ČASOVÉ ŘADY

MUNI Masarykova univerzita

MU IBA

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

VÝUKA A UKONČENÍ PŘEDMĚTU

Výuka:

- ☑ Teoretické přednášky
  - ➔ Počínaje 17. únorem 2025
    každé pondělí 8:00–9:40
- ☑ Praktická cvičení
  - ➔ Počínaje 24. únorem 2025
    každé pondělí 10:00–11:40

Požadavky na ukončení předmětu:

- ☑ ústní zkouška
  - ➔ učená rozprava o dvou z témat, která budou náplní předmětu a řešení jednoho příkladu

VÝUKA A UKONČENÍ PŘEDMĚTU

Osnova:

☑ 17. 2.	Základní pojmy, zpracování dat, veličiny	cvičení odpadá
☑ 24. 2.	Mat. modely časových řad a operace na nich	cvičení odpadá
☑ 3. 3.	Operace se dvěma časovými řadami	komplexní čísla
☑ 10. 3.	Harmonická dekompozice a vzorkování	základní operace
☑ 17. 3.	Odpadá (konference)	odpadá
☑ 24. 3.	Frekvenční transformace	harm. dekompozice
☑ 31. 3.	Základní pojmy o systémech	frekv. transformace
☑ 7. 4.	Popis lineárních systémů	základy systémů
☑ 14. 4.	Stabilita a spojování systémů	popis systémů
☑ 21. 4.	Odpadá (Velikonoce)	odpadá
☑ 28. 4.	Realizace diskrétních systémů	stabilita
☑ 5. 5.	Zadání skupinového projektu	diskuze projektu
☑ 12. 5.	Konzultace	odpadá
☑ 19. 5.	Prezentace skupinového projektu	odpadá

☑ Termíny zkoušky: 9. 6.; 16. 6.; 23. 6.

LITERATURA

- Holčík, J.: Signály, časové řady a lineární systémy. CERM, Brno, 2012, 136s.
  http://www.iba.muni.cz/res/file/ucebnice/holcik-signaly-casove-rady-linearni-systemy.pdf
- Holčík, J.: Signály a lineární systémy. Funkce, časové řady a jejich lineární modely.
  http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-modelovani-dynamickych-biologickych-dat--signaly-a-linearni-systemy
- Holčík, J., Kalina, J.: konzultační prezentace
  webová stránka předmětu
- Holčík, J.: Time Series.
  http://timeseries.sci.muni.cz/index.php
- prezentace z přednášek
- zadání a R-kódy ze cvičení

LITERATURA

http://portal.matematickabiologie.cz/

LITERATURA

- Jan, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. VUTIUM, Brno 2002.
  http://www.digitalniknihovna.cz/mzk/view/uuid:25f84ea0-e3b3-11e6-8010-005056827e51
- Šebesta, V., Smékal, Z.: Signály a soustavy (Elektronické studijní texty FEKT VUT v Brně), Brno 2003.
  https://is.muni.cz/el/1431/podzim2011/Bi5440/um/Signaly_a_Soustavy_BASS.pdf

LITERATURA

- Proakis J. G. Manolakis D. K. Digital Signal Processing (4th Edition), CRC; 1 edition, 2006
- Kamen, E. W., Heck, B. S. Fundamentals of Signals and Systems Using the Web and Matlab (3rd Edition), Prentice Hall (2006)
- Lathi,B. P. Signal Processing and Linear Systems, Oxford Univ. Press, Oxford 1998
- Carlson G. E. Signal and Linear System Analysis: with MATLAB, 2e, John Wiley & Sons, Inc., 1998,
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., Hamid, S.: Signals and Systems (2nd Edition) Prentice-Hall Signal Processing Series, Prentice Hall; 1996

LITERATURA

- Kalouptsidis N. Signal Processing Systems: Theory and Design. John Wiley & Sons, Inc., 1997
- Chen C.T. Linear System Theory and Design (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering) Oxford University Press, USA; 3rd ed. 1998
- Oppenheim A. V., Schafer R. W., Buck J. R. Discrete-Time Signal Processing (2nd Edition) (Prentice-Hall Signal Processing Series), Prentice Hall; 1999
- Brockwell, P. J., Davis, R. A.: Introduction to Time Series and Forecasting, Springer; 2 edition (2003),
- Engelberg, S. Random Signals and Noise: A Mathematical Introduction, CRC Press, Inc., 2007

I. ČASOVÉ ŘADY
ZÁKLADNÍ POJMY

Masarykova univerzita

MU IBA

ČASOVÁ ŘADA

Funkce (?)

Posloupnost (?)

ČASOVÁ ŘADA

Funkce je předpis, který každé hodnotě *x* z definičního oboru *M* přiřadí právě jedno číslo *y* z oboru hodnot *N*. Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru $y = f(x)$, či ji můžeme vyjádřit explicitně $f{:}y = x$, kde proměnná *x* je argument funkce.

Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených (celých?) čísel.

Posloupností rozumíme uspořádaný (konečný či nekonečný) soubor matematických objektů, očíslovaných v pořadí obvykle přirozenými čísly.

Posloupnost lze definovat jako zobrazení z množiny přirozených čísel do nějaké celkem libovolné (☺) množiny A.

ČASOVÁ ŘADA

Řada (také *nekonečná řada*) je matematický výraz ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i,$$

kde a_1, a_2, a_3, … je nějaká posloupnost.

ČASOVÁ ŘADA

Jak vypadá časová řada (?)

?

ČASOVÁ ŘADA

ČASOVÁ ŘADA

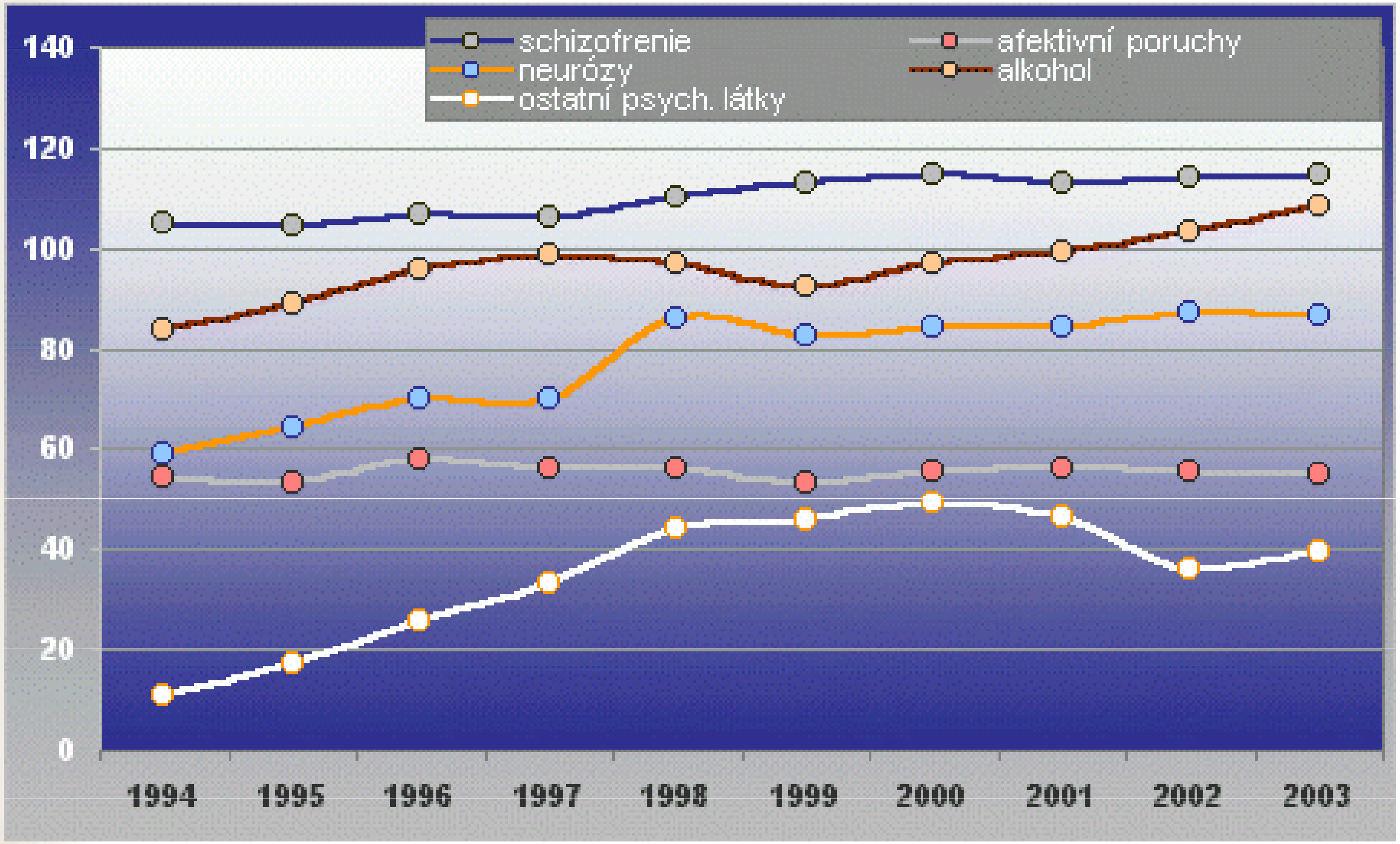
Časová řada je posloupnost hodnot indexovaných (zapsaných nebo graficky znázorněných) v závislosti na čase.

ČASOVÁ ŘADA

Časová řada je posloupnost hodnot indexovaných (zapsaných nebo graficky znázorněných) v závislosti na čase.

Časová řada je uspořádaná množina hodnot $\{y_t: t=1,\ldots,N\}$, kde index t určuje čas, kdy byla hodnota y_t určena.

ČASOVÁ ŘADA



Vývoj počtu hospitalizací v lůžkových psychiatrických zařízeních (na 100 000 osob)

Pramen: Ústav zdravotnických informací a statistiky

ČASOVÁ ŘADA

Časová řada je posloupnost hodnot indexovaných (zapsaných nebo graficky znázorněných) v závislosti na čase.

Časová řada je uspořádaná množina hodnot $\{y_t: t=1,\ldots,N\}$, kde index t určuje čas, kdy byla hodnota y_t určena.

Časové okamžiky t jednotlivých pozorování nemusí být rovnoměrné $\{y(t_i): i = 1,\ldots,N\}$.

Časová řada je uspořádaná množina hodnot $\{y(t_i): i=1,\ldots,N\}$, kde t_i určuje čas, kdy byla hodnota $y(t_i)$ určena $(t_{i+1}>t_i)$.

ČASOVÁ ŘADA

DEFINICE (základní):

Časová řada je uspořádaná množina hodnot $\{y(t_i): i=1,\dots,N\}$, kde t_i určuje čas, kdy byla hodnota $y(t_i)$ určena $(t_{i+1}>t_i)$.

ČASOVÁ ŘADA

DEFINICE (základní):

Časová řada je uspořádaná množina hodnot $\{y(t_i): i=1,\ldots,N\}$, kde t_i určuje čas, kdy byla hodnota $y(t_i)$ určena $(t_{i+1} > t_i)$.

$$t_{i+1} - t_i = \text{const.}$$

ČASOVÁ ŘADA

DEFINICE (pro nás základní):

Časová řada je uspořádaná množina hodnot $\{y(t_i): i=1,\ldots,N\}$, kde t_i určuje čas, kdy byla hodnota $y(t_i)$ určena ($t_{i+1} > t_i$).

$$t_{i+1} - t_i = \text{const.}$$

Jaké jsou hodnoty $y(t_i)$ časové řady?

ČASOVÁ ŘADA

TYPY HODNOT $y(t_i)$

- ☑ skalár, vektor $[\mathbf{y}_{ti}=(y_{1ti},\dots,y_{pti})]$, matice, … ;
- ☑ kvantitativní, kvalitativní;
  - ➔ kvantitativní
    - ❑ spojitá, diskrétní - každá hodnota může vyjadřovat okamžitý stav nebo mít akumulační (integrační) charakter za určité období;
  - ➔ kvalitativní
    - ❑ binární/dichotomická, nominální, ordinální;

ČASOVÁ ŘADA

Binární = dummy data

Proměnná, která může nabývat pouze dvou hodnot. Bývá definovaná odpovědí na otázku (např. TRUE × FALSE, 1 × 0).

Nominální = kategoriální data

Proměnná, která může nabývat počtu hodnot ($n \in \mathbb{N}$), pro které neexistuje přirozené pořadí (např. barvy vzorků).

Ordinální data

Nominální proměnná, pro kterou ale existuje jasné pořadí kategorií (např. velikost oděvů S, M, L, XL).

Kardinální data

Ordinální proměnná, u které lze určit rozdíl mezi kategoriemi. Ty jsou stejně vzdálené (např. počet dětí v rodině).

Intervalová data

Spojitá proměnná, u které lze určit rozdíl mezi kategoriemi – často jde o vzdálenost od 0 (např. teplota ve °C, čas).

Poměrová data

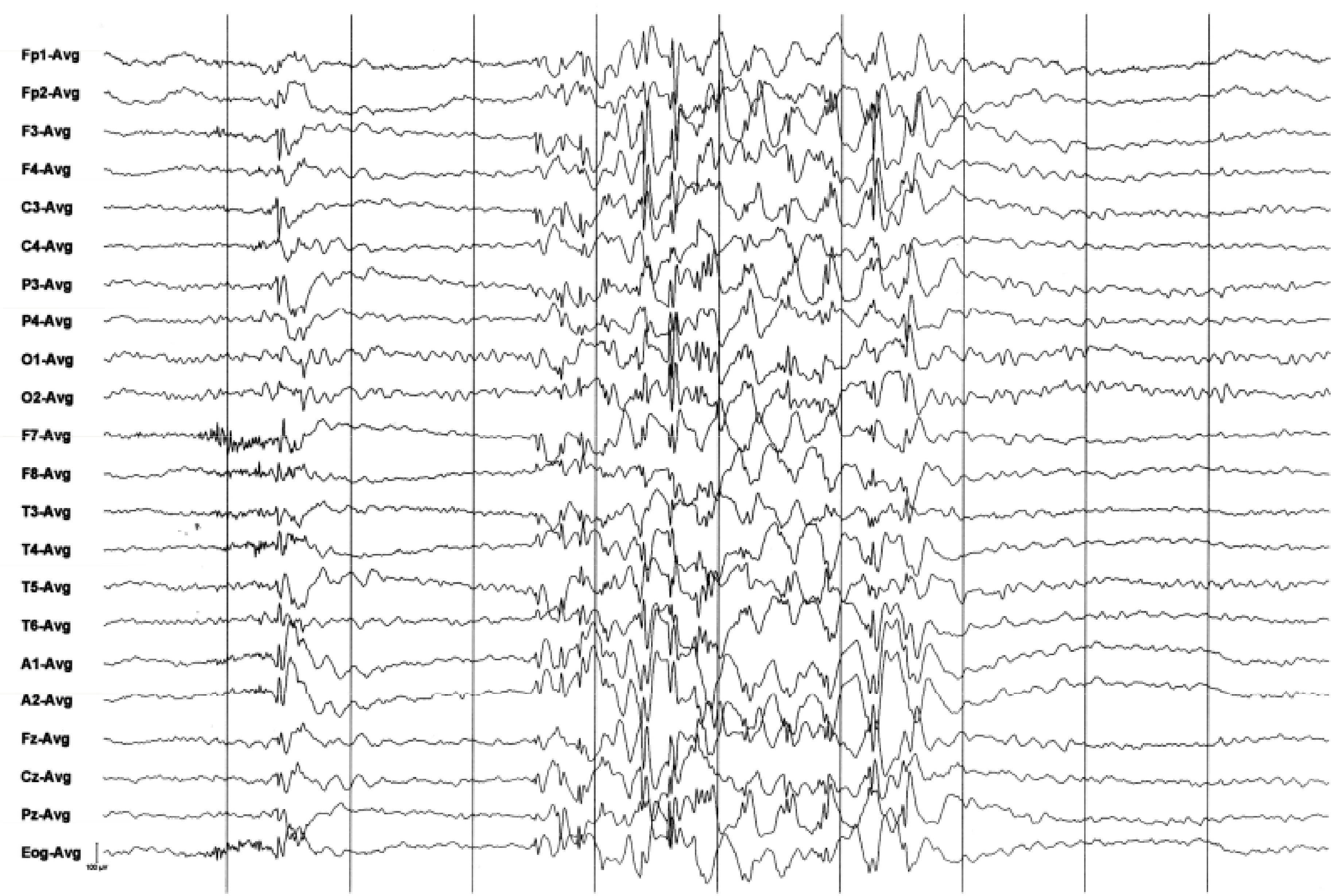
Intervalová proměnná, u které má smysl určovat podíly jednotlivých kategorií (např. hmotnost, vzdálenost).

