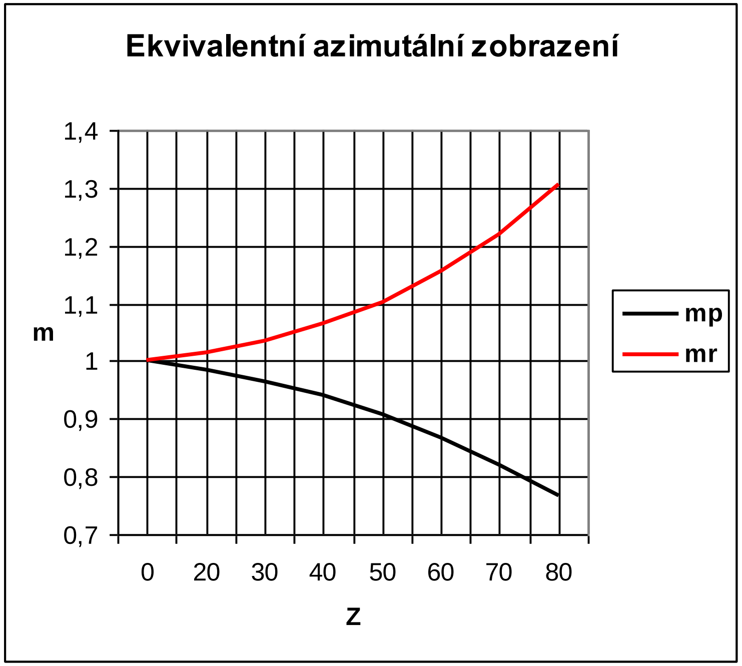
$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z} \leftarrow \rho = 2R \sin\frac{Z}{2}$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{2R\sin\frac{Z}{2}}{R\sin Z}$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{1}{\cos\frac{Z}{2}}$$

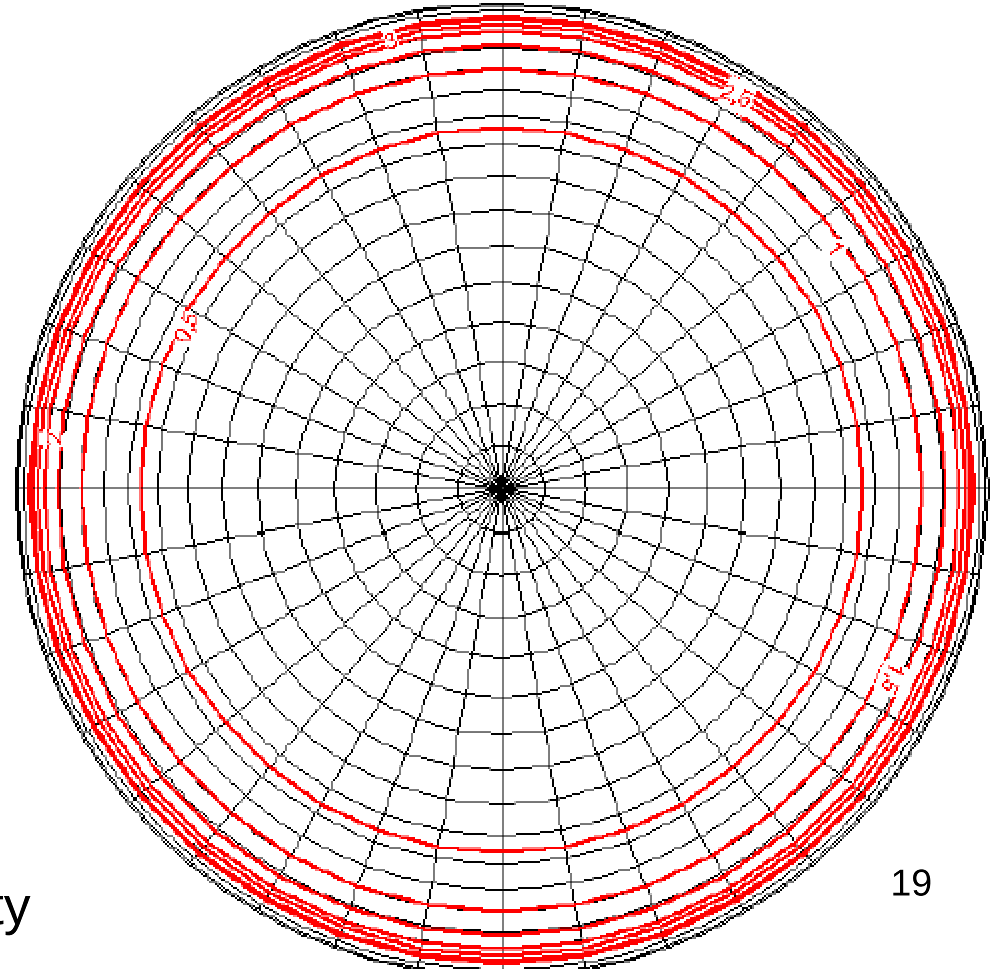
$$m_{pl} = 1$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1-\cos^2\frac{Z}{2}}{1+\cos^2\frac{Z}{2}}$$



