



# ČASOVÉ ŘADY



**Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.**

**UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123  
kalina@mail.muni.cz**

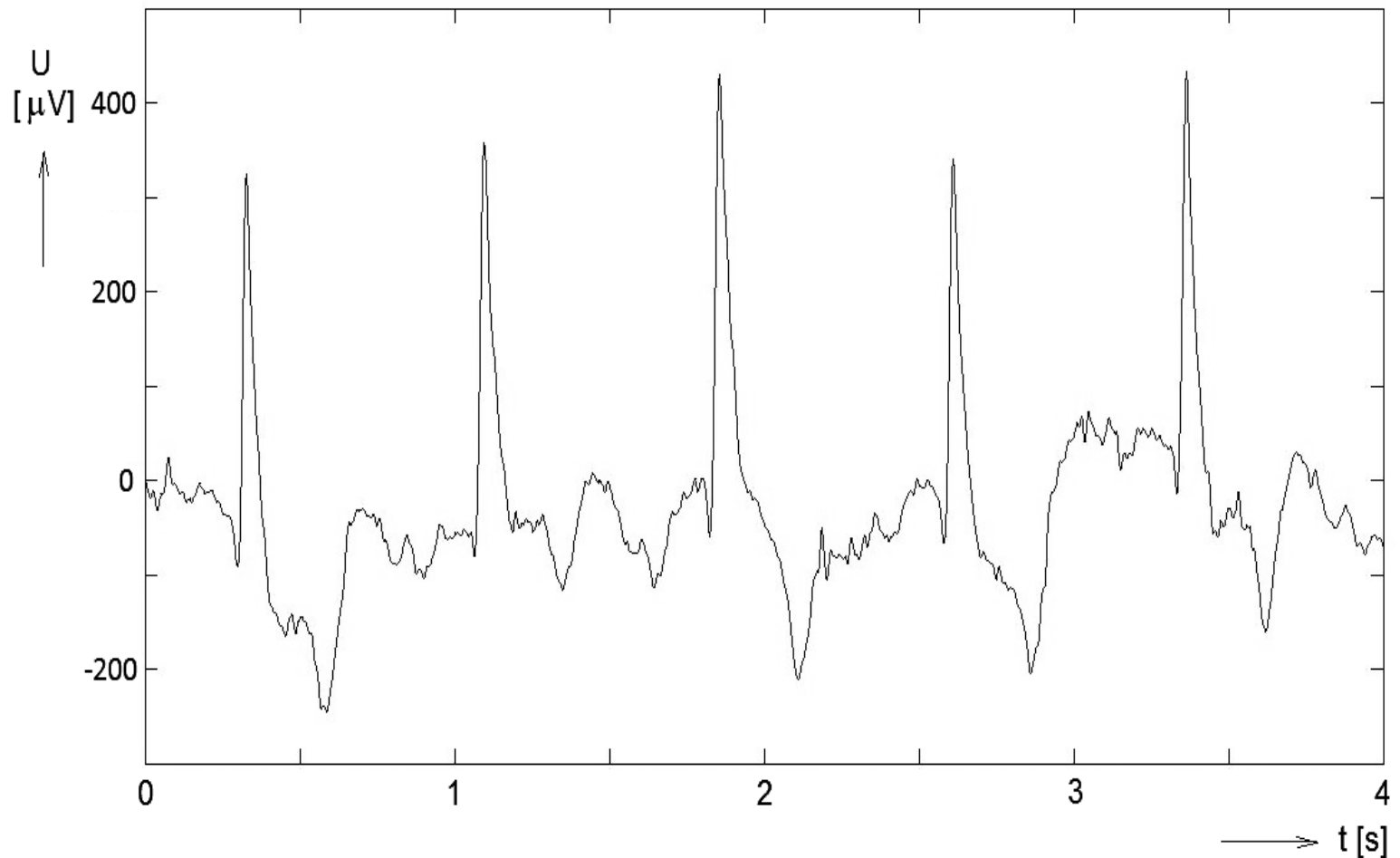
© Institut biostatistiky a analýz



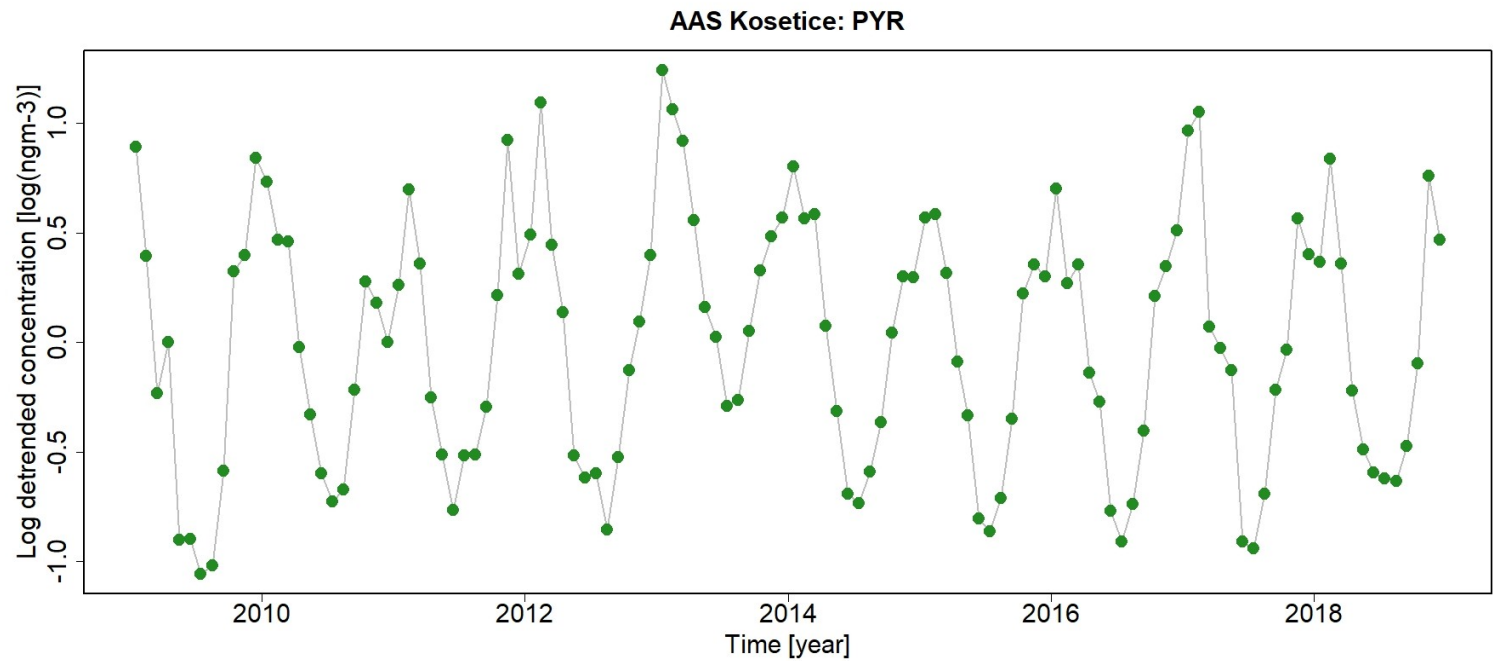