ČASOVÁ ŘADA

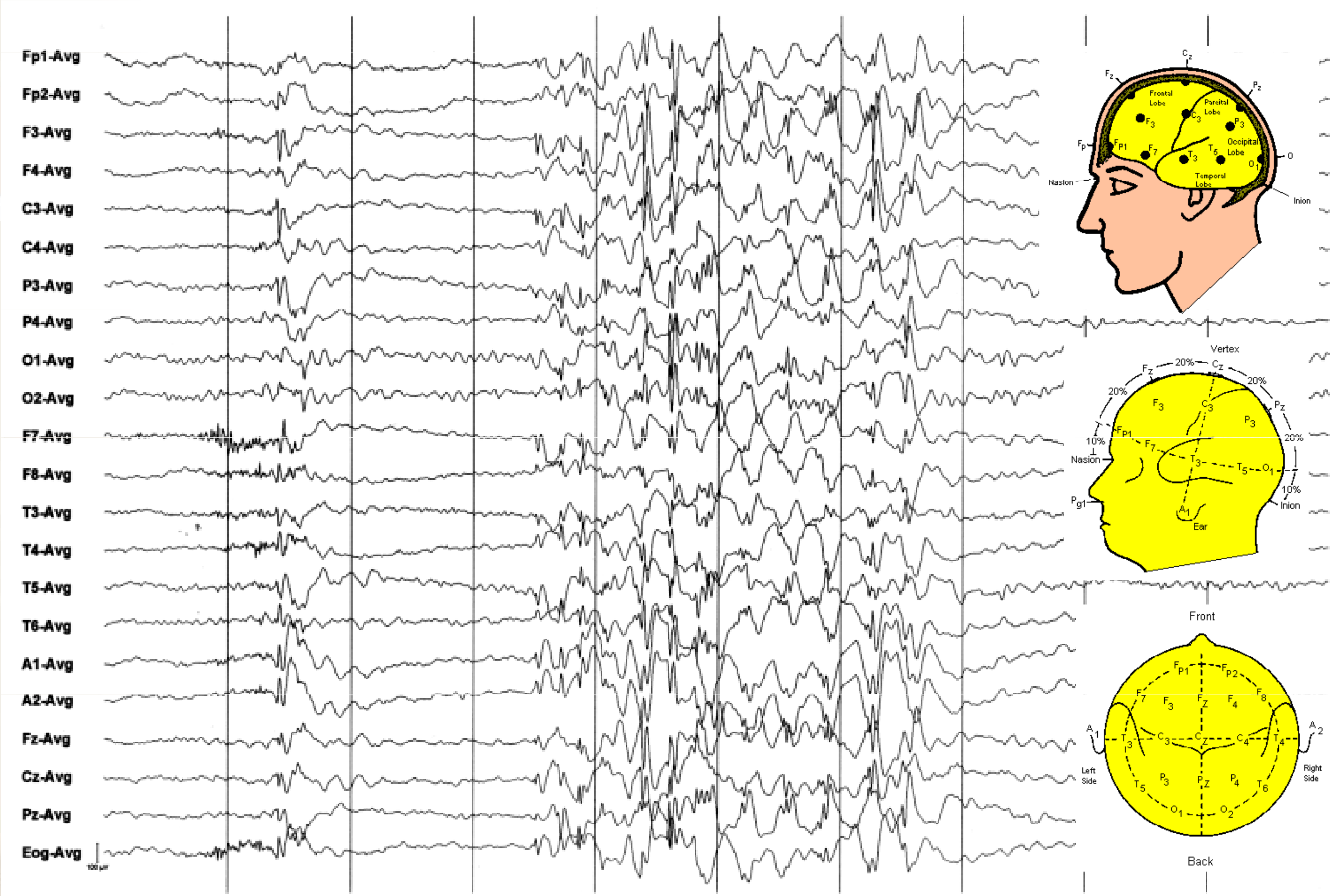
TYPY HODNOT $y(t_i)$

- skalár, vektor $[\mathbf{y}_{ti}=(y_{1ti},\ldots,y_{pti})]$, matice, … ;
- kvantitativní, kvalitativní;
  - kvantitativní
    - spojitá, diskrétní - každá hodnota může vyjadřovat okamžitý stav nebo mít akumulační (integrační) charakter za určité období;
  - kvalitativní
    - binární/dichotomická, nominální, ordinální;

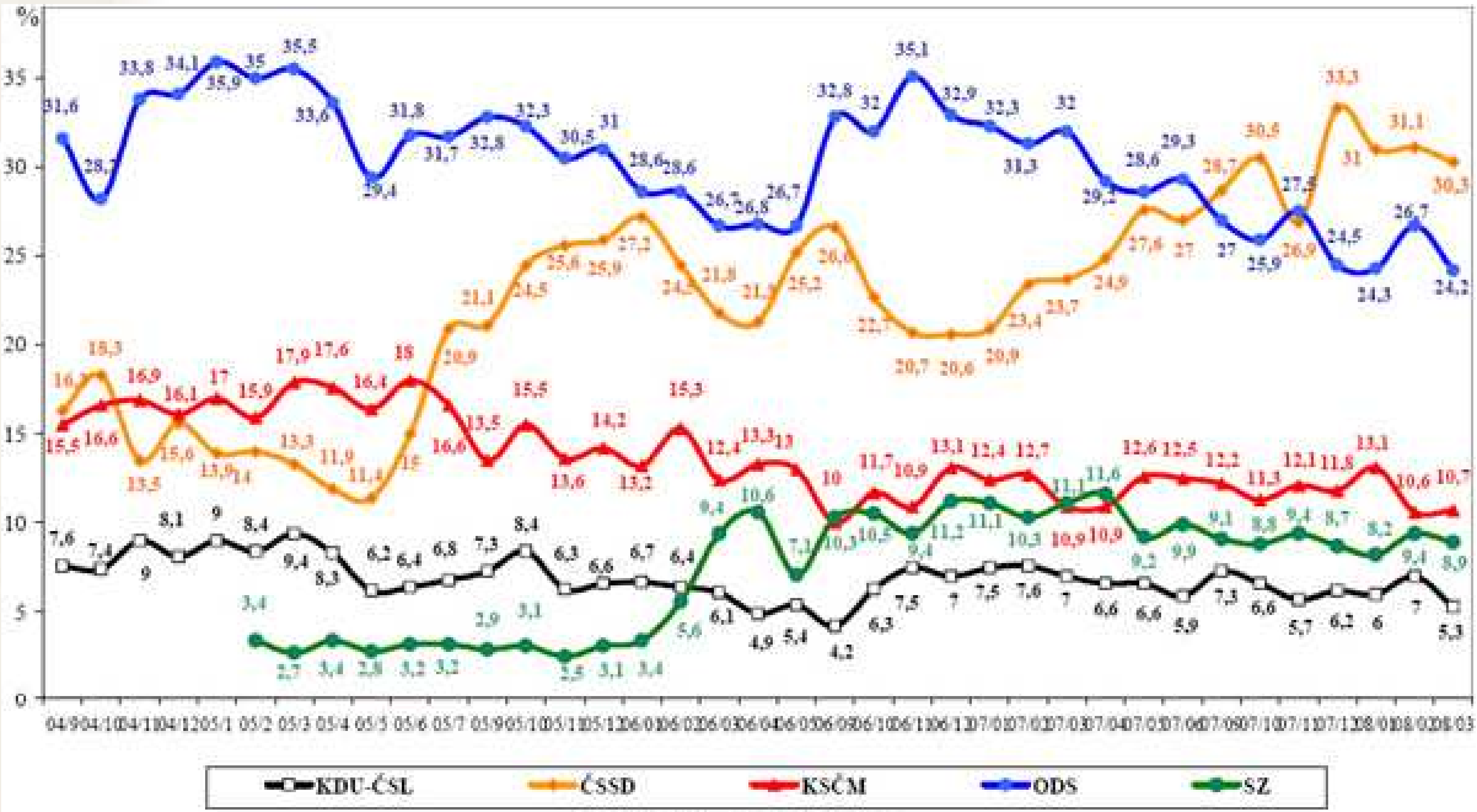
NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



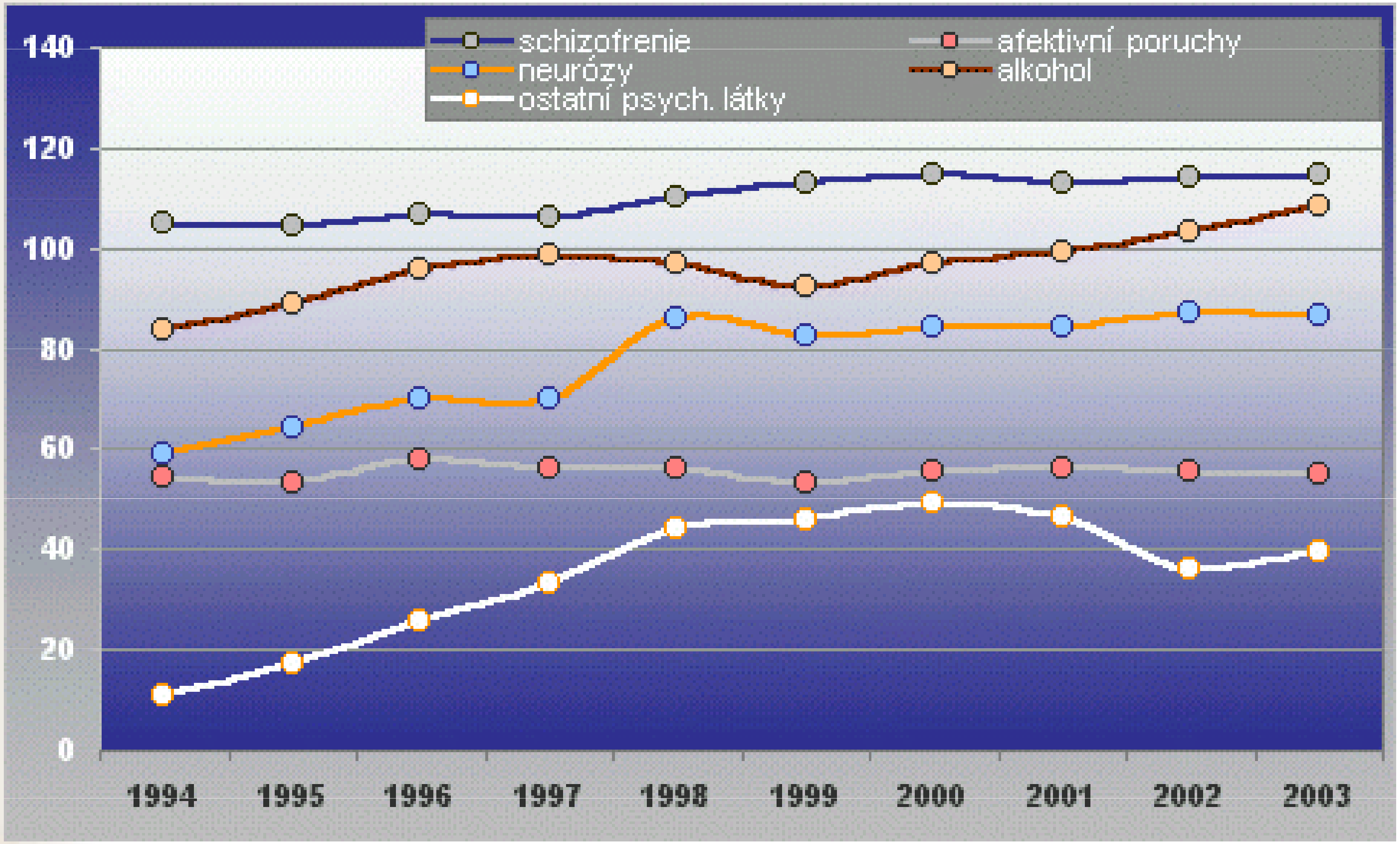
NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



Zdroj: STEM, Trendy 2004/9 - 2008/03

Preference politických stran v ČR v období od 8/2004 do 3/2008

NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



Vývoj počtu hospitalizací v lůžkových psychiatrických zařízeních (na 100 000 osob)

Pramen: Ústav zdravotnických informací a statistiky

ČASOVÁ ŘADA

TYPY HODNOT $y(t_i)$

Hodnoty časové řady popisují jevy fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

?

ZPRACOVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

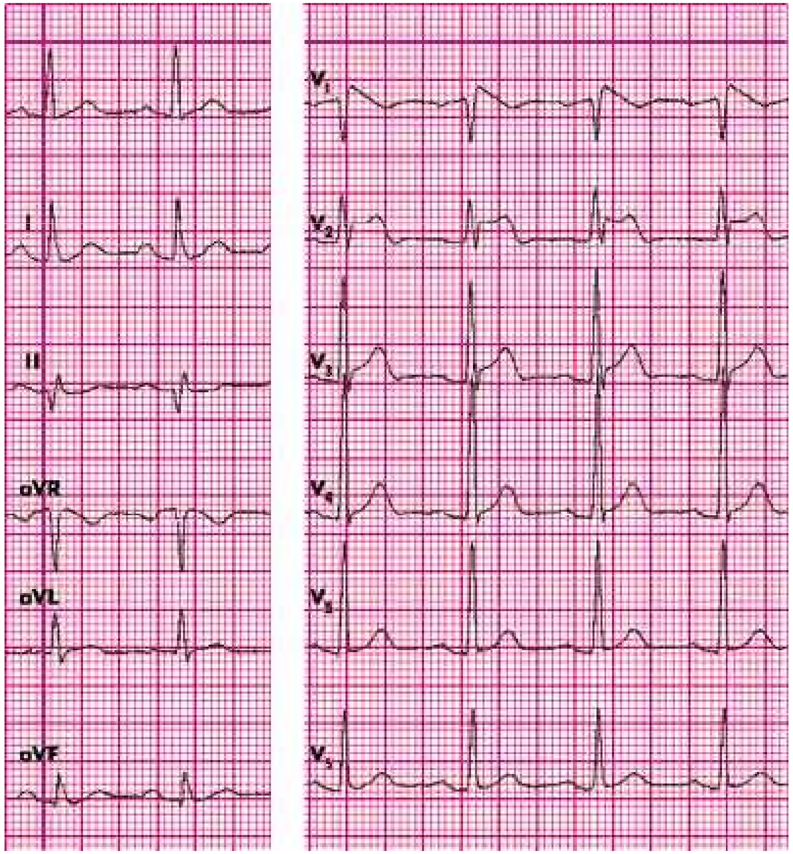
- ☑ abychom dokázali posoudit stav objektu generujícího časová data (OK, hypertenze, epilepsie, exitus, úroveň/dynamika chemického zamoření dané lokality,…);

ZPRACOVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

- ☑ abychom dokázali posoudit stav objektu generujícího časová data (OK, hypertenze, epilepsie, exitus, úroveň chemického zamoření dané lokality,…);

EKG – elektrokardiogram

záznam signálu EKG



ZPRACOVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

- ☑ abychom dokázali posoudit stav objektu generujícího časová data (OK, hypertenze, epilepsie, exitus, úroveň chemického zamoření dané lokality,…);

$\Downarrow$

popis vlastností časové řady

(pomocí několika podstatných souhrnných parametrů (statistik?))

$\Downarrow$

k popisu spíše „funkce" než jednoduchá hodnota, např. klouzavý průměr než průměr;
složky řady – trend, sezónní změny, pomalé a rychlé změny, nepravidelné oscilace – **analýza**

ZPRACOVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

- ☑ abychom dokázali předpovědět budoucnost sledovaného objektu (lze léčit a vyléčit, ocenit finanční nároky léčení po dobu přežití, nastane smogová situace, sociální složení obyvatelstva v daném časovém rozpětí,…);

predikce budoucích hodnot (?) – velká část analytických metod pro časové řady;

(**Predikce** (z lat. *prae*-, před, a *dicere*, říkat) znamená **předpověď** či prognózu, tvrzení o tom, co se stane nebo nestane v budoucnosti. Na rozdíl od věštění nebo hádání se slovo predikce obvykle užívá pro odhady, opřené o vědeckou hypotézu nebo teorii, tj. matematický model.

ZPRACOVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

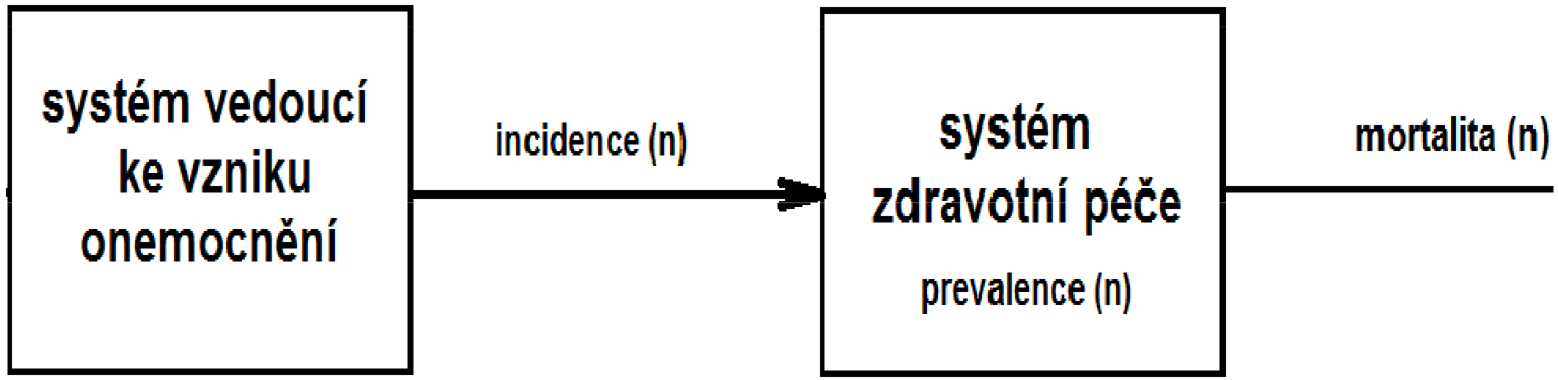
- ☑ abychom dokázali předpovědět jeho budoucnost (lze léčit a vyléčit, ocenit finanční nároky léčení po dobu přežití, nastane smogová situace, sociální složení obyvatelstva v daném časovém rozpětí,...);

musíme umět popsat dynamiku vývoje časové řady ⇒ ⇒ vytvořit matematický **! MODEL !** (vývoje) časové řady

NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD

- ☑ vstupní veličina(x)
- ☑ výstupní veličina(y)
- ☑ stavová(é) veličina(y) (s)

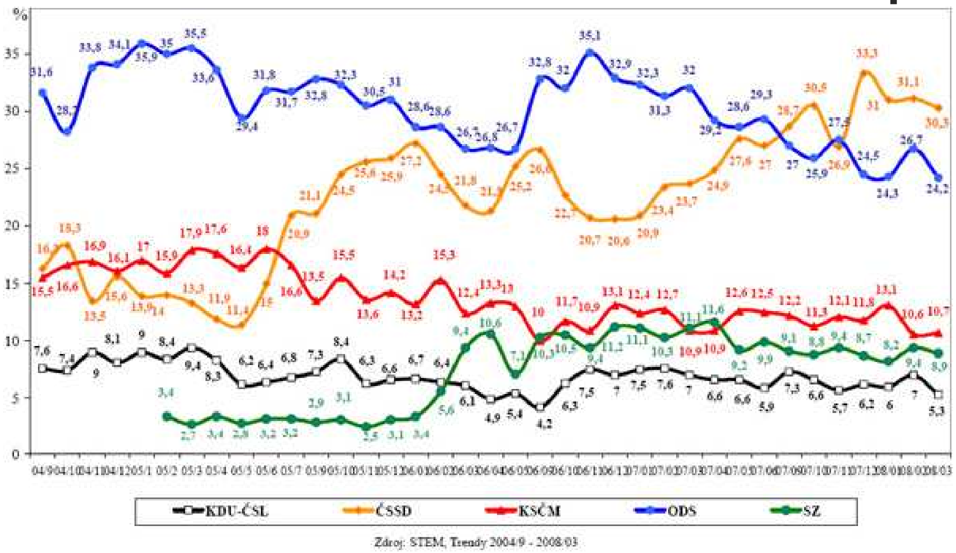
NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