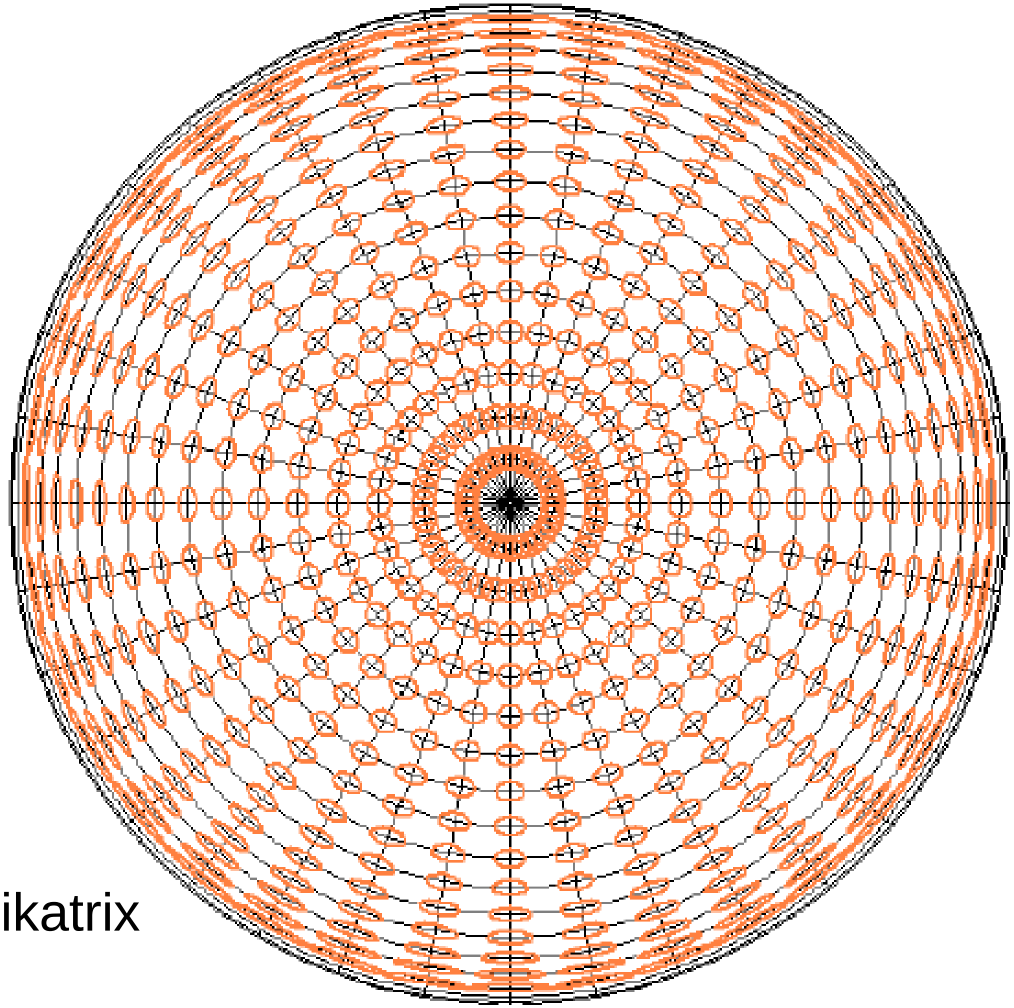
Ekvivalentní azimutální zobrazení

- Zmenšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.
- Neplatí tedy, že u jednoduchých ekvivalentních zobrazení se šířka poledníkového pásu zkracuje vždy směrem k pólům nebo vždy směrem od pólů!
- Vždy od středu mapy nebo od osové přímky.



ekvideformáty

Ekvivalentní azimutální zobrazení



Tissotovy indikatrix

4

KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ

Konformní azimutální zobrazení

$m_p = m_r$ podmínka

$$\frac{d\rho}{RdZ} = \frac{\rho}{R\sin Z}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{dZ}{\sin Z}$$ neurčitý integrál – protože Z a ρ může nabývat i hodnotu 0

$$\ln \rho = \ln tg \frac{Z}{2} + \ln c$$ závislé na parametru c (integrační konstanta) – musíme ho určit

$$\rho = ctg \frac{Z}{2}$$ 1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$ 2. zobrazovací rovnice

rovnice zkreslení: $m = \dfrac{c}{2R\cos^2 \dfrac{Z}{2}}$ $m_{pl} = m^2$ $\Delta\omega = 0$

Konformní azimutální zobrazení

Musíme zjistit parametr c.

A) doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0

$$m_{r_0} = 1 \qquad \frac{\rho_0}{R \sin Z_0} = 1$$

dosazení zobrazovací rovnice

$$\rho = c\,tg\frac{Z}{2}$$

$$c = 2R\cos^2\frac{Z_0}{2}$$

dosazení c

zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2R\cos^2\frac{Z_0}{2}\,tg\frac{Z}{2} \qquad \varepsilon = V$$

rovnice zkreslení:

$$m = \frac{\cos^2\frac{Z_0}{2}}{\cos^2\frac{Z}{2}} \qquad m_{pl} = m^2 \qquad \Delta\omega = 0$$

Konformní azimutální zobrazení

Musíme zjistit parametr c.

B) doplňkový požadavek na nezkreslený pól Z_0=0° (střed mapy)

Tzv. stereografická projekce – ukázka viz dále.

$$m_{r_0} = 1 \qquad c = 2R$$

zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2R\,tg\frac{Z}{2} \qquad \varepsilon = V$$

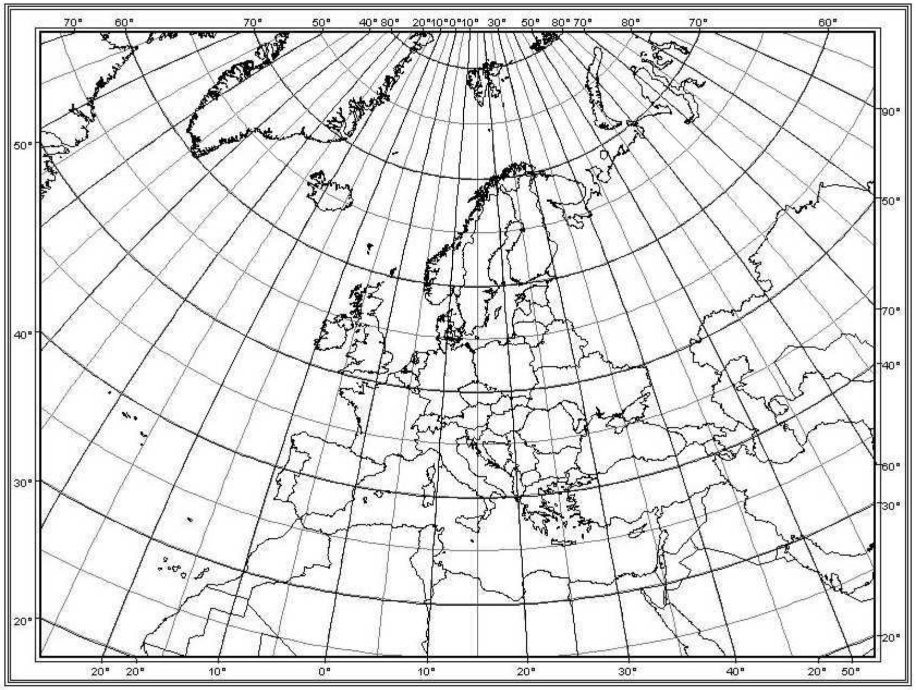
rovnice zkreslení:

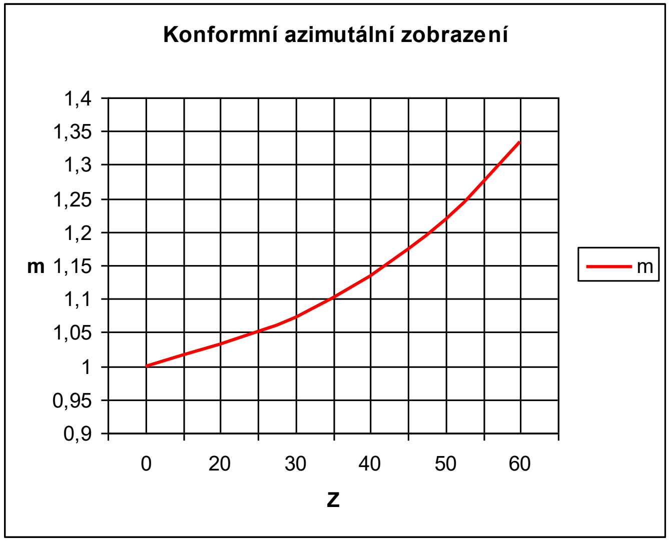
$$m = \frac{1}{\cos^2\frac{Z}{2}} \qquad m_{pl} = m^2 \qquad \Delta\omega = 0$$

Někdy se nastavuje hodnota délkového zkreslení na pólu (měřítkový faktor). Např. při definování zobrazení UPS (Universal Polar Stereographic).