# V. MATEMATICKÉ MODELY ČASOVÝCH ŘAD



# PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



# PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



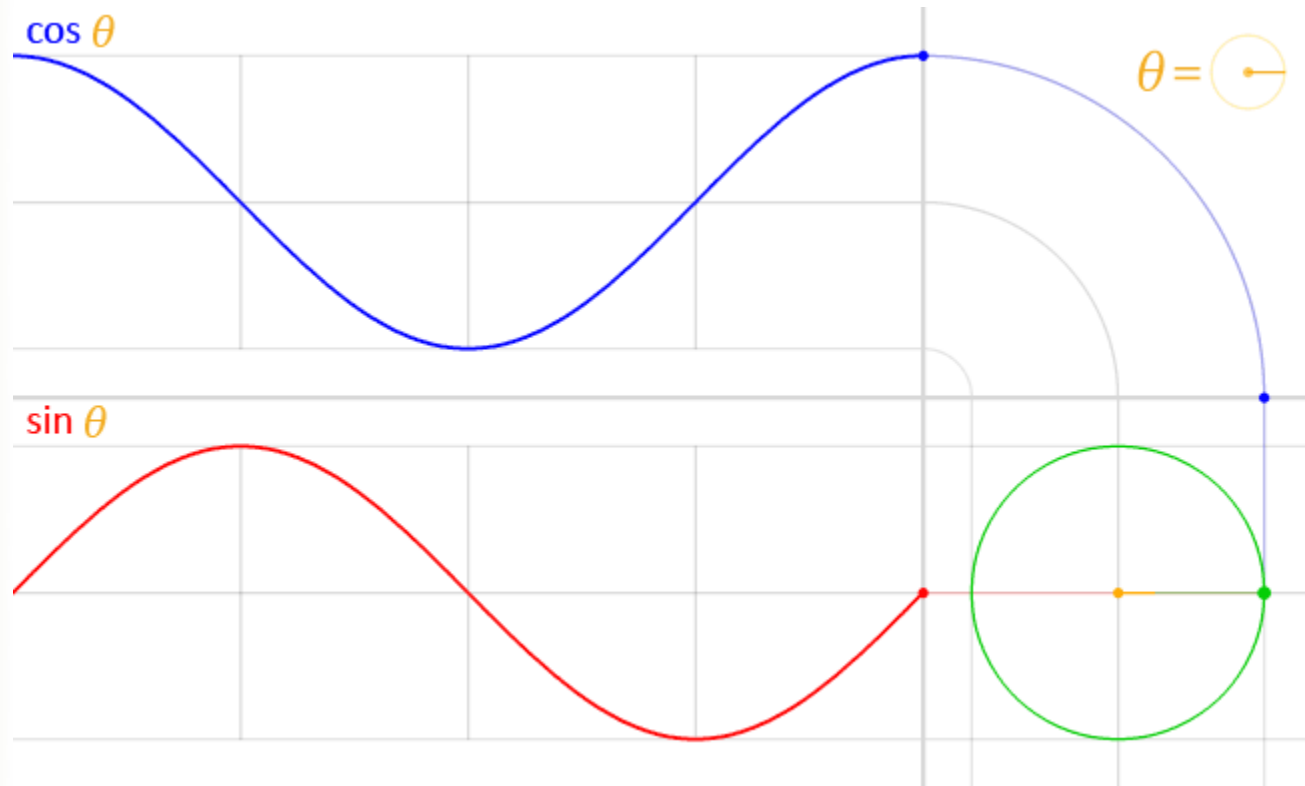
# PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