- ☑ parametry popisující vlastnosti systému
- ☑ vstupní veličina(x)
- ☑ výstupní veličina(y)
- ☑ stavová(é) veličina(y) (s)

ZPRACOVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

- ☑ abychom dokázali předpovědět jeho budoucnost (lze léčit a vyléčit, ocenit finanční nároky léčení po dobu přežití, les do 20 let odumře, sociální složení obyvatelstva v daném časovém rozpětí, …);



musíme umět popsat dynamiku vývoje časové řady ⇒ ⇒ vytvořit matematický **! MODEL !** vývoje časové řady

ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

- ☑ **monitorování průběhu a detekce významných změn** - např. sledování funkce ledvin po transplantaci;

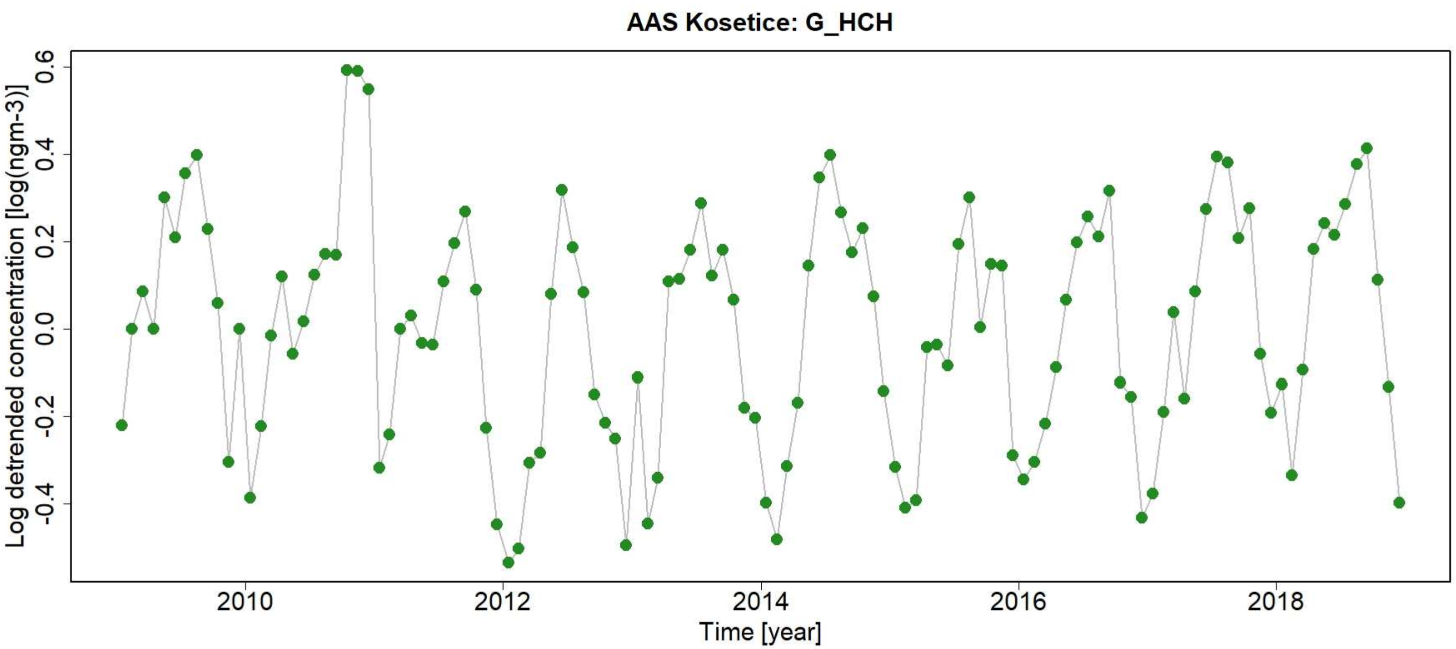
$\Downarrow$

opět potřebujeme **matematický model** popisující normální stav

ČASOVÉ ŘADY – CO S NIMI?

- **modelování průběhu časové řady**
  - pochopení procesů způsobujících vznik dat;
  - pragmatický nástroj pro splnění výše uvedených cílů

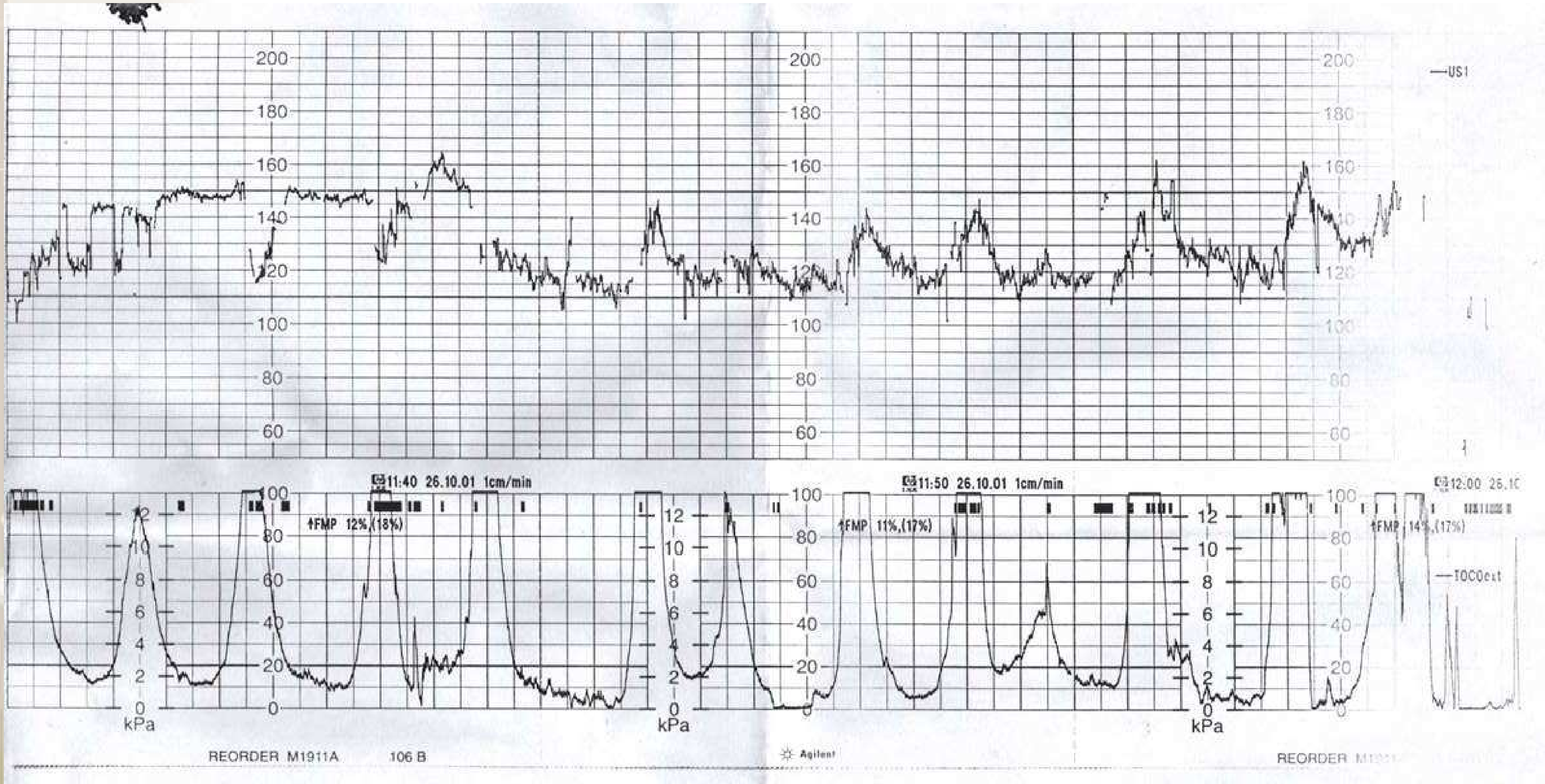
NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD

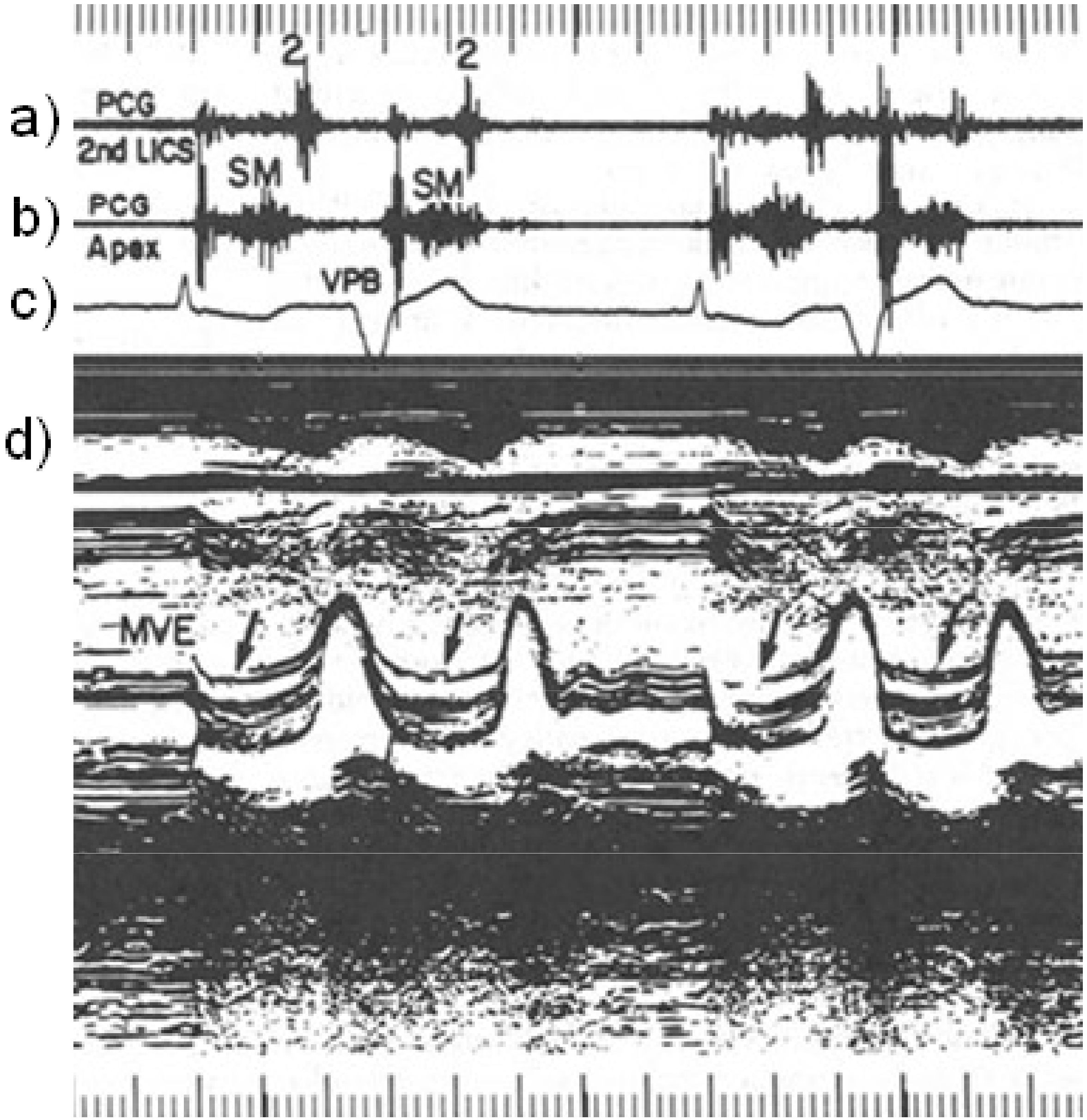
EKG - elektrokardiogram

NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD

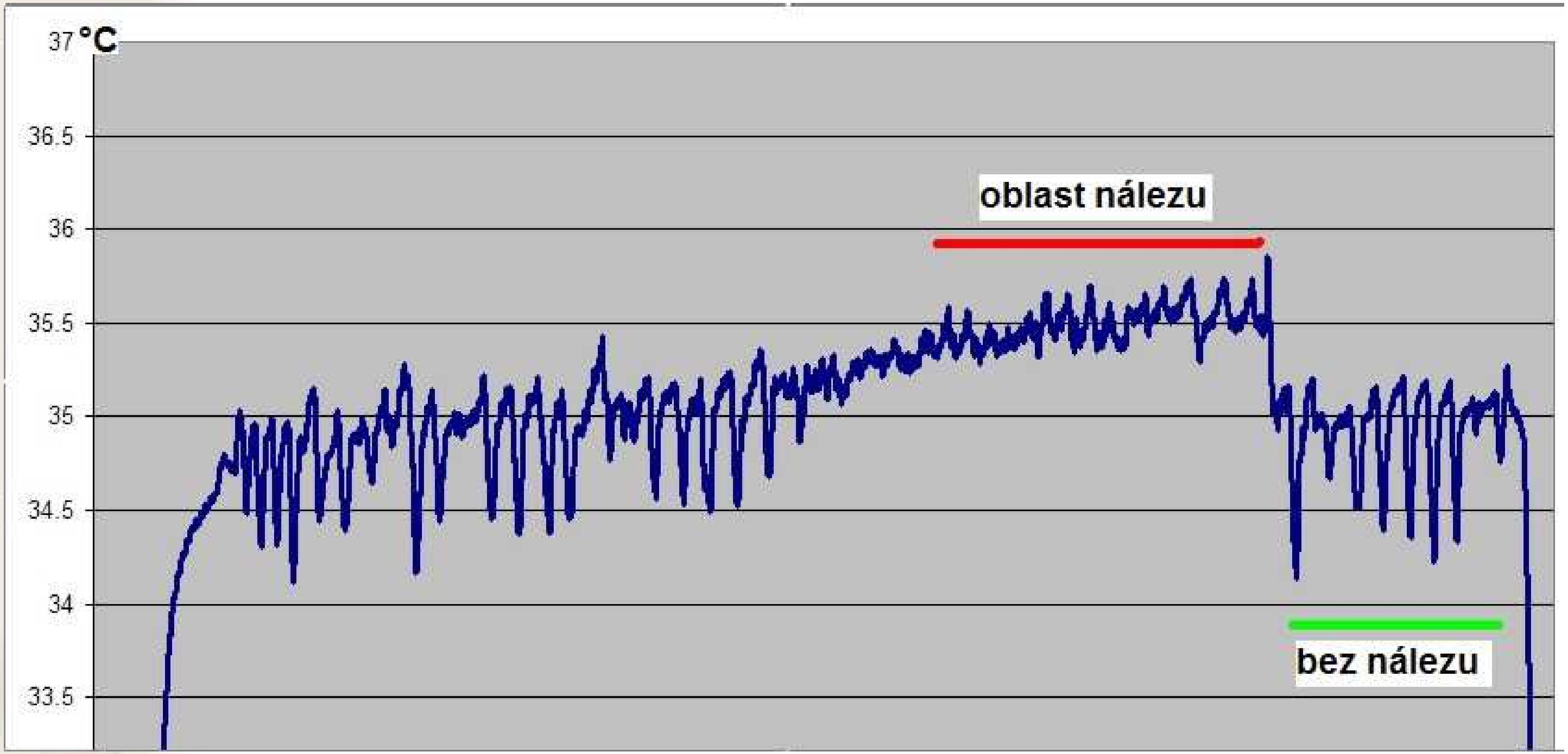


kardiotokogram

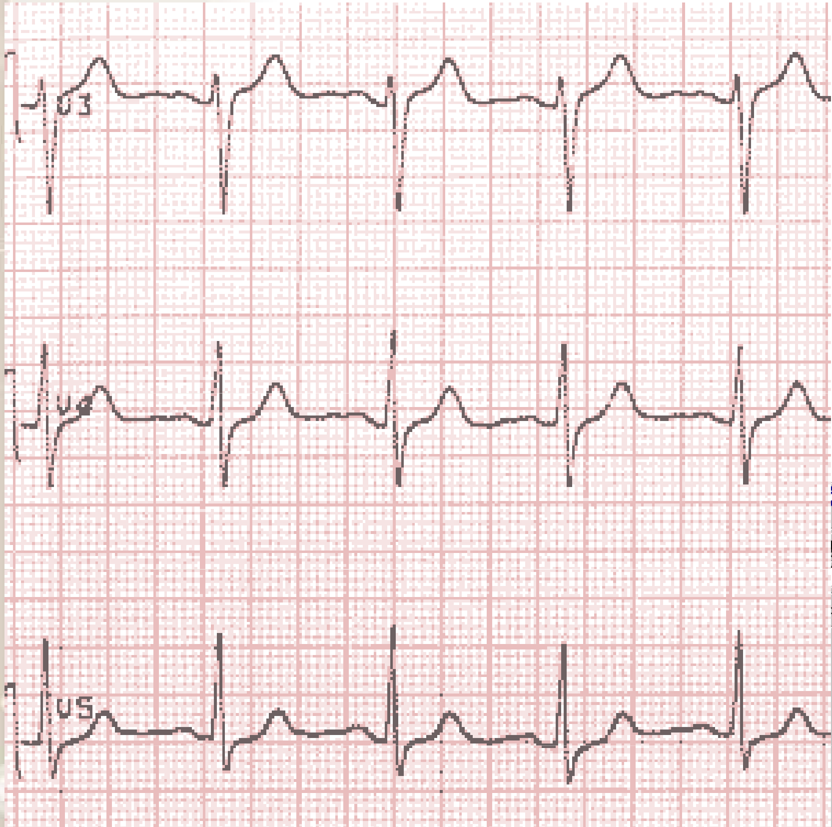
NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD

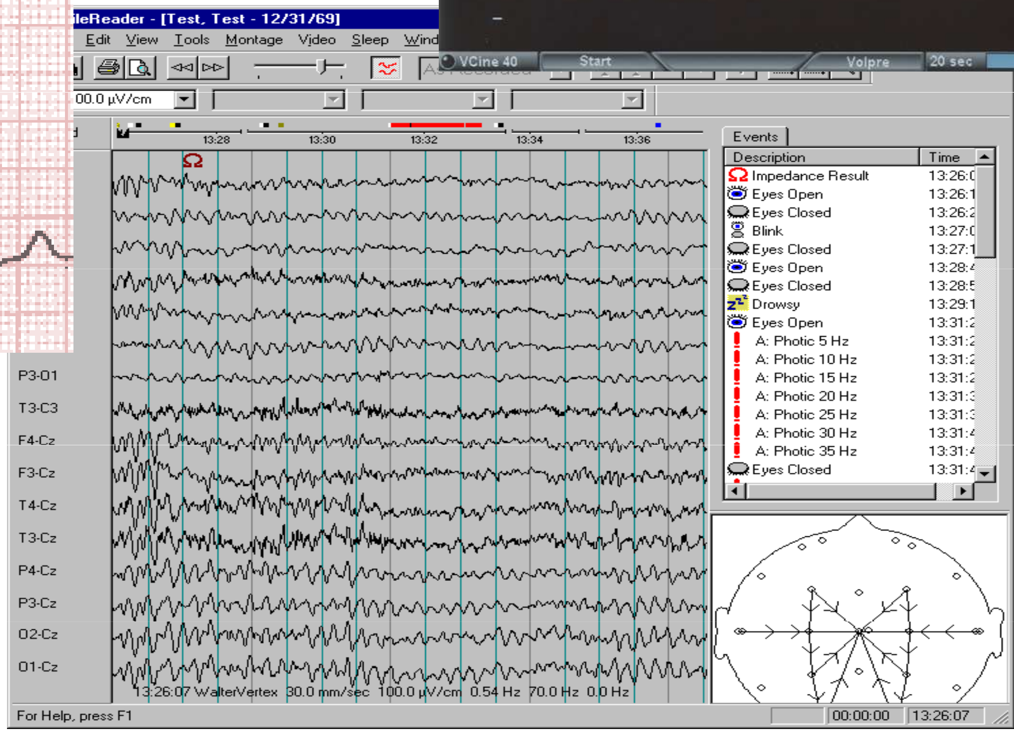


NĚKOLIK PŘÍKLADŮ NA ÚVOD



CO JE TO SIGNÁL ?