Konformní azimutální zobrazení

Konformní azimutální zobrazení – šikmá poloha
pól = U_0=50°, V_0=15°

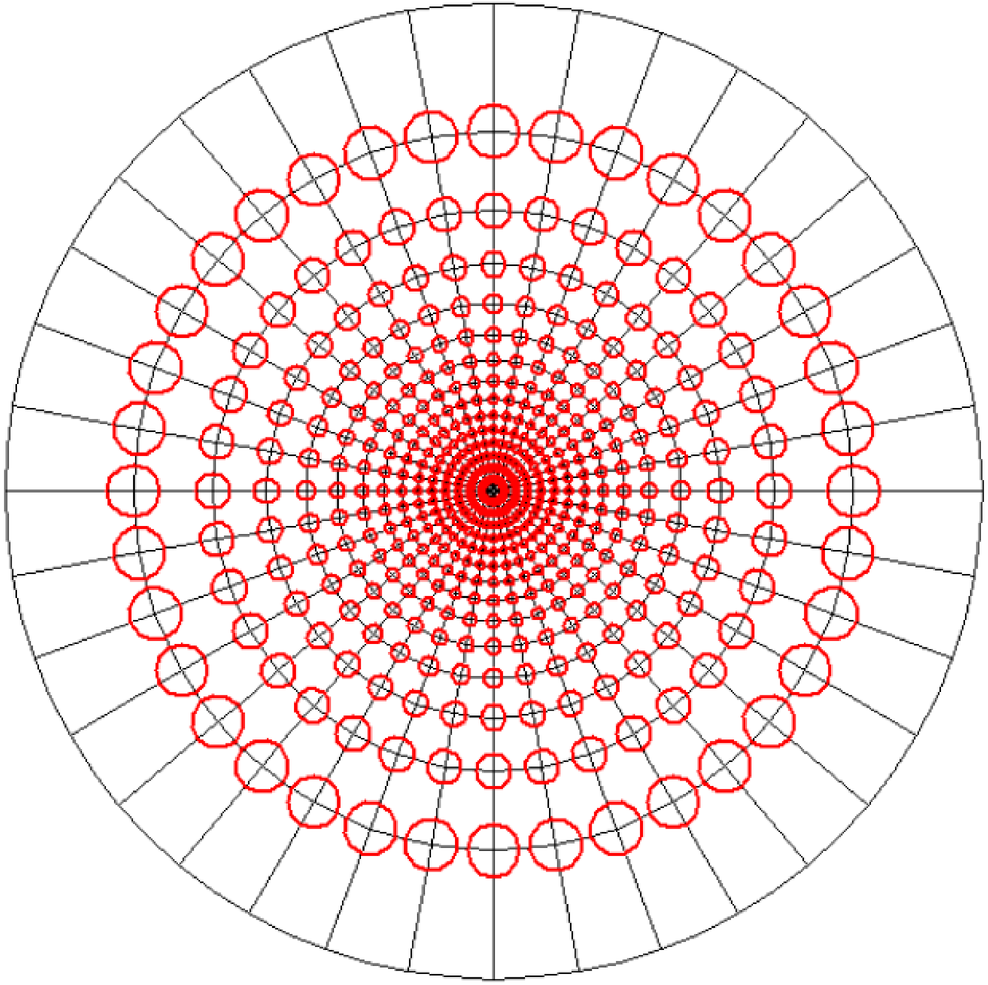




Co je nezkreslené?

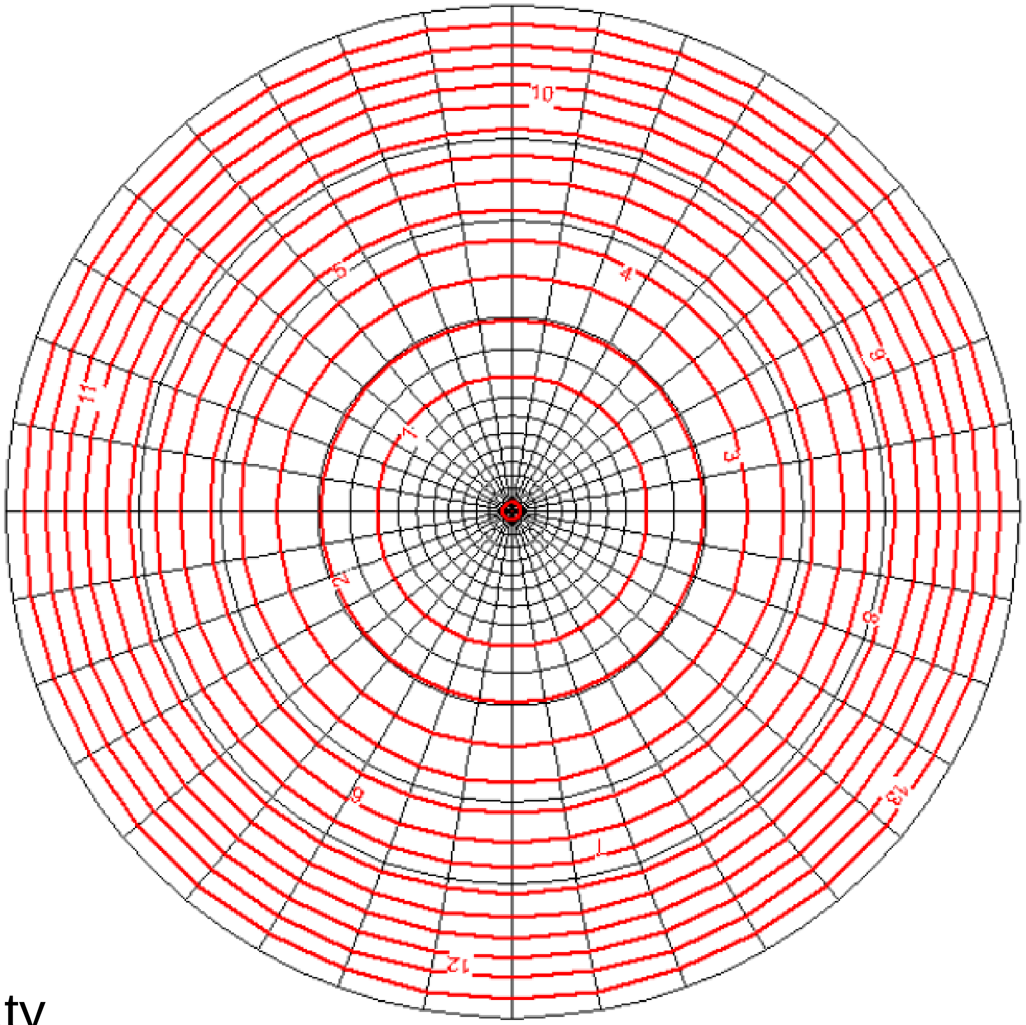
Konformní azimutální zobrazení

Zvětšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.