$$x(nT_{vz}) = \begin{cases} 1 & \text{pron} \in \langle 5k; 5k + 2 \rangle, \text{ kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ 0 & \text{pron} \in \langle 5k + 3; 5k + 4 \rangle, \text{ kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$x(nT_{vz}) = \{ \dots, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots \}$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST



[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Circle\\_cos\\_sin.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif)

$$\Theta = f(t) \Rightarrow \cos(t), \sin(t) \Rightarrow \cos(nT_{vz}), \sin(nT_{vz})$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

✓ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$  je **amplituda** harmonické posloupnosti;

$\Omega > 0$  je **úhlová rychlost**, tj. velikost úhlu (posunu) za čas;

$\varphi_0$  je **počáteční fáze**, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase  $nT_{vz} = 0$  ;

$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$  je **fáze** harmonické posloupnosti;

**perioda** harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega$$

**kmitočet** harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi$$



# AMPLITUDA



**Amplituda** (též **výkmit** či **rozkmít**) je *maximální hodnota* periodicky měnící se veličiny. Spolu s frekvencí/úhlovou frekvencí, počáteční fází a u vln též vlnovou délkou/vlnovým vektorem je amplituda jedním ze základních parametrů periodických dějů.

## Etymologie:

z latiny „amplitudo“ – rozsáhlost, rozpětí, velikost; znamenitost; důstojnost

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

✓ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$  je **amplituda** harmonické posloupnosti;

$\Omega > 0$  je **úhlový kmitočet** h.p., **úhlová rychlost**;

$\varphi_0$  je **počáteční fáze**, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase  $nT_{vz} = 0$ ;

$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$  je **fáze** harmonické posloupnosti;

**perioda** harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega$$

**kmitočet** harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

✓ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$  je **amplituda** harmonické posloupnosti;

$\Omega > 0$  je **úhlový kmitočet** h.p., **úhlová rychlost**;

$\varphi_0$  je **počáteční fáze**, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase  $nT_{vz} = 0$ ;

$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$  je **fáze** harmonické posloupnosti;

**perioda** harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega \Rightarrow \Omega = 2\pi/T \Rightarrow \Omega \cdot T_{vz} = \Omega_N = 2\pi \cdot T_{vz}/T$$

**kmitočet** harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi \Rightarrow f_N = T_{vz}/T = \Omega_N/2\pi = f/f_{vz}$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro  $A=1$ ,  $\varphi_0=0$  a  $\Omega$  pro  $T=8T_{vz}$

$$T_s \equiv T_{vz}$$

vz ... vzorkování  
s ... sampling

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro  $A=1$ ,  $\varphi_0=0$  a  $\Omega_N = 2\pi \cdot T_{vz}/T = \pi/4$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro  $A=1$ ,  $\varphi_0=0$  a  $\Omega$  pro  $T=4T'_{vz}$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