CO JE TO SIGNÁL ?

DEFINICE

Signál je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

INFORMACE

- poznatek (znalost) týkající se jakýchkoliv objektů, např. faktů, událostí, věcí, procesů nebo myšlenek včetně pojmů, které mají v daném kontextu specifický význam (ISO/IEC 2382-1:1993 „Informační technologie – část I: Základní pojmy“)
- název pro obsah toho, co se vymění s vnějším světem, když se mu přizpůsobujeme a působíme na něj svým přizpůsobováním. Proces přijímání a využívání informace je procesem našeho přizpůsobování k nahodilostem vnějšího prostředí a aktivního života v tomto prostředí (WIENER);
- poznatek, který omezuje nebo odstraňuje nejistotu týkající se výskytu určitého jevu z dané množiny možných jevů;

!!! NEHMOTNÁ !!!

ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

NOSIČ

ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

INFORMACE

NOSIČ

ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

INFORMACE

NOSIČ

TO NECHME TECHNIKŮM (ELEKTRIKÁŘŮM, …)

ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

INFORMACE

$\Downarrow$

ZPRACOVÁNÍ INFORMACE

NOSIČ

TO NECHME TECHNIKŮM (ELEKTRIKÁŘŮM, …)

II. ZÁKLADNÍ KONCEPT ZPRACOVÁNÍ DAT

MUNI Masarykova univerzita

MU IBA

ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT

ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT

HODNOTÍCÍ „VÝROK"

ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT

HODNOTÍCÍ „VÝROK“

O STAVU, RESP. CHOVÁNÍ REÁLNÉHO OBJEKTU

ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT

PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH

HODNOTÍCÍ „VÝROK"

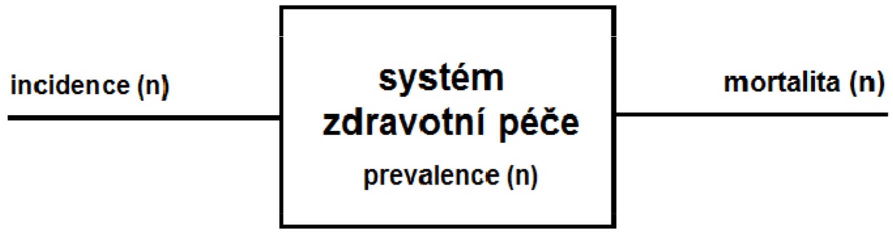
ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT → PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH → HODNOTÍCÍ „VÝROK“

CÍLEM JE ODHALIT TEN PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH NAVZDORY VŠEMU TOMU, CO NÁM TO ODHALENÍ KAZÍ

K ČEMU TO JE?

- zjistit co se děje v reálném objektu;
- dokázat jej zařadit;
- dokázat predikovat jeho chování;
- …….



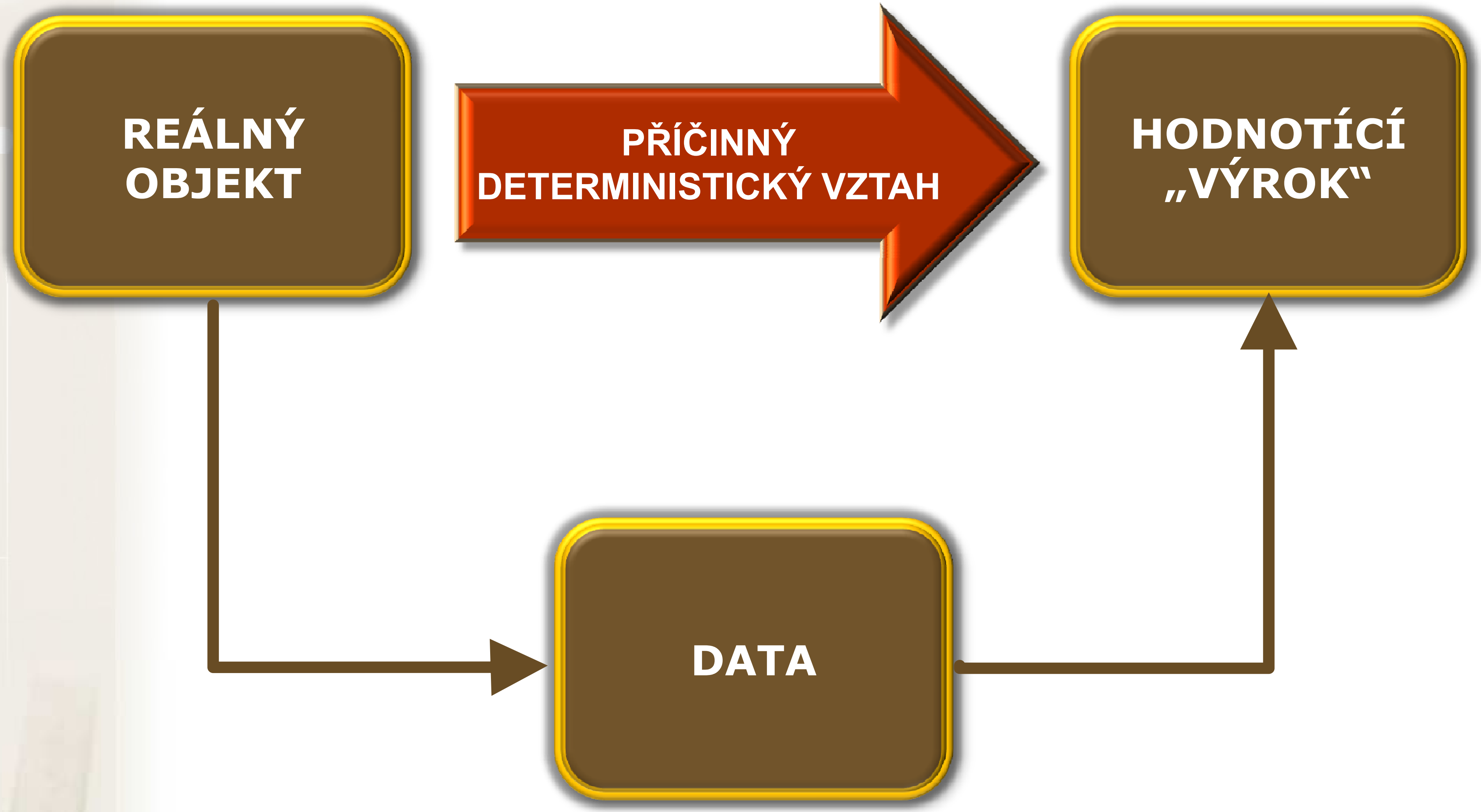
ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT

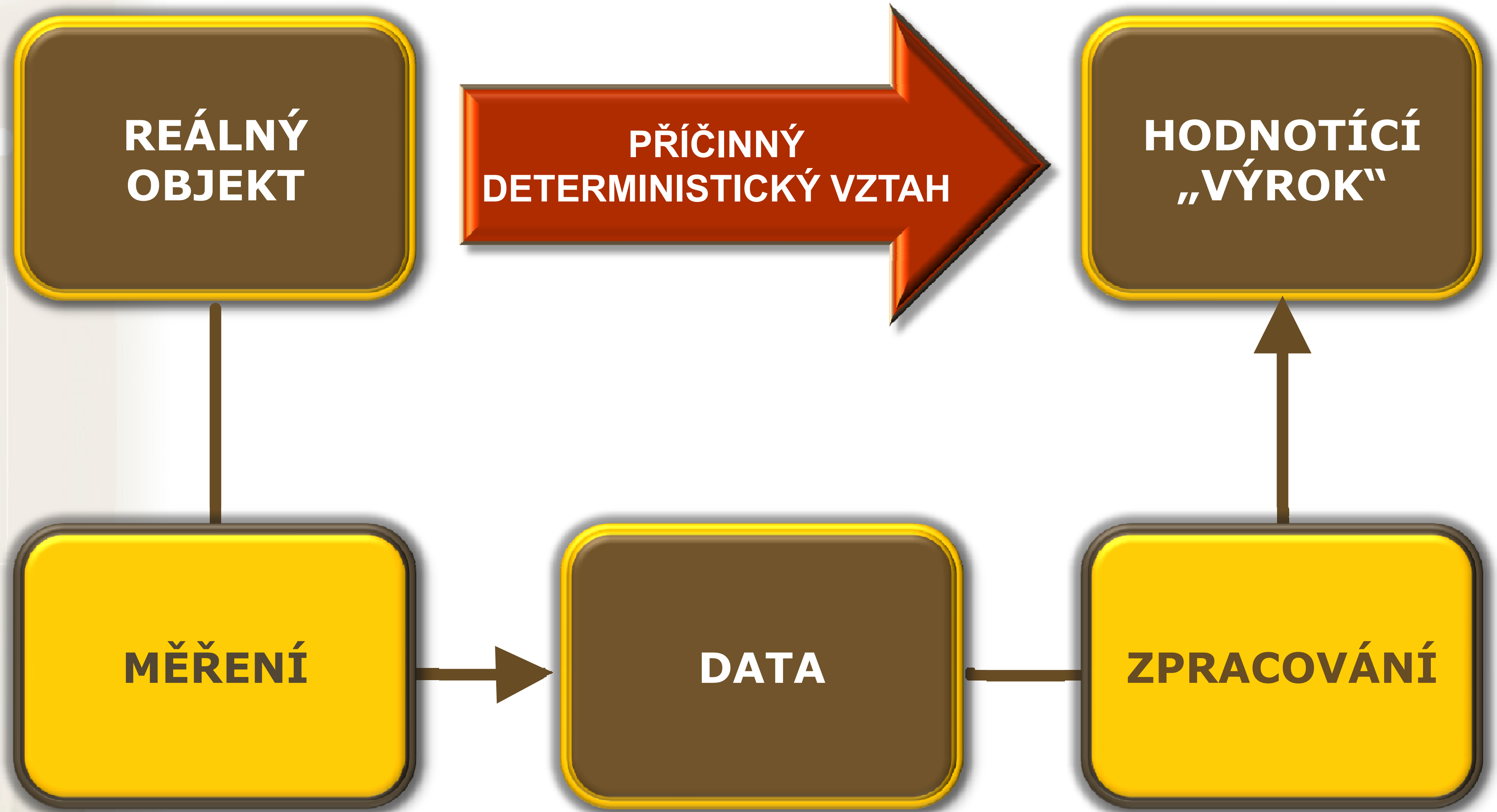
PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH

HODNOTÍCÍ „VÝROK“

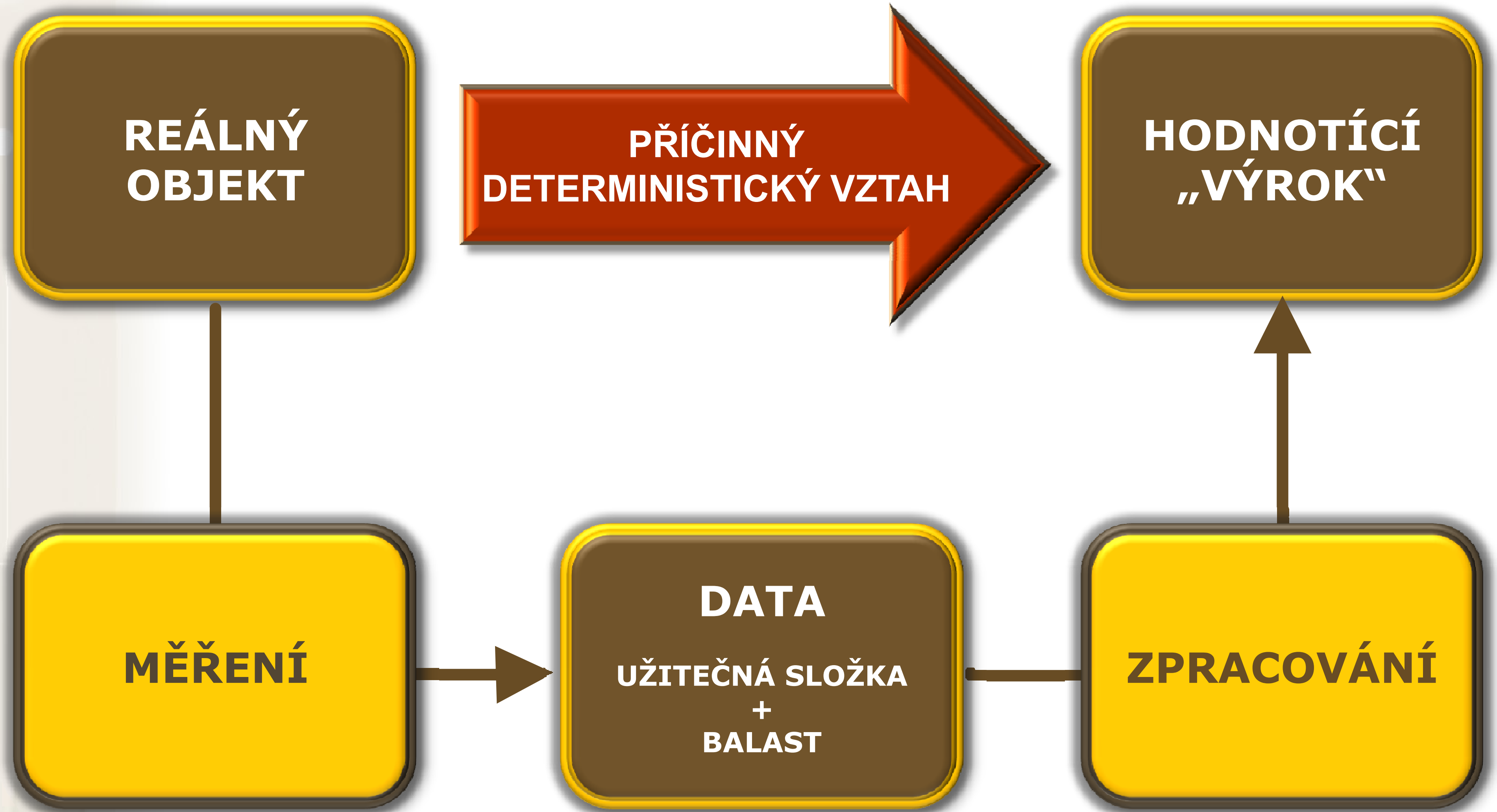
ZÁKLADNÍ KONCEPT



ZÁKLADNÍ KONCEPT



ZÁKLADNÍ KONCEPT



ZÁKLADNÍ KONCEPT

- ☑ **užitečná složka**

  to je ta **deterministická (systematická)** část dat, kterou využijeme pro generování výroku

DATA (ČASOVÉ ŘADY)