Tissotovy indikatrix

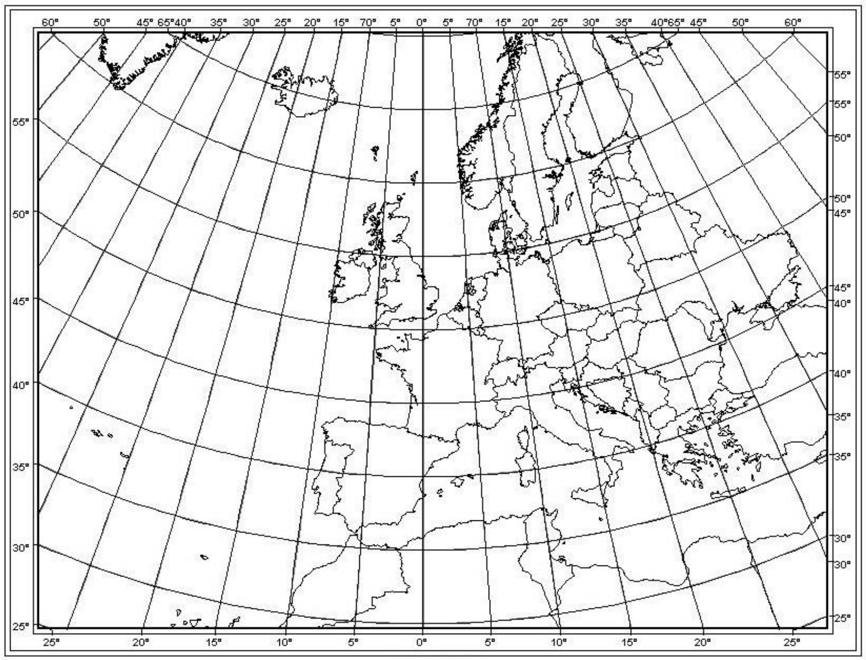
Konformní azimutální zobrazení

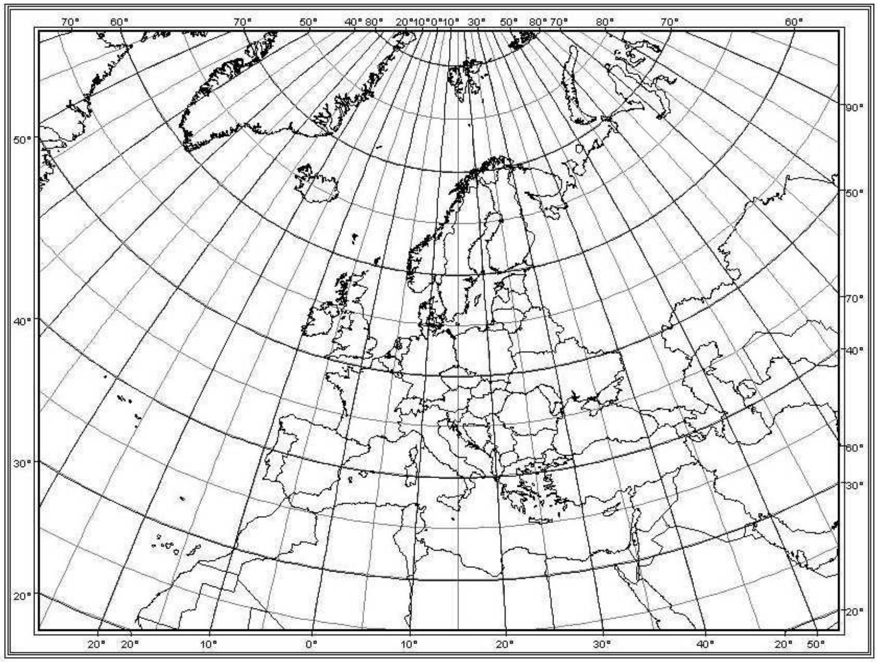


ekvideformáty

Konformní azimutální zobrazení

Jak odlišit kuželové v pólové poloze a azimutální v obecné poloze?





Nápověda: Poledníky.

5

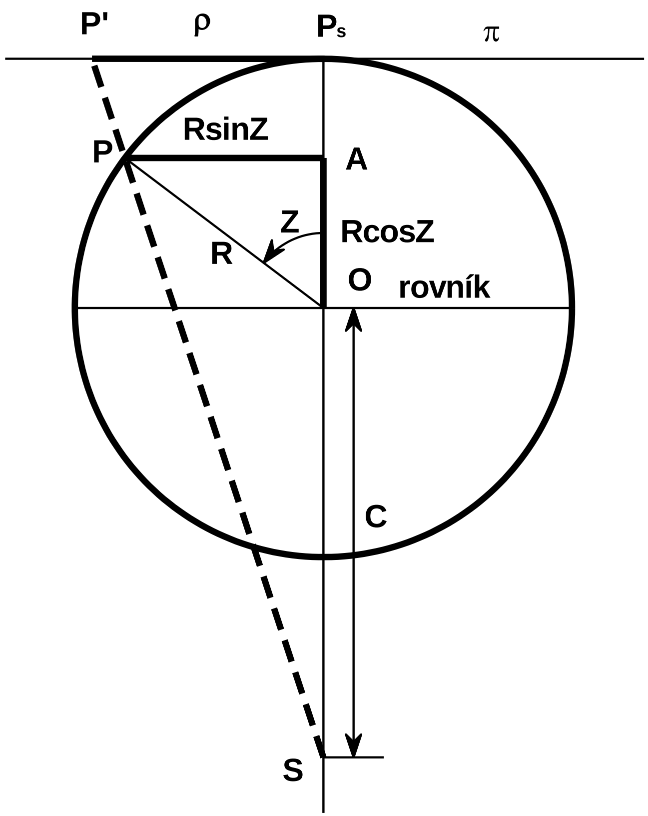
AZIMUTÁLNÍ PROJEKCE

Azimutální projekce – princip

- „Projections“ = kartografická zobrazení
- „Projekce“ = odvoditelná geometrickou cestou

- Projekce – odvozování rovinných souřadnic na základě geometrických principů.
- Projekce povrchu referenční koule na zobrazovací rovinu.
- Existují i válcové a kuželové projekce. Ale používají se méně.

Azimutální projekce – princip



podobné trojúhelníky:

$$\frac{\rho}{R\sin Z}=\frac{C+R}{C+R\cos Z}$$

$$\rho=\frac{(C+R)R\sin Z}{C+R\cos Z}$$

1. zobrazovací rovnice

C – odlišuje různé verze projekcí

$$\varepsilon=V$$

2. zobrazovací rovnice

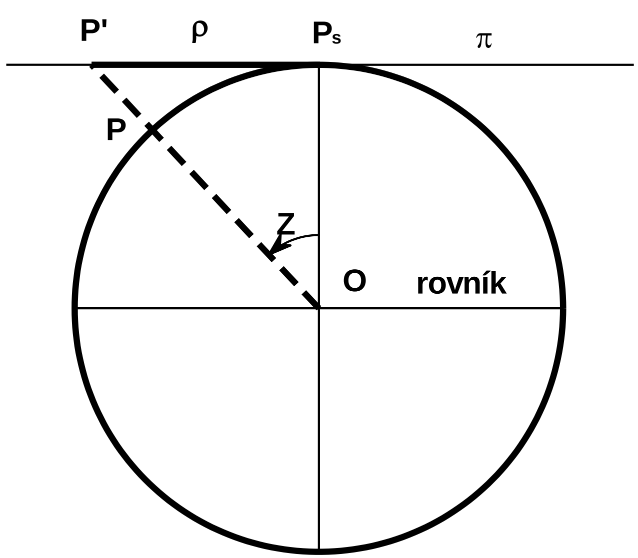
Obecné zákony zkreslení jako u jiných azimutálních zobrazení.

$$m_p=\frac{d\rho}{RdZ}\qquad m_r=\frac{\rho}{R\sin Z}\qquad m_{pl}=m_r m_p\qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2}=\frac{m_r-m_p}{m_r+m_p}$$

Gnómonická projekce

Gnómonická (centrální) projekce vzniká při promítání ze středu koule.