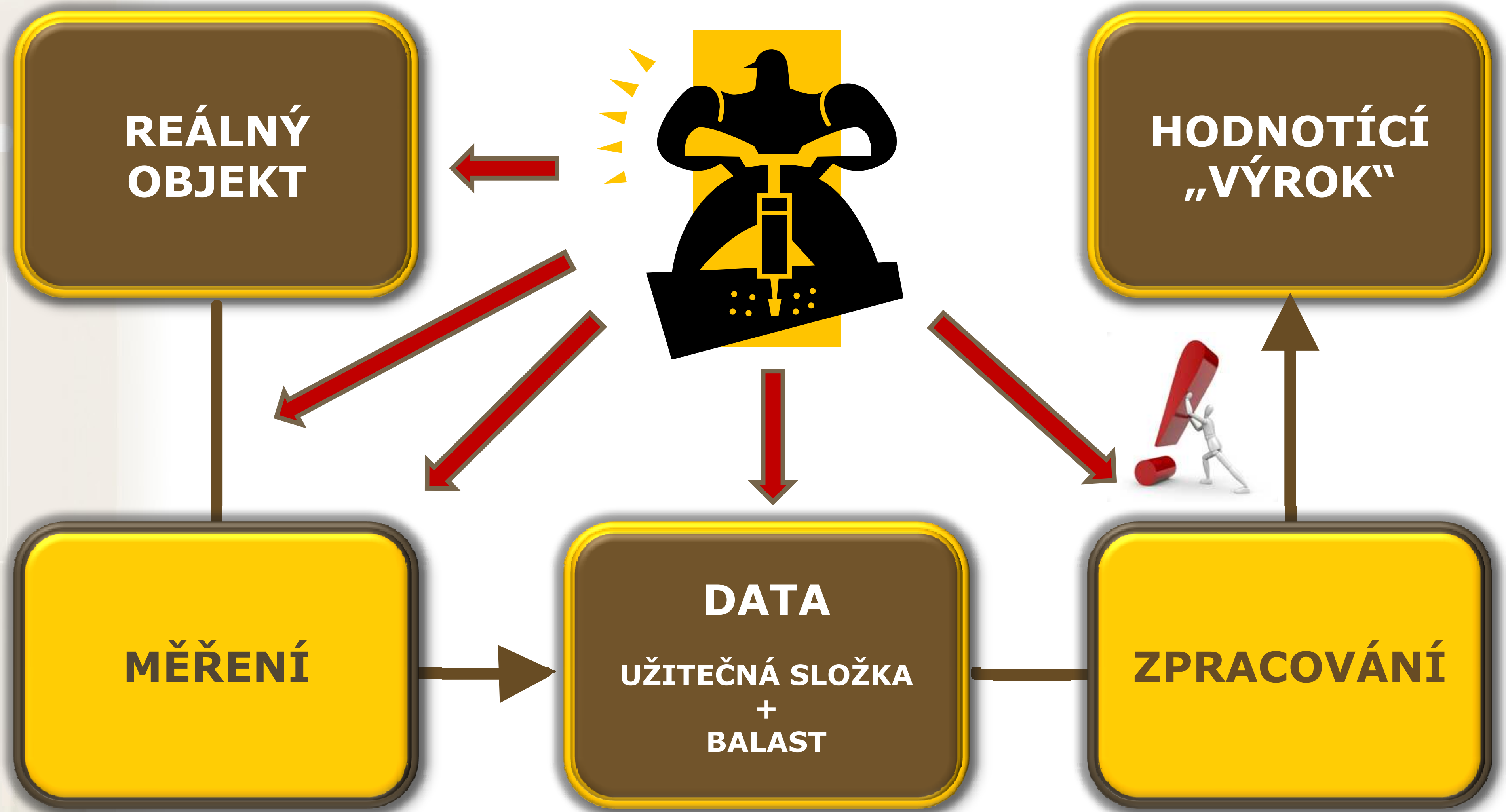
- ☑ **užitečná složka**

  to je ta **deterministická** část dat, kterou využijeme pro generování výroku

- ☑ **balast**

  část dat nesouvisející s cílem zpracování

ZÁKLADNÍ KONCEPT



DATA (ČASOVÉ ŘADY)

- ☑ **užitečná složka**

  to je ta **deterministická** část dat, kterou využijeme pro generování výroku

- ☑ **balast**

  část dat nesouvisející s cílem zpracování

  - deterministická část
    - přímo ze zdroje

DATA (ČASOVÉ ŘADY)

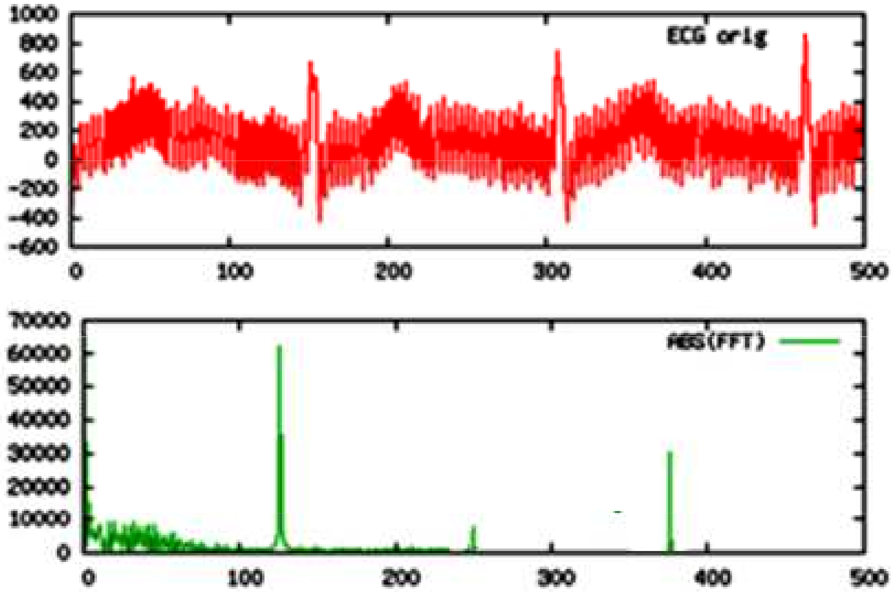
- ☑ **užitečná složka**

  to je ta **deterministická** část dat, kterou využijeme pro generování výroku

- ☑ **balast**

  část dat nesouvisející s cílem zpracování

  - ➔ deterministická část
    - ❑ přímo ze zdroje
    - ❑ zavlečená po cestě



DATA (ČASOVÉ ŘADY)

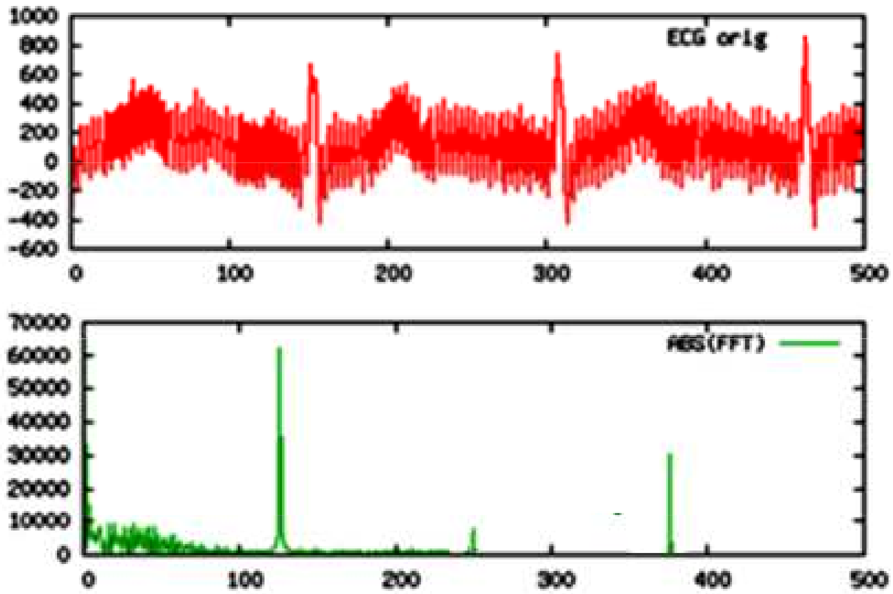
- ☑ **užitečná složka**

  to je ta **deterministická** část dat, kterou využijeme pro generování výroku

- ☑ **balast**

  část dat nesouvisející s cílem zpracování

  - ➔ deterministická část
    - ❑ přímo ze zdroje
    - ❑ zavlečená po cestě
      - přidaná (šum)
      - vyplývající z vlastností přenosové cesty (zkreslení, deformace)



DATA (ČASOVÉ ŘADY)

- **užitečná složka**

  to je ta **deterministická** část dat, kterou využijeme pro generování výroku

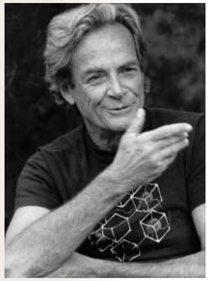
- **balast**

  část dat nesouvisející s cílem zpracování

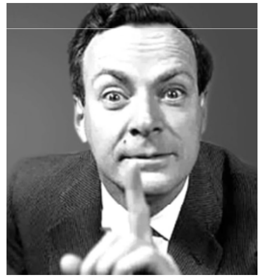
  - deterministická část
    - přímo ze zdroje
    - zavlečená po cestě
  - všechno ostatní, tj. nedeterministická (?) složka

    na její příčiny buď nemáme nebo nám to nestojí za námahu (šum)

NEDETERMINISTICKÁ SLOŽKA



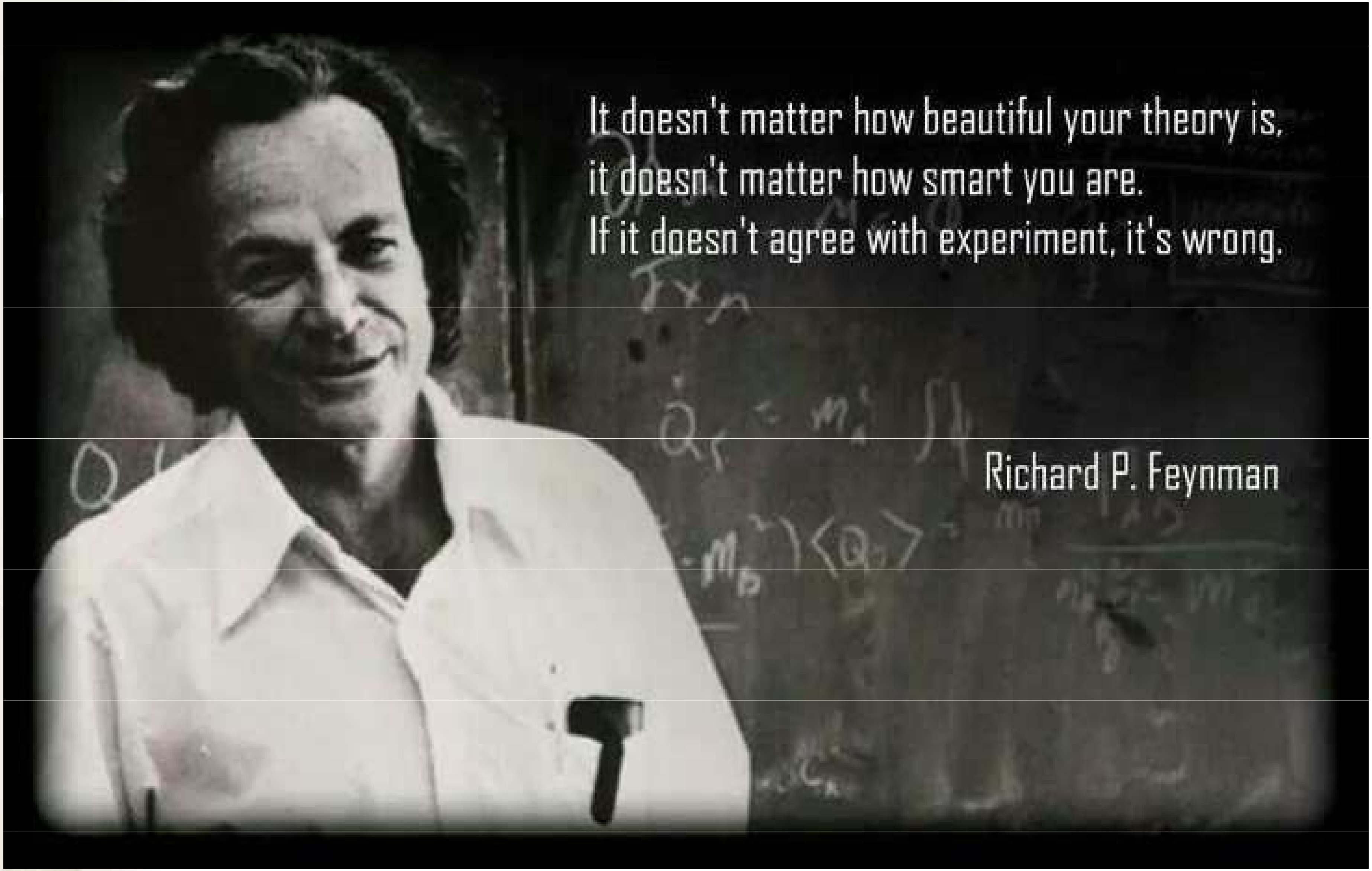
Richard Feynman – neurčitost x možnost
(Lectures on Physics 1963)



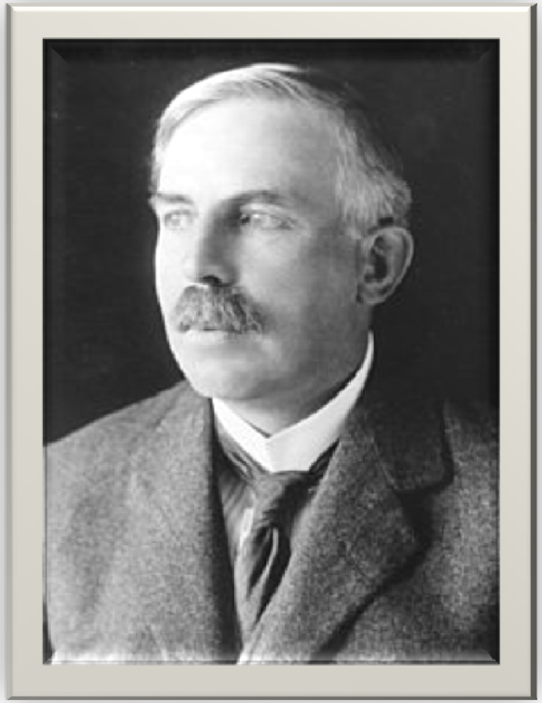
- ☑ náhodná – pravděpodobnost, statistika
  (G. Cardano *Liber de ludo aleae* 1663)

- ☑ neurčitá – příslušnost, fuzzy algebra (L. A. Zadeh 1965)

- ☑ hrubá – důvěra, hrubé množiny (Z. Pawłak 1991)


It doesn't matter how beautiful your theory is,
it doesn't matter how smart you are.
If it doesn't agree with experiment, it's wrong.
Richard P. Feynman

„If your experiment needs statistics, you ought to have done a better experiment.“



Ernest Rutherford,
1st Baron Rutherford of Nelson
*1871 New Zealand
+1937 Cambridge, England
OM FRS
otec nukleární fyziky

ZÁKLADNÍ KONCEPT

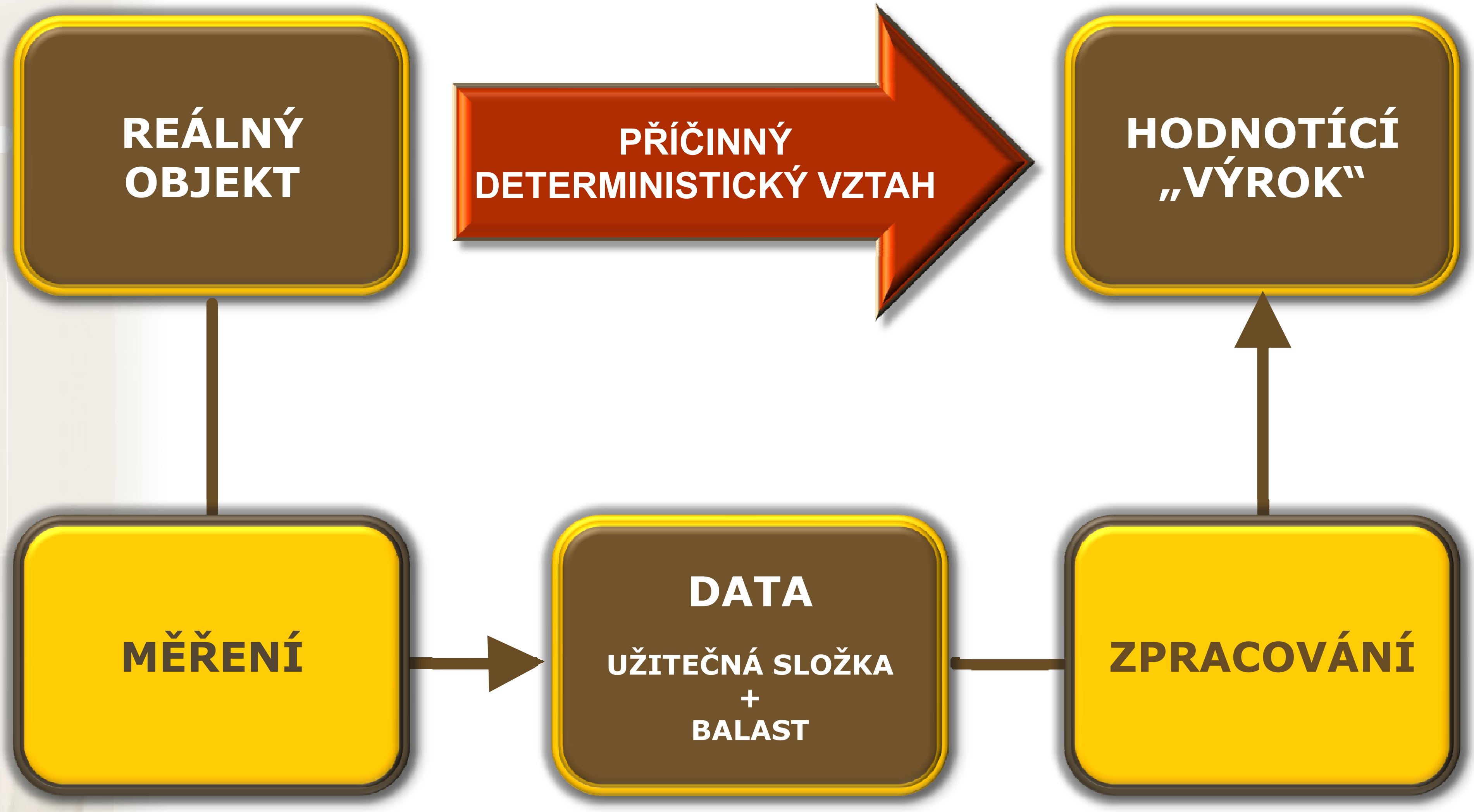
REÁLNÝ OBJEKT

PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH

HODNOTÍCÍ „VÝROK“

CÍLEM JE ODHALIT TEN PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH NAVZDORY VŠEMU TOMU, CO NÁM TO ODHALENÍ KAZÍ

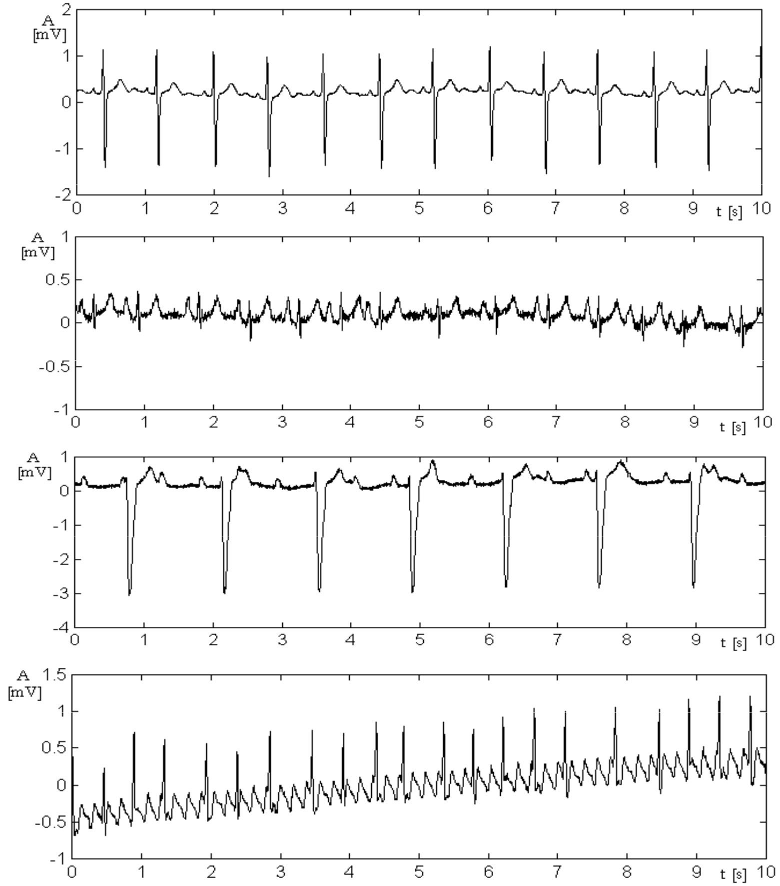
ZÁKLADNÍ KONCEPT

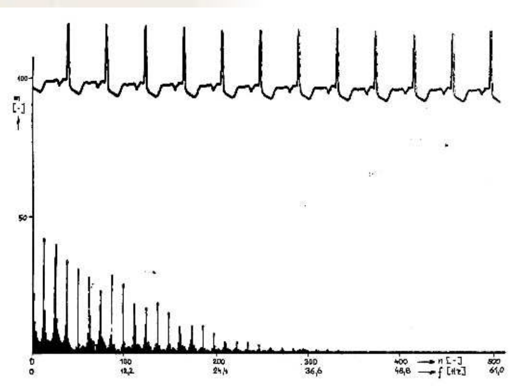


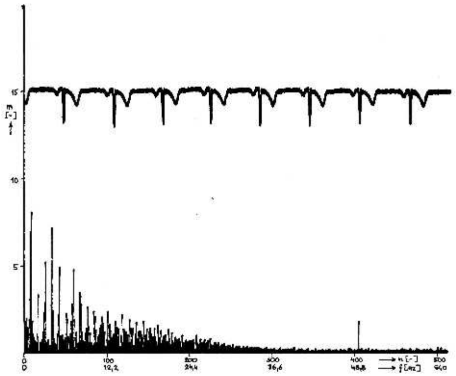
SKLADBA DAT

- ☑ matematický model deterministické složky(složek)

  a zkoumáme jak data odpovídají modelové představě



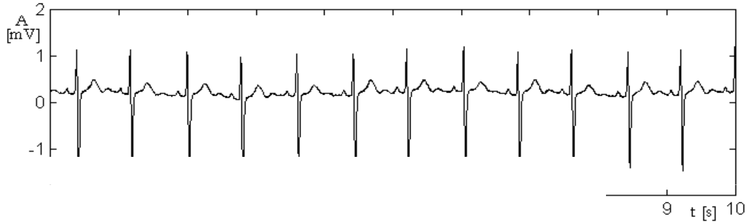


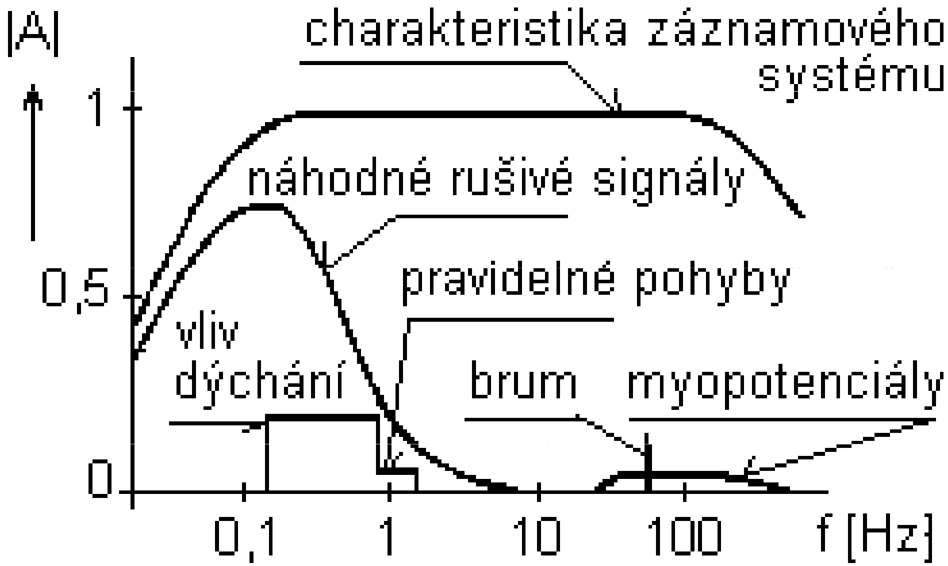


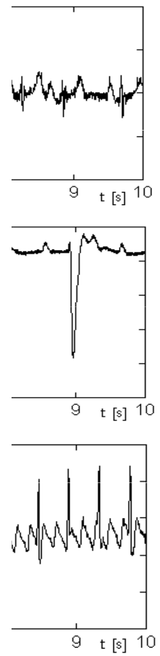
SKLADBA DAT

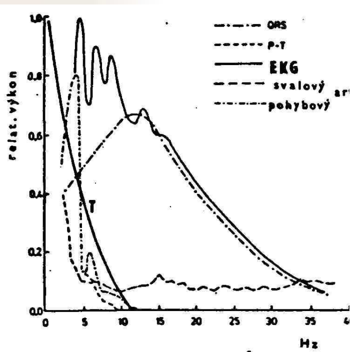
- ☑ matematický model deterministické složky(složek)

  a zkoumáme jak data odpovídají modelové představě









SKLADBA DAT

- ☑ model deterministické složky (složek);
  - nelineární
  - lineární
    - časová oblast
    - frekvenční oblast
    - …

SKLADBA DAT

- ☑ model deterministické složky (složek);
  - ➔ nelineární x lineární
    - ❑ časová oblast
    - ❑ frekvenční oblast
    - ❑ …
  - ➔ časově závislý x nezávislý
- ☑ model nedeterministické složky
  - ➔ pravděpodobnostní
  - ➔ fuzzy
  - ➔ hrubý
  - ➔ …

III. ČASOVÉ ŘADY

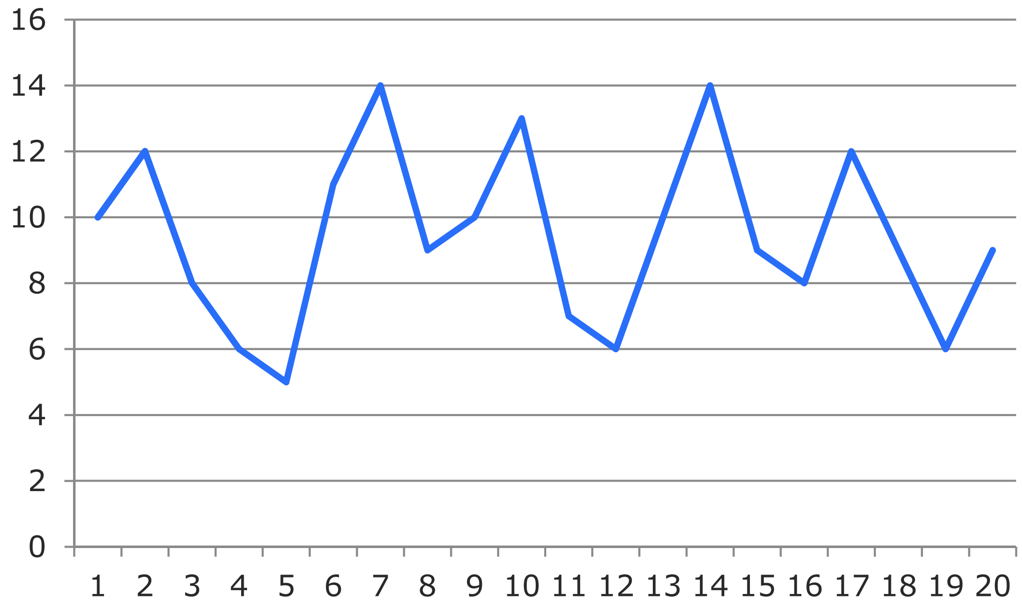
PŘÍKLAD TAK TROCHU NA VYSVĚTLENOU

Masarykova univerzita

MU IBA

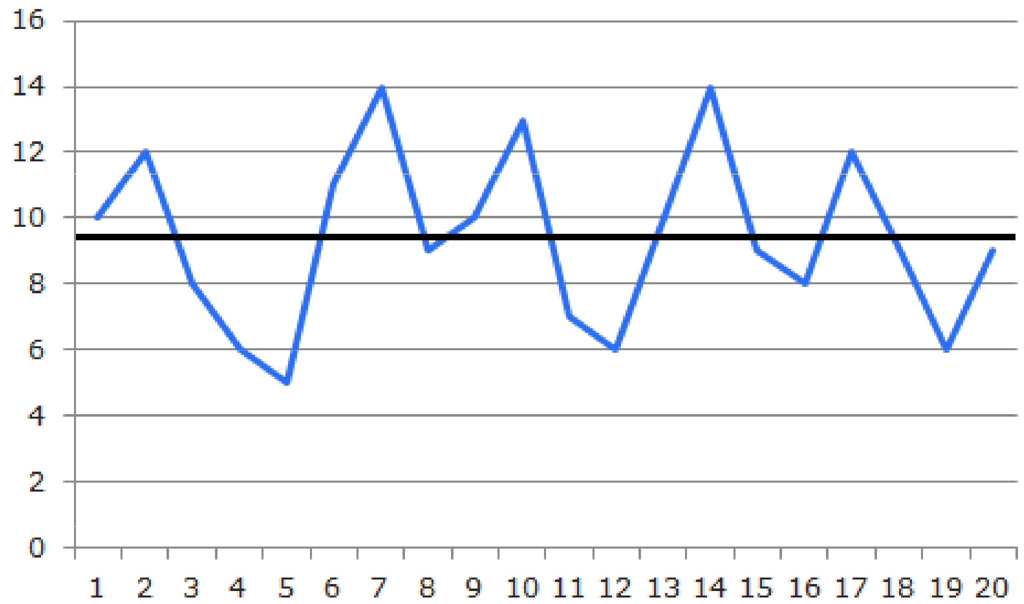
ZADÁNÍ

10 12 8 6 5 11 14 9 10 13 7 6 10 14 9 8 12 9 6 9



ZADÁNÍ

- průměrná hodnota:



ZADÁNÍ

- průměrná hodnota:

- klouzavý průměr:

pro m liché

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=k-(m-1)\operatorname{div}2}^{k+(m-1)\operatorname{div}2} x(i) = \sum_{i=k-(m-1)\operatorname{div}2}^{k+(m-1)\operatorname{div}2} \frac{1}{m} \cdot x(i) = \sum_{i=k-(m-1)\operatorname{div}2}^{k+(m-1)\operatorname{div}2} a_m \cdot x(i)$$

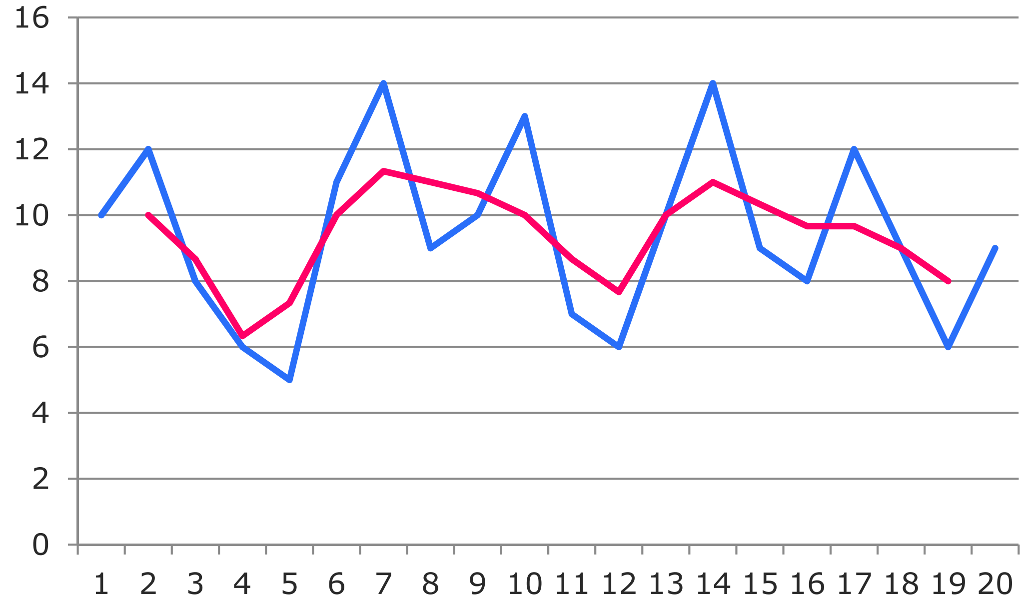
pro m sudé třeba

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=k-m\operatorname{div}2+1}^{k+(m\operatorname{div}2)} x(i) = \sum_{i=k-m\operatorname{div}2+1}^{k+(m\operatorname{div}2)} \frac{1}{m} \cdot x(i) = \sum_{i=k-m\operatorname{div}2+1}^{k+(m\operatorname{div}2)} a_i \cdot x(i)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	

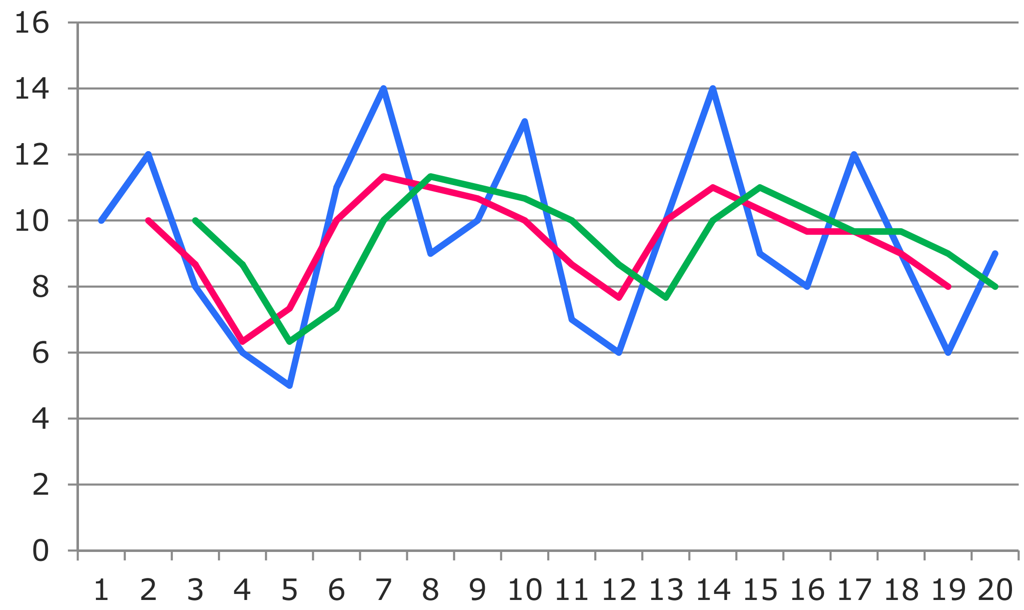


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

přechodný děj = reakce na počáteční podmínky



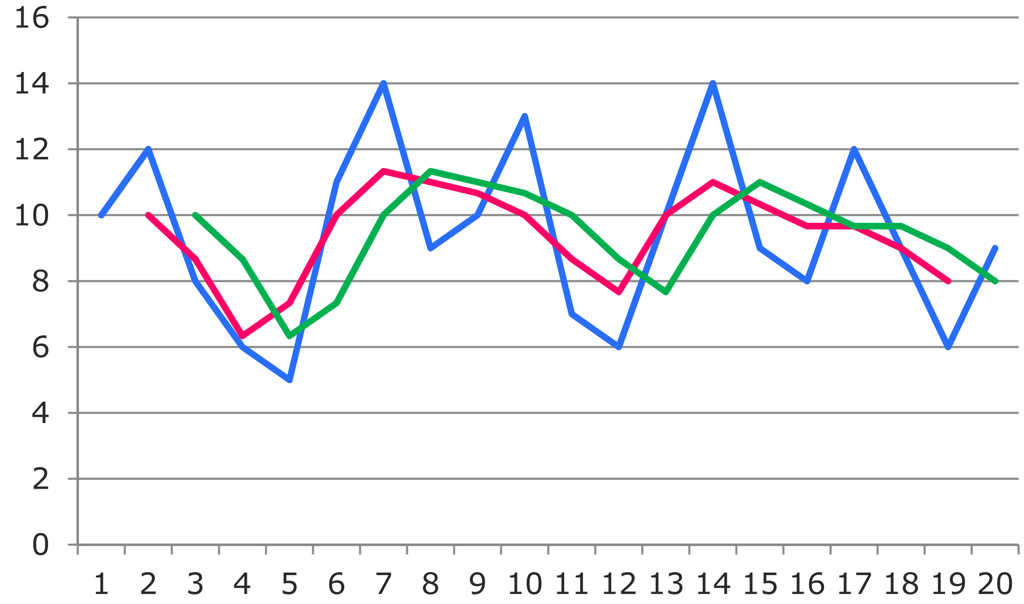
KAUZALITA ≡
≡ PŘÍČINNOST

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

nulové počáteční podmínky

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

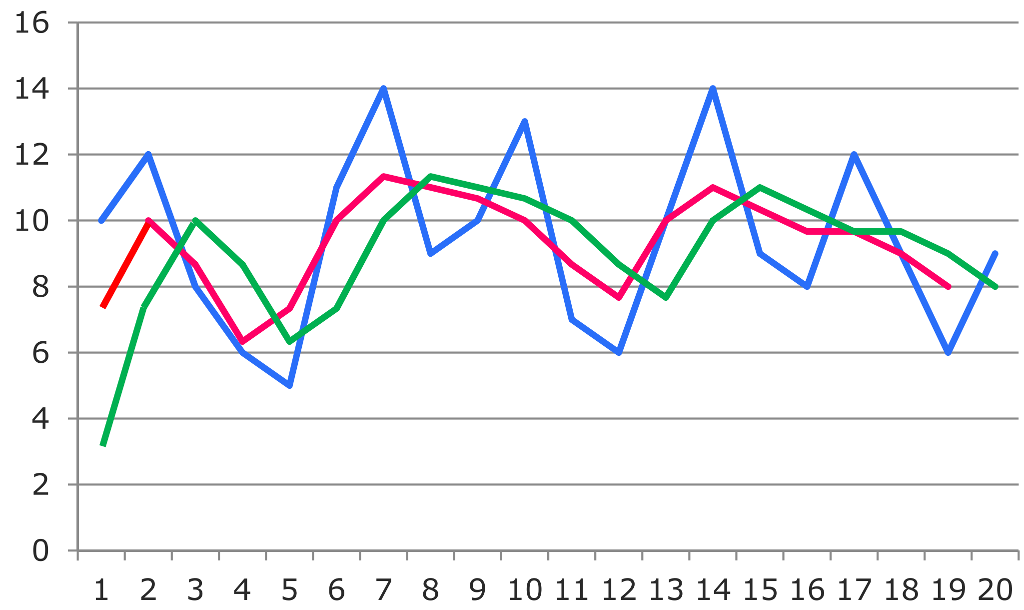


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	7,3	3,3
2	12	10,0	7,3
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