- C = 0
- lze zobrazit jen jednu polokouli
- nejde zobrazit rovník
- ortodromy se zobrazují jako přímky
- Thales z Milétu



dosazení C do zobrazovací rovnice:

$$\rho = R tg Z$$

$$\varepsilon = V$$

dosazení ρ do rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{1}{\cos^2 Z} \qquad m_r = \frac{1}{\cos Z}$$

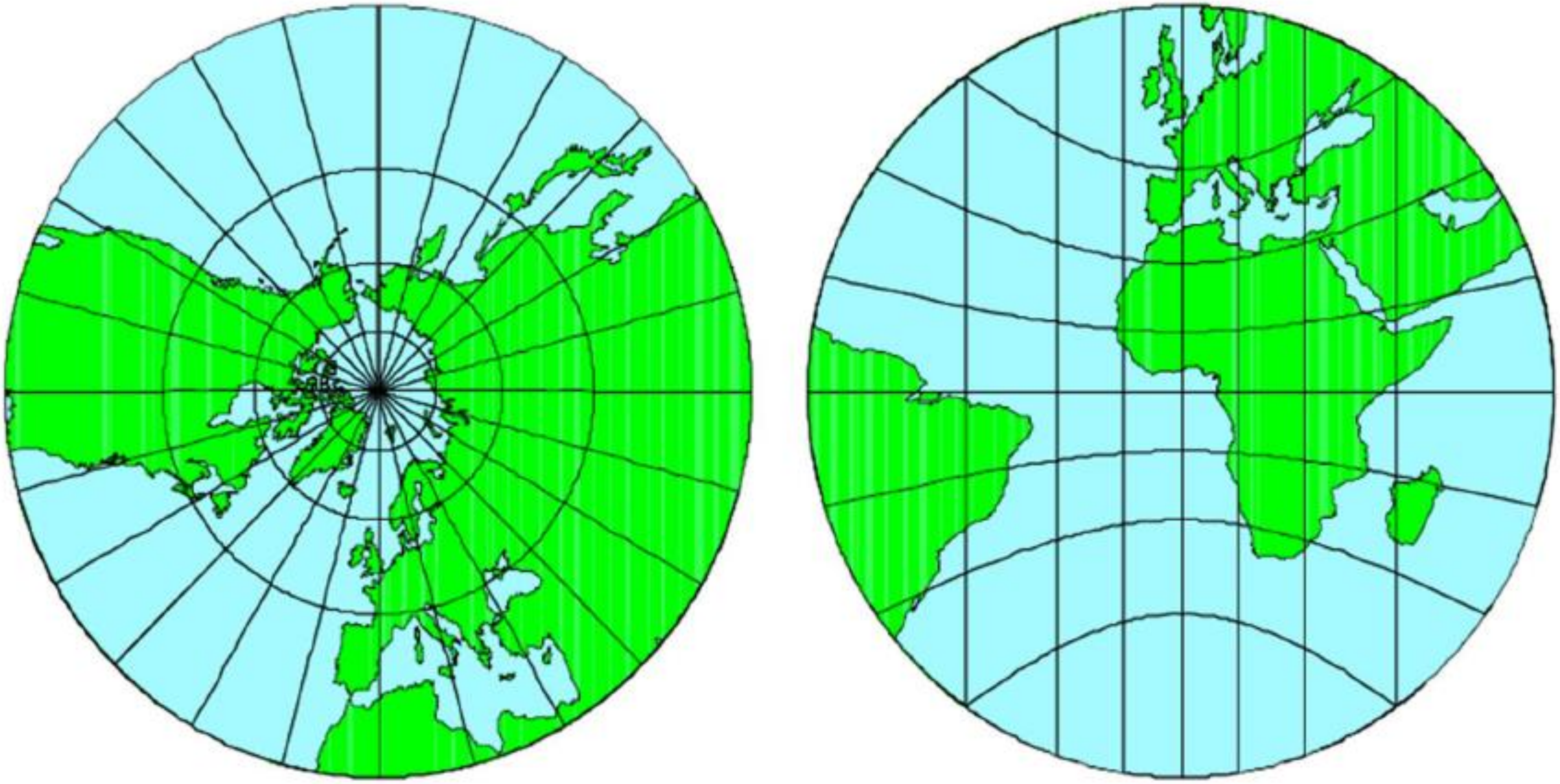
$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^3 Z}$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\cos Z - 1}{\cos Z + 1} \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = tg^2\frac{Z}{2}$$

Všimli jste si na vzorcích zkreslení něčeho?

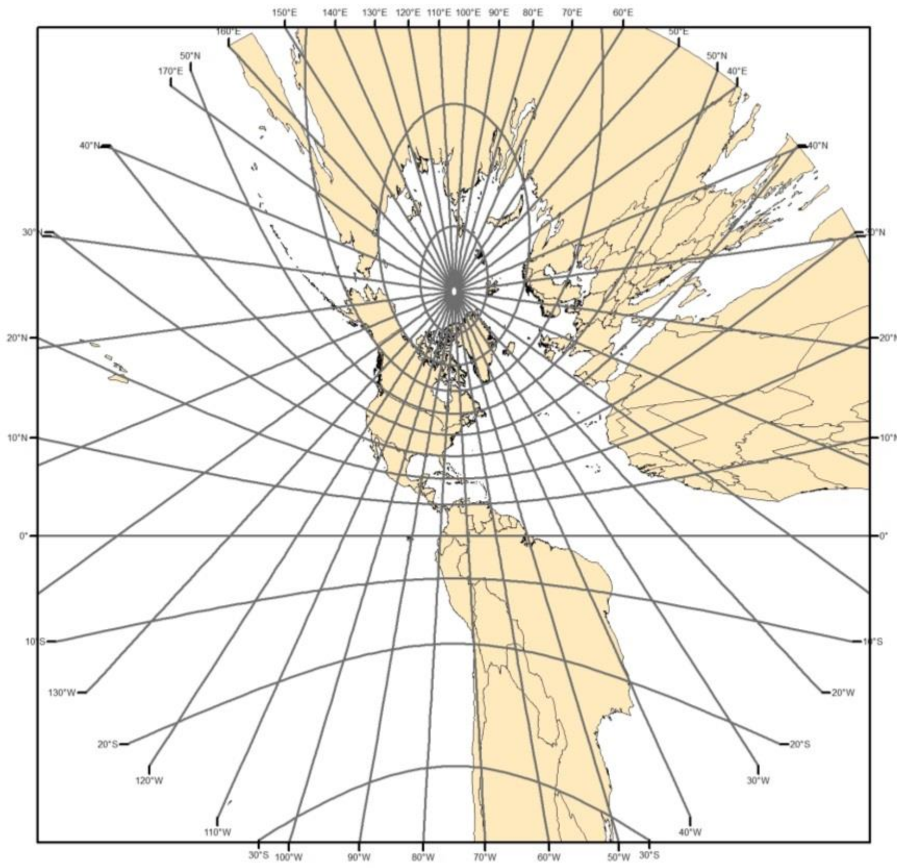
Není délkojevné, úhlojevné ani plochojevné.