nulové počáteční podmínky x(0)=0, x(-1)=0

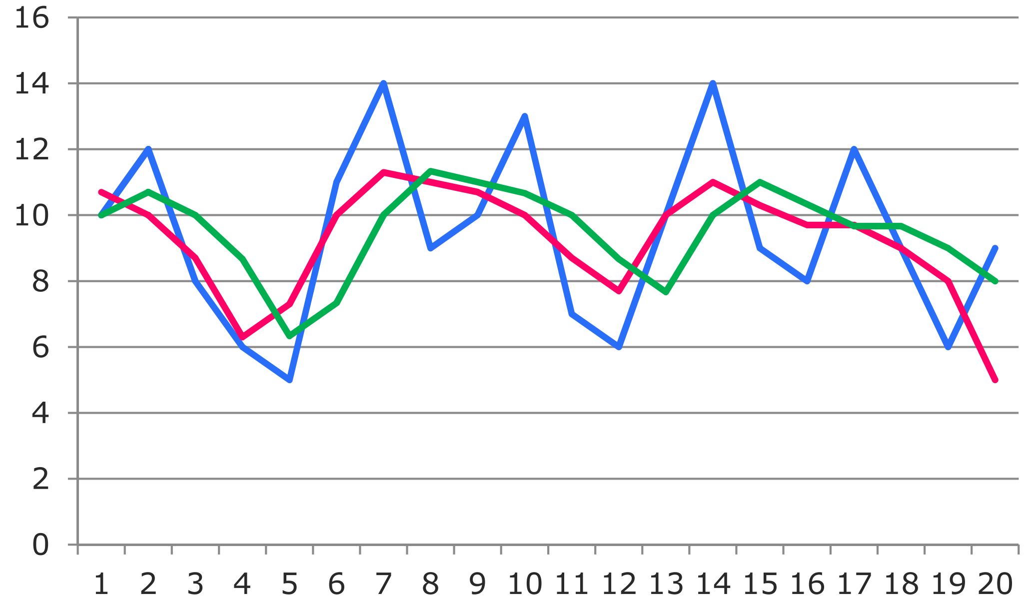


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

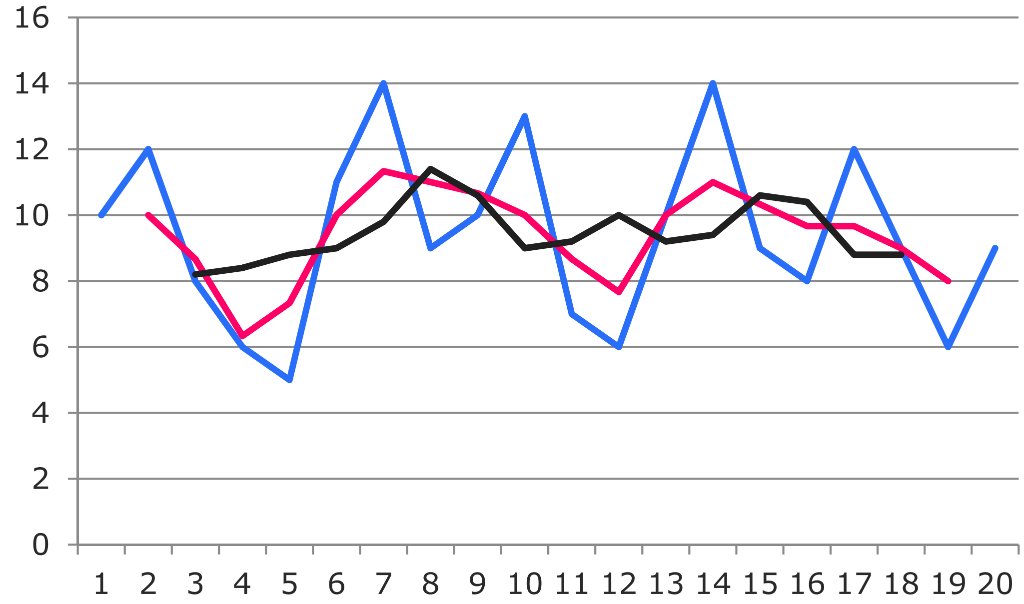
1	10	10,7	10,0
2	12	10,0	10,7
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

počáteční podmínky rovné první hodnotě
x(0) = 10, x(-1)=10



KLOUZAVÝ PRŮMĚR

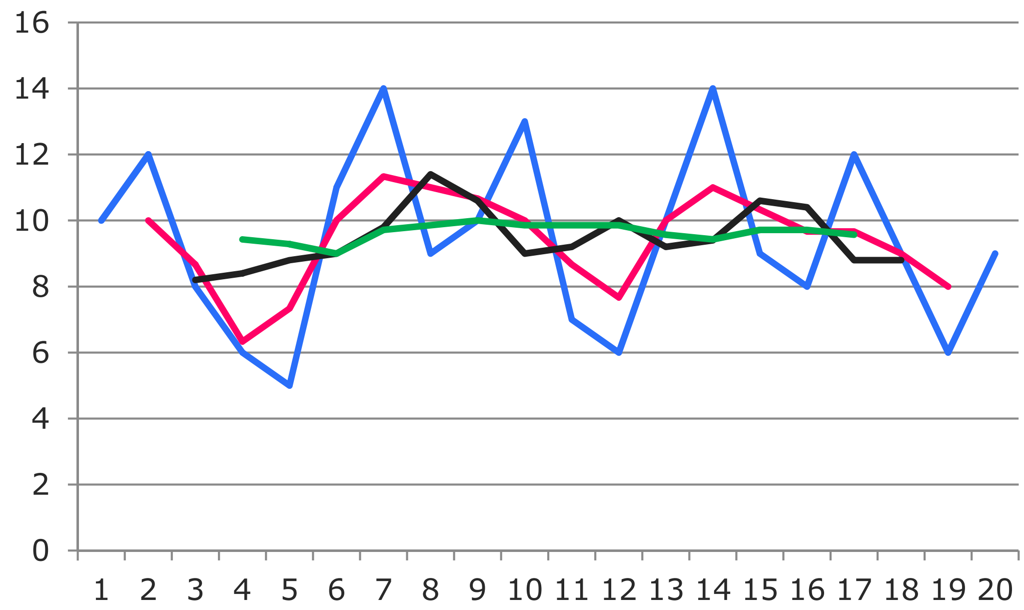
		m = 3	m = 5
1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		



a = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

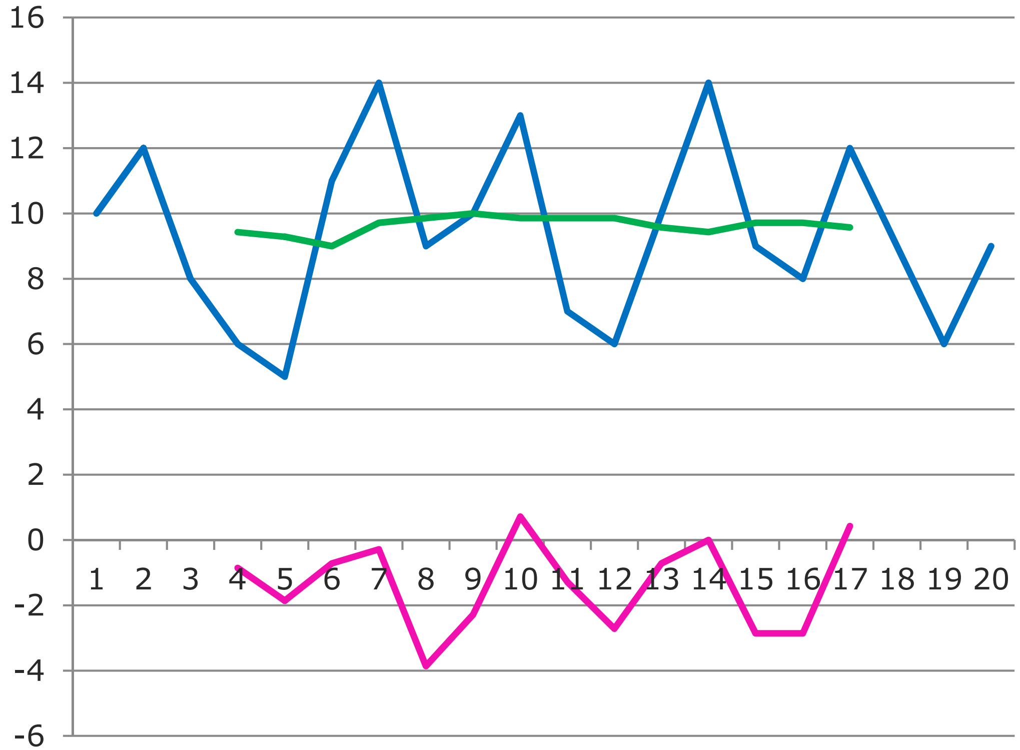
		m = 3	m = 5	m = 7
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



a = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

		m = 3	m = 7	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			

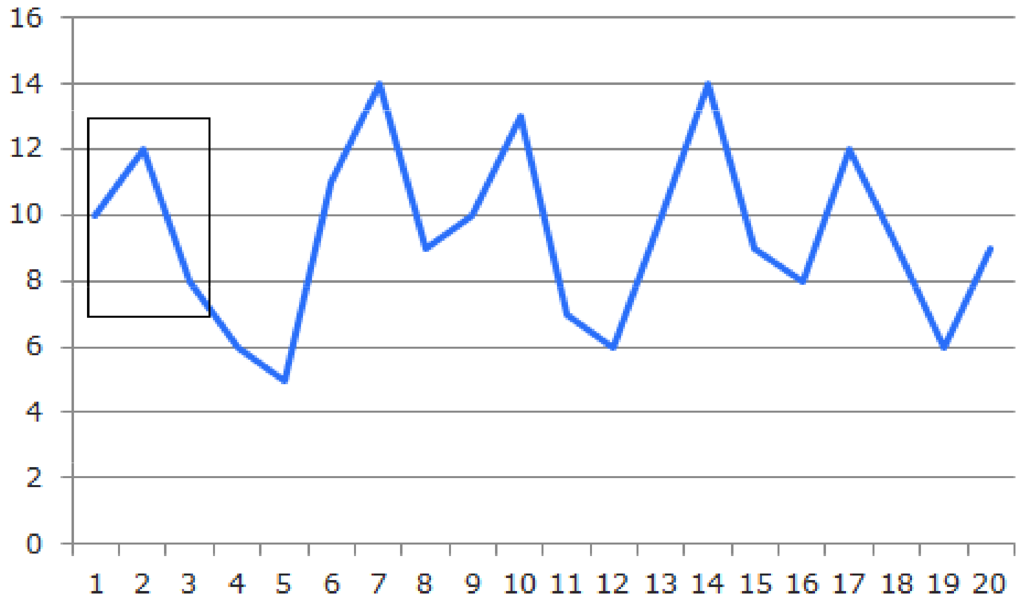


a = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7, -1/7, 1/7)

ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

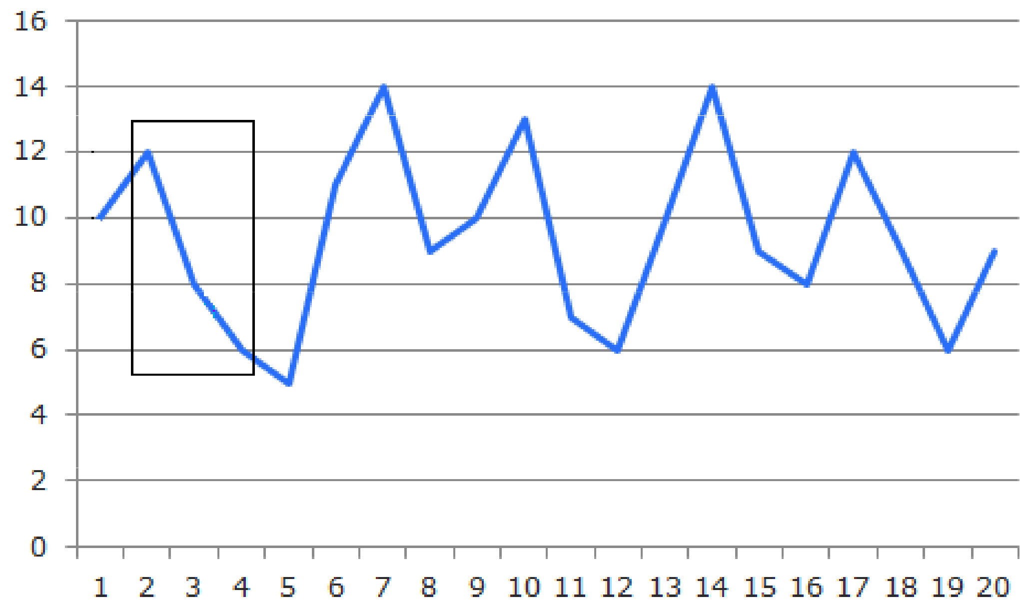
1.



ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1.



ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1.

2.

rekurze – používá staré hodnoty výstupních vzorků

NOVÉ POJMY

- ☑ koeficienty odpovídající žádanému průběhu časové řady (model);
- ☑ přechodný děj (odezva na počáteční podmínky);
- ☑ kauzalita;
- ☑ rekurze.

IV. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD
ZÁKLADNÍ POJMY

Masarykova univerzita

MU IBA

VELIČINY☼ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné veličiny vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) **modely**;
- ☑ model veličiny by měl splňovat dva základní požadavky:
  - ➔ výstižnost, přesnost;
  - ➔ jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE VELIČIN
(A JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

A) spojité a diskrétní

B) reálné a komplexní

C) deterministické a nedeterministické (náhodné?)

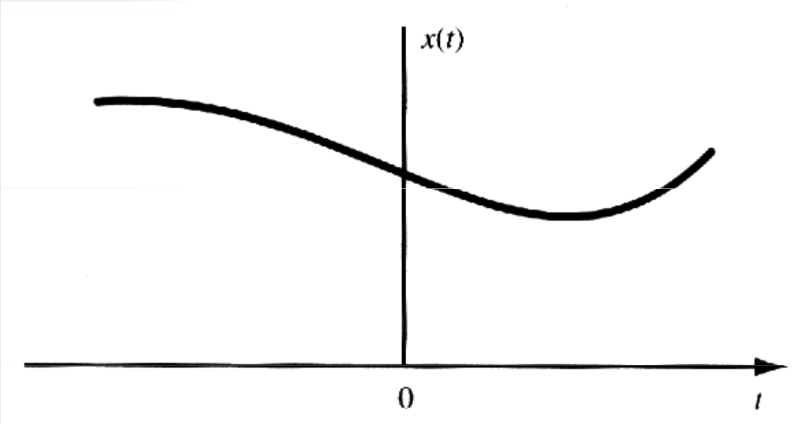
D) periodické a neperiodické

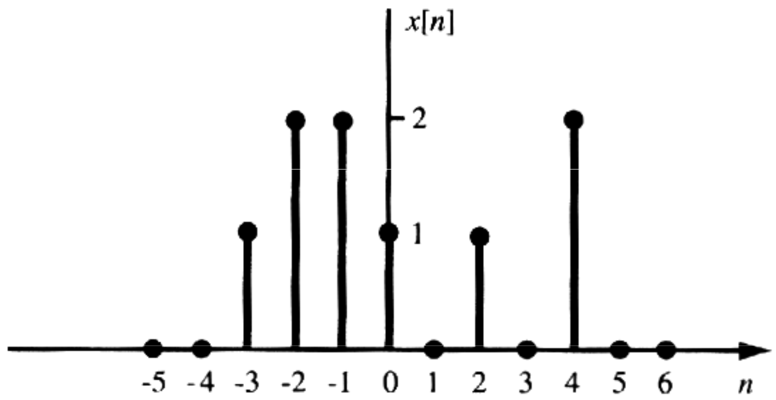
E) sudé a liché

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- ☑ **Spojitá veličina**(přesněji **veličina se spojitým časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- ☑ **Diskrétní veličina** (přesněji **veličina s diskrétním časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní veličinu proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. x(nT).

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY





A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- kvalitativní:
  - nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - binární
- kvantitativní:
  - spojitá;
  - diskrétní;

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- ☑ kvalitativní:
  - ➔ nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ➔ ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - ➔ binární
- ☑ kvantitativní:
  - ➔ spojitá
  - ➔ diskrétní

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu reálná nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, s.12):

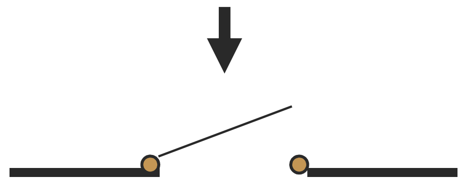
- ☑ kvalitativní:
  - ➔ nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ➔ ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - ➔ binární
- ☑ kvantitativní:
  - ➔ spojitá
  - ➔ diskrétní

Délka dat

budeme se zabývat posloupnostmi od desítek vzorků

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- U veličiny s diskrétním časem není její hodnota mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní veličinu lze také získat **vzorkováním** veličiny se spojitým časem: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$, ... (též značení x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

diskrétní veličinu můžeme zapsat

→explicitně seznamem hodnot, např.

(zde se implicitně předpokládá, že pořadí prvků je číslováno od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

→ funkčním předpisem (modelem), např.

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ VELIČINY

- **Reálná veličina (model)** je taková, která nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelná.)
- **Komplexní veličina (model)** je taková, která nabývá komplexních hodnot. (Hypotetická, v praxi neměřitelná.)

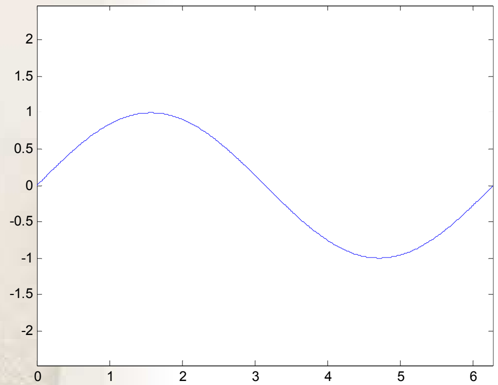
$$x(t) = x_1(t)+ix_2(t), \text{ resp. } x(t) = x_1(t)+jx_2(t)$$

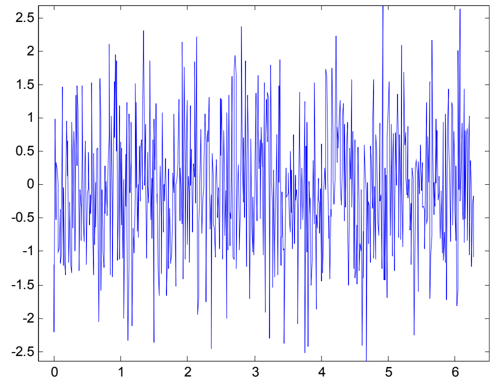
Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

C) DETERMINISTICKÉ A NEDETERMINISTICKÉ (NÁHODNÉ) VELIČINY

- **Deterministická veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Taková veličina může být popsán analytickou funkcí času *t*.

- **Nedeterministická (náhodná, stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum, definované rozložení, momenty.





C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

- **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

!!! POZOR POZOR !!!

Náhodnost není generickou vlastností dané veličiny, tuto vlastnost jí přisuzuje předpokládaný matematický nástroj.

! POHOV !

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

Náhodná (stochastická) veličina je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné (?!) (tj. tak deterministicky složité, že jim nerozumíme). Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

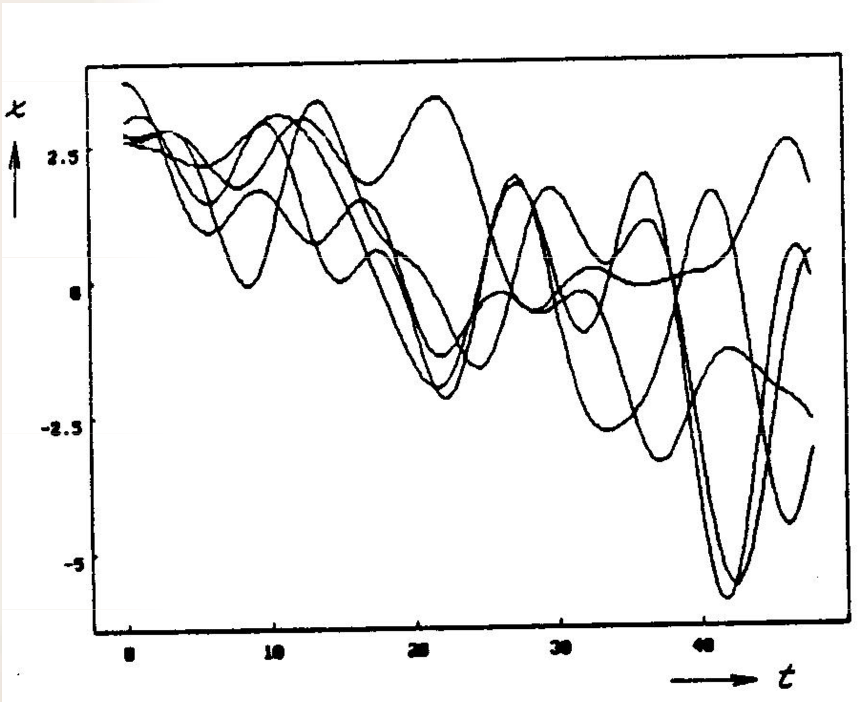
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

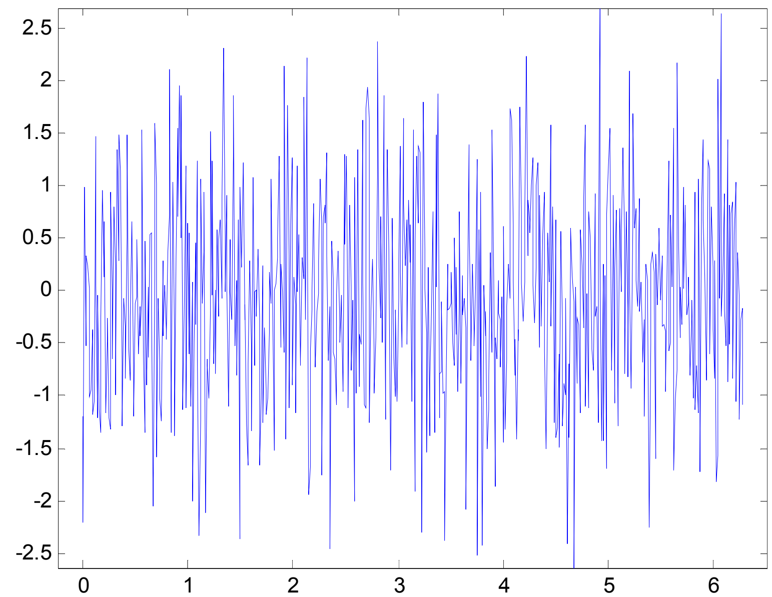
- stacionarita;
- ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním

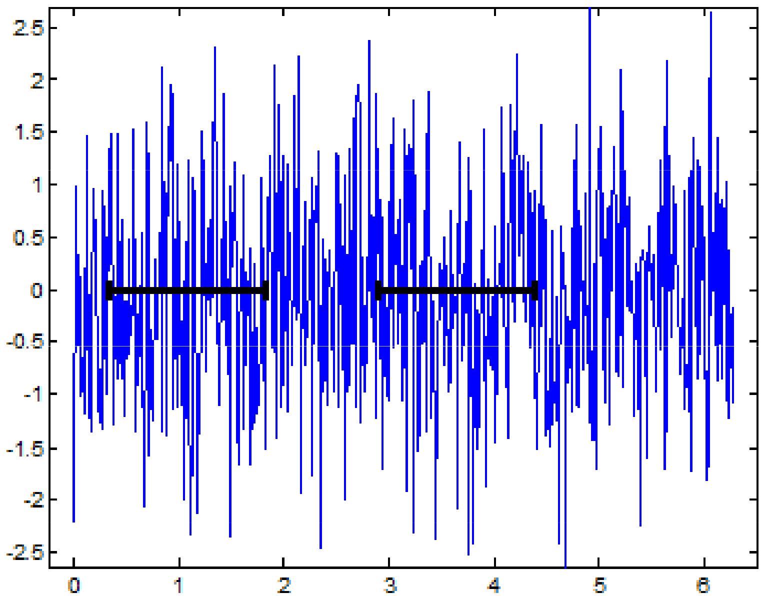




STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak (záleží na definici a přístupu).

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Spojitá veličina $x(t)$ je **periodická s periodou *T***, jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

- Nejmenší kladná hodnota T, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

kde k je celé číslo.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

Pozor!

- Pro konstantní veličinu není definována základní perioda. Konstantní veličina je periodická pro každou hodnotu *T*.
- Spojitá veličina, která není periodická se nazývá **neperiodická** nebo **aperiodická**.
- Reálné veličiny, např. biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních veličinách**.

Pohov!

řečový signál – samohláska „e"

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Pro diskrétní veličinu (časovou řadu) definujeme periodicitu s periodou N obdobně

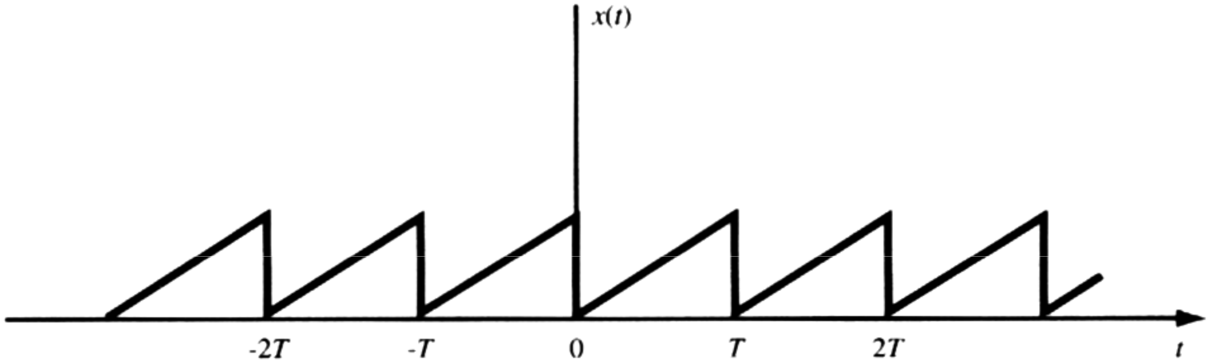
a

Pozor!

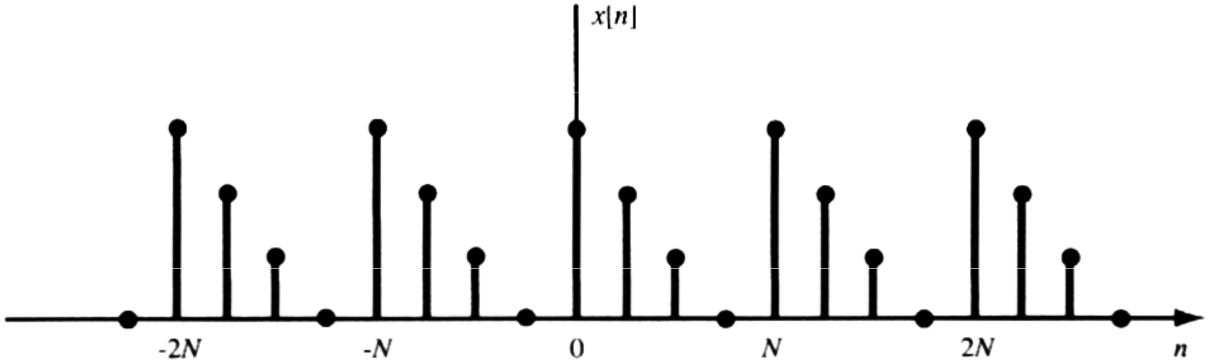
- ☑ Diskrétní veličina (časová řada) získaná rovnoměrným vzorkováním periodické spojité veličiny **nemusí** být periodická.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických veličin **nemusí** být periodická veličina.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických veličin s tímtéž vzorkováním **je vždy** periodická veličina.

Pohov!

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY



(a)



(b)

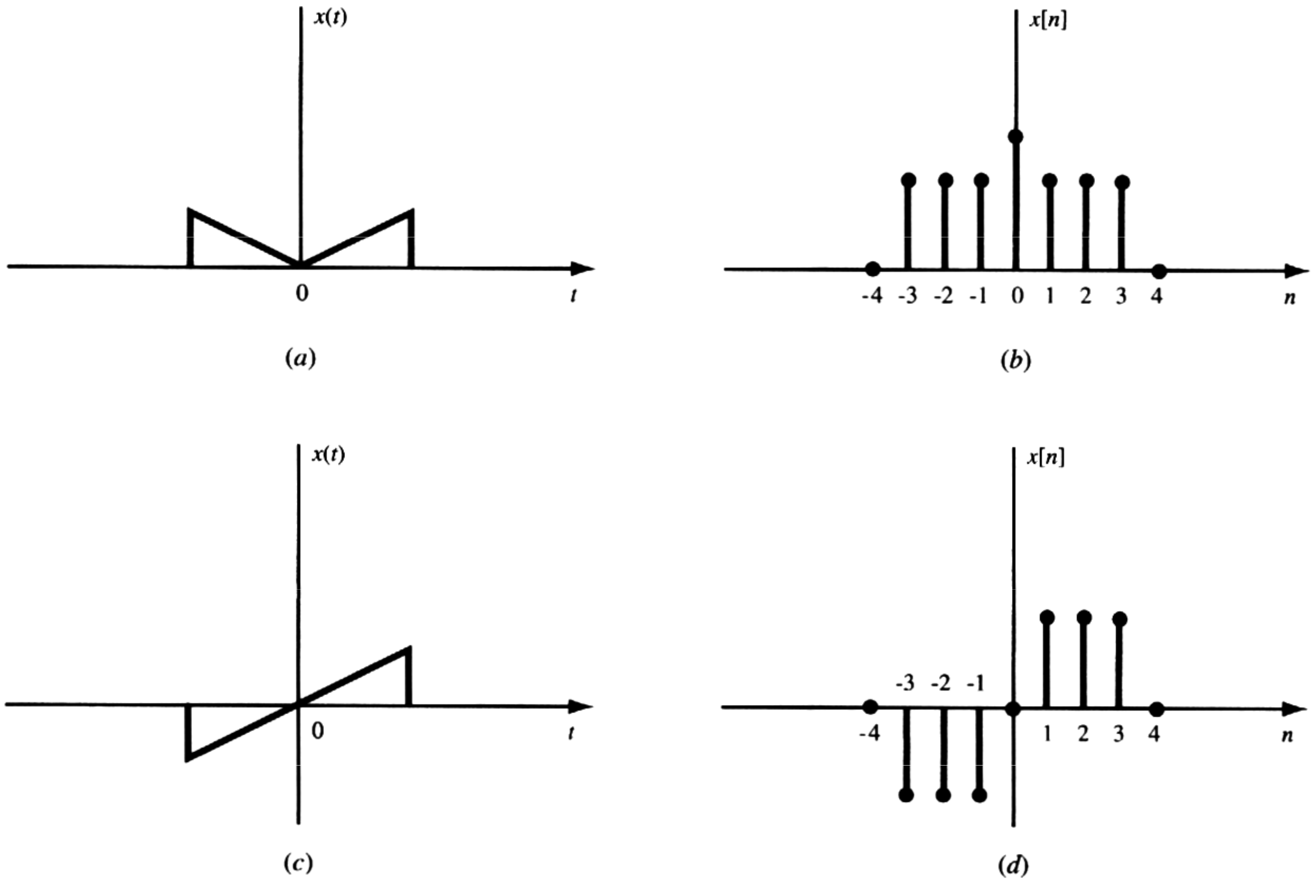
E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY

- **Sudá veličina** je taková, pro níž platí

- **Lichá veličina** je taková, pro níž platí

- Součin sudé a liché veličiny je lichá veličina.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých veličin je sudá veličina.

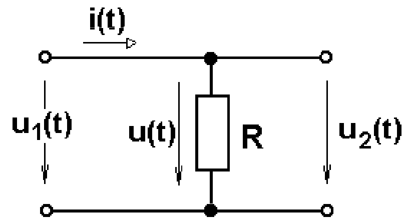
E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY



JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON VELIČINY

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že výkon p(t) v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$



Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON VELIČINY

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojité funkce x(t) vztahem

a pro diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

a z toho a

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

a

příp.

SHRNUTÍ

- ☑ jak se chová klouzavý průměr?
- ☑ počáteční a koncové podmínky;
- ☑ jaké typy veličin známe (dle vlastností)?
- ☑ stacionarita, ergodicita;
- ☑ energie, výkon

TESTÍK

1. Počet bodů v závěrečném testu z analýzy časových řad je veličina
    1. spojitá a v čase spojitá
    2. spojitá a v čase diskrétní
    3. diskrétní a v čase diskrétní
    4. diskrétní a v čase spojitá
2. Vzájemný vztah stacionarity a ergodicity je
    1. stacionární ČŘ je ergodická
    2. ergodická ČR je stacionární
    3. vztah neexistuje
    4. jde o totožnou vlastnost
3. Kosinus je funkce
    1. periodická a lichá
    2. periodická a sudá
    3. neperiodická a lichá
    4. neperiodická a sudá
4. Vztah Energie a výkonu nabývá podoby
    1. $E = P / T$
    2. $P = E / T$
    3. $E^2 = P \cdot T$
    4. $E = P^2 \cdot T$

NA SHLEDANOU ZA TÝDEN