Gnómonická projekce



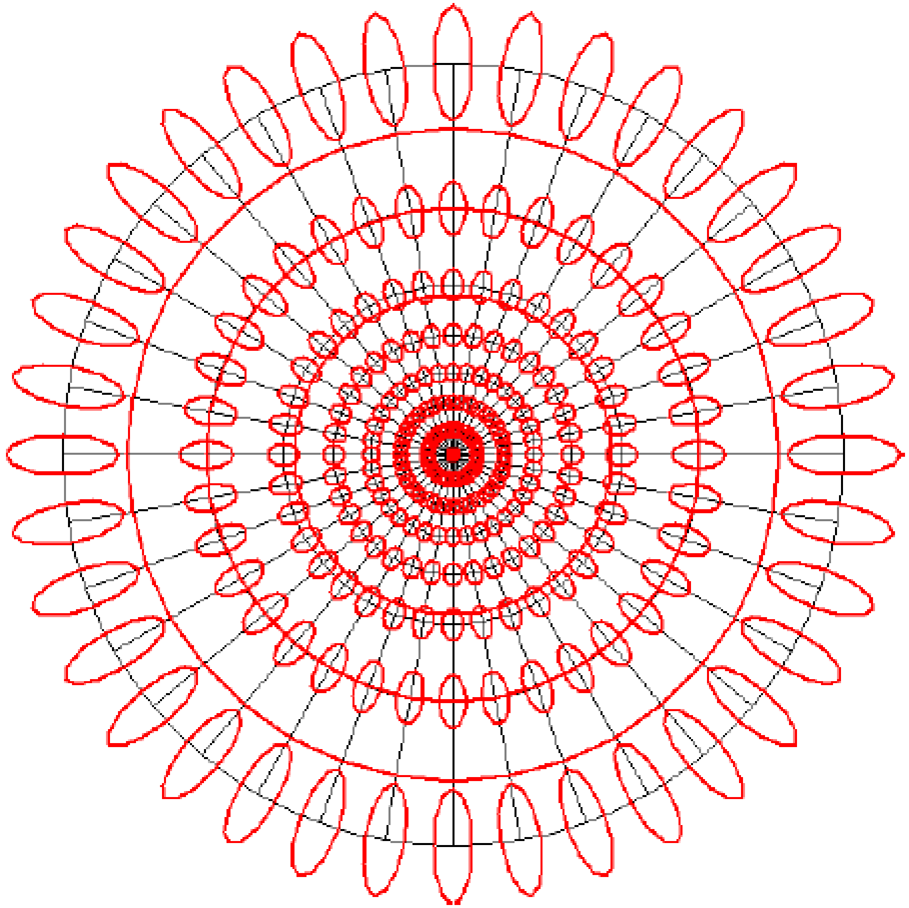
- Ve skutečnosti jde zobrazit i rovník – při správně nastavené polokouli.
- pólová poloha – rovnoběžky soustředné kružnice, poledníky polopřímky
- rovníková poloha – poledníky jsou rovnoběžné úsečky, rovnoběžky jsou hyperboly se středem na rovníku.

Gnómonická projekce



obecná poloha – poledníky úsečky, rovnoběžky hyperboly, elipsy, paraboly

Gnómonická projekce

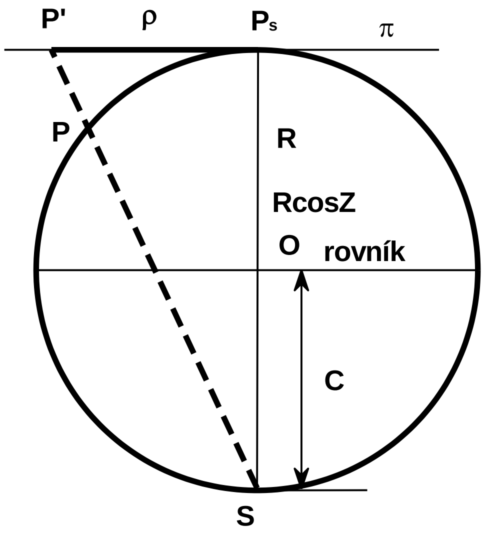


Tissotovy indikatrix <20°,90°>

Stereografická projekce

Stereografická projekce vzniká při promítání z protějšího pólu koule.

- C = R
- projekce je konformním azimutálním zobrazením – viz dříve
- vzdálenosti obrazů rovnoběžek se zvětšují směrem od středu mapy
- Hipparchos z Nikaie



dosazení C do zobrazovací rovnice:

$$\rho = \frac{2R\sin Z}{1+\cos Z} = 2Rtg\frac{Z}{2}$$

$$\varepsilon = V$$

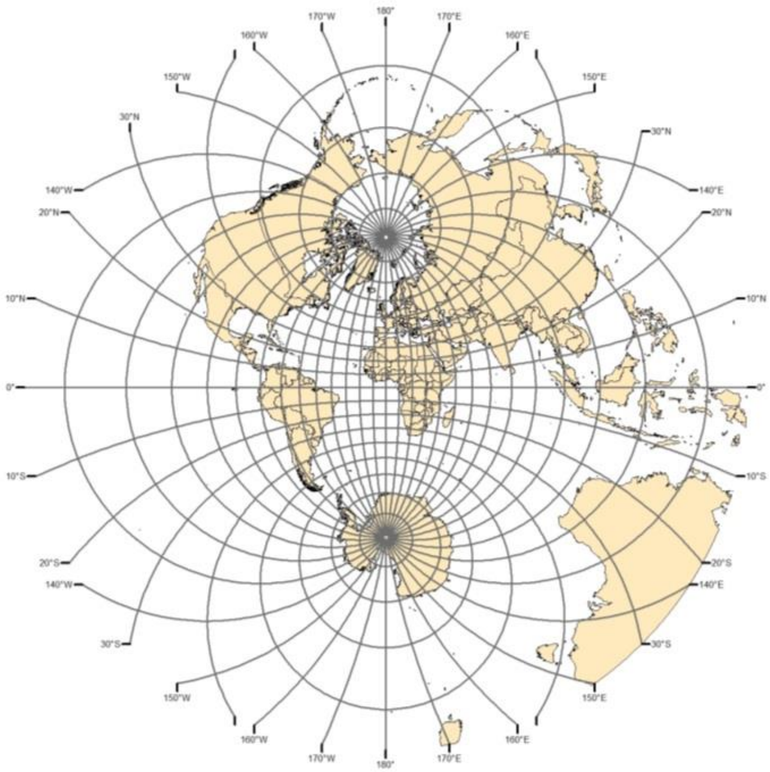
dosazení ρ do rovnice zkreslení:

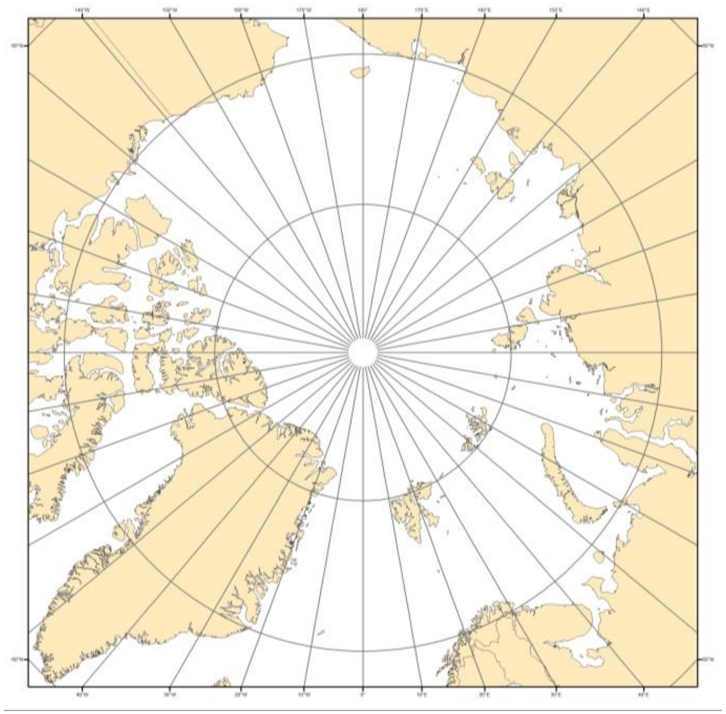
$$m_p = m_r = \frac{2}{1+\cos Z} = \frac{1}{\cos^2\frac{Z}{2}}$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^4\frac{Z}{2}}$$

$$\Delta\omega = 0$$

Stereografická projekce





Odkud se promítalo?

Ortografická projekce

Ortografická projekce vzniká při promítání z nekonečna.

- C = nekonečno
- „pohled z vesmíru“
- projekce je ekvidistantním zobrazením v rovnoběžkách

odvodí se z obrázku (nekonečno do vzorce nedosadíme):

$$\rho = R \sin Z$$

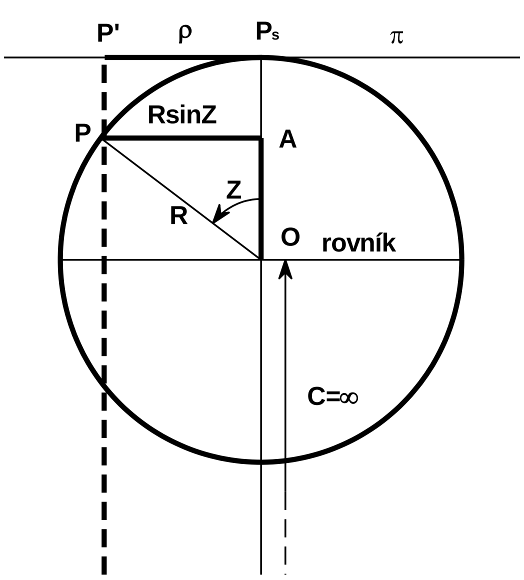
$$\varepsilon = V$$

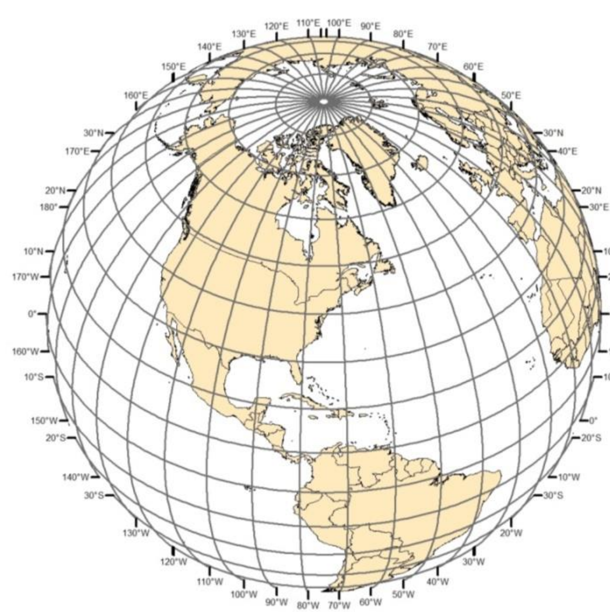
dosazení ρ do rovnice zkreslení:

$$m_p = m_{pl} = \cos Z$$

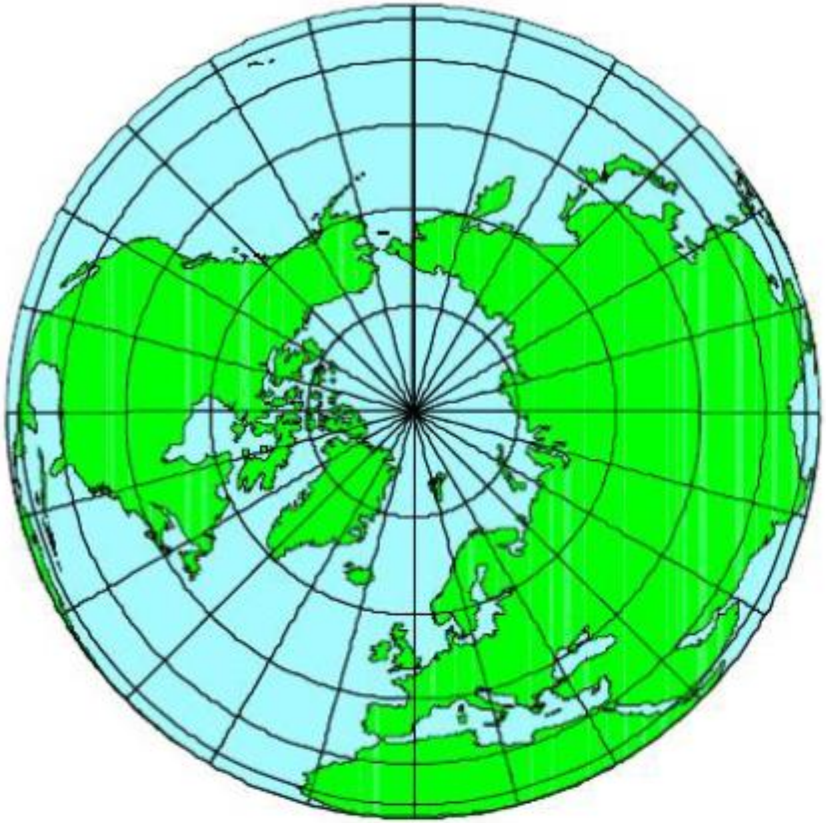
$$m_r = 1$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = tg^2 \frac{Z}{2}$$



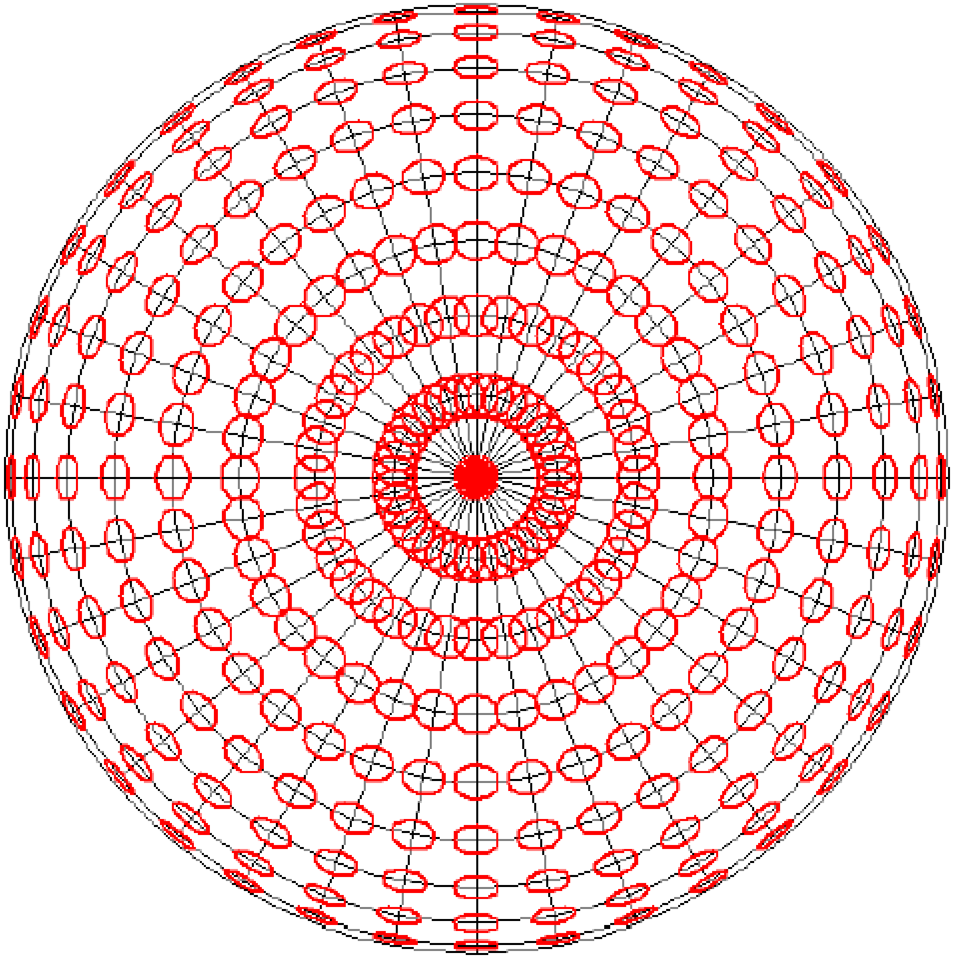


Ortografická projekce



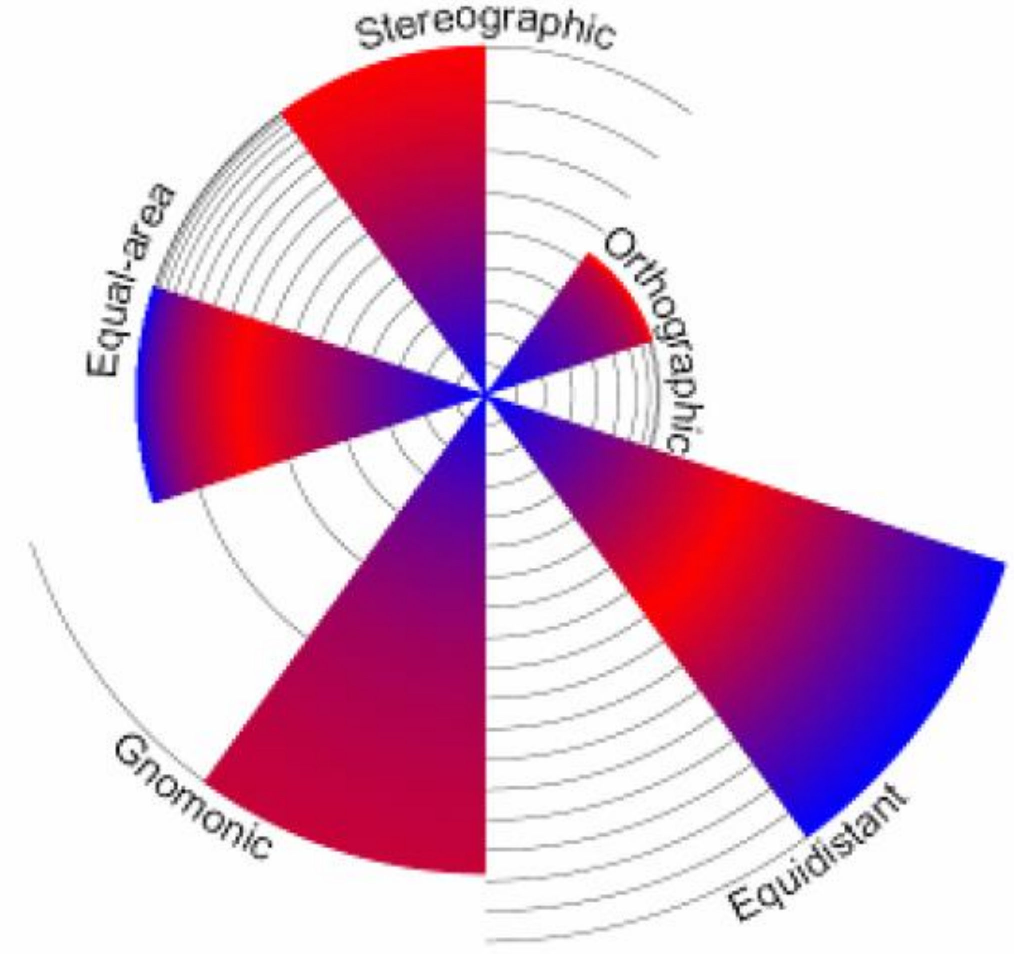
- Rovníková poloha: rovnoběžky úsečky, poledníky elipsy.
- Pólová poloha: rovnoběžky kružnice, poledníky polopřímky.
- Obecná poloha: poledníky i rovnoběžky elipsy.

Ortografická projekce



Tissotovy indikatrix

Srovnání různých azimutálních zobrazení

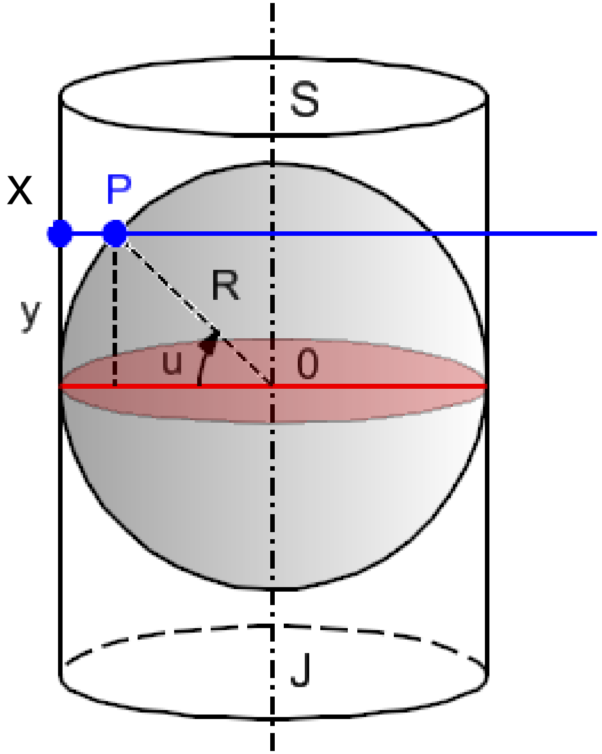


Rovnoběžky se směrem od středu vzájemně vzdalují. Jaký je to typ zobrazení?

Rovnoběžky se směrem od středu vzájemně přibližují. Jaký je to typ zobrazení?

Ortografická projekce na válec

- Pozor! Ne všechny projekce jsou azimutální.
- Zobrazení Lambertovo válcové plochojevné. Viz válcová zobrazení.
- Ortografická válcová projekce. Střed promítání v nekonečnu.
- Ekvivalentní
- Nezkreslený rovník



$$x = R \sin u$$
$$y = Rv$$