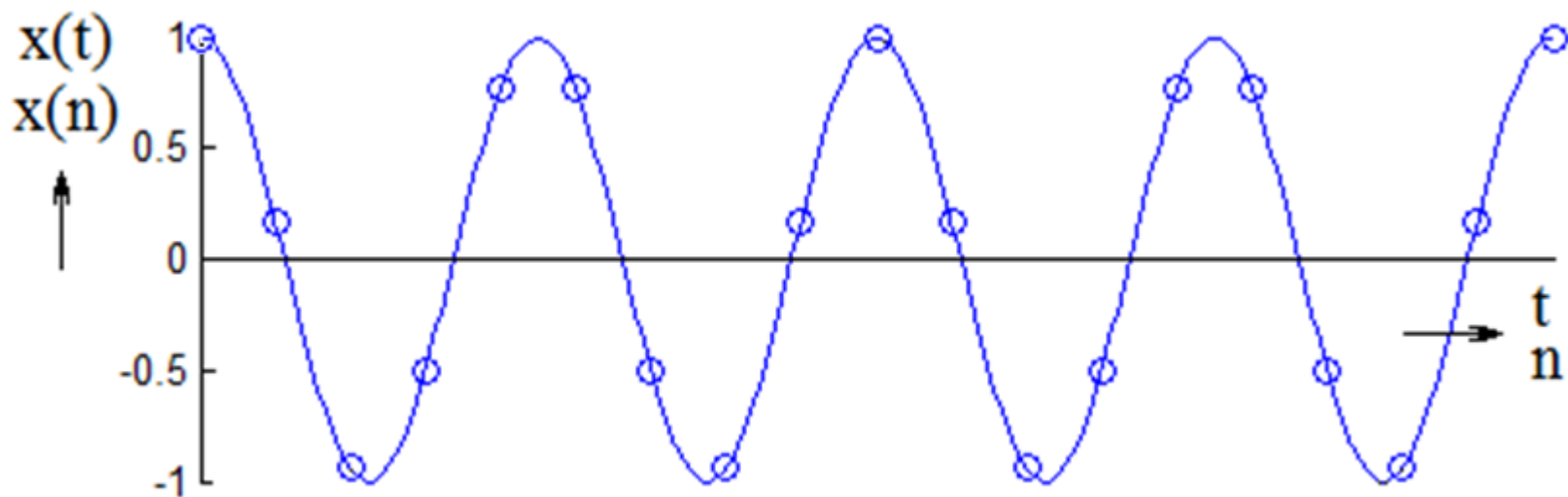
$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro  $A=1$ ,  $\varphi_0=0$  a  $\Omega$  pro  $T=4T'_{vz}$

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro  $A=1$ ,  $\varphi_0=0$  a  $\Omega_N = 2\pi \cdot T_{vz}/T = \pi/2$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST



*Změna periodicity veličiny po vzorkování se vzorkovací periodou, která neodpovídá bezezbytkovému celočíselnému podílu  $T/T_{vz}$  (desetinná část podílu je rovna 0,5).*

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

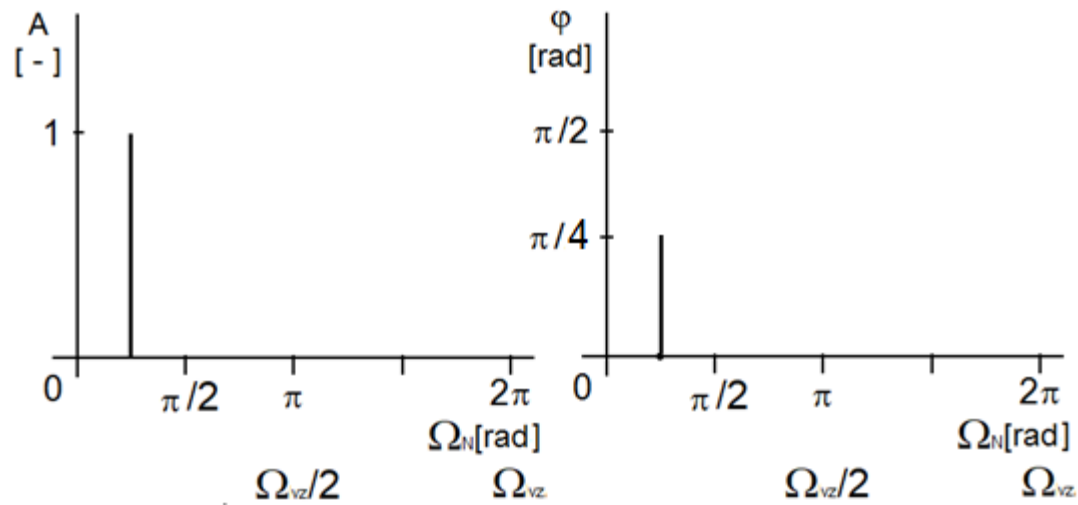
V případě, kdy podíl vzorkovací periody a celkové periody  $T/T_{vz}$  nelze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel (tedy racionální číslo), není navzorkovaná posloupnost periodická (přestože původní funkce periodická byla).



# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega nT_{vz} + \pi/4)$$

pro  $A=1$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  a  $\Omega$  pro  $T=8T_{vz}$ , tj. pro  $\Omega_N = \pi/4$



# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega nT_{vz} + \pi/4)$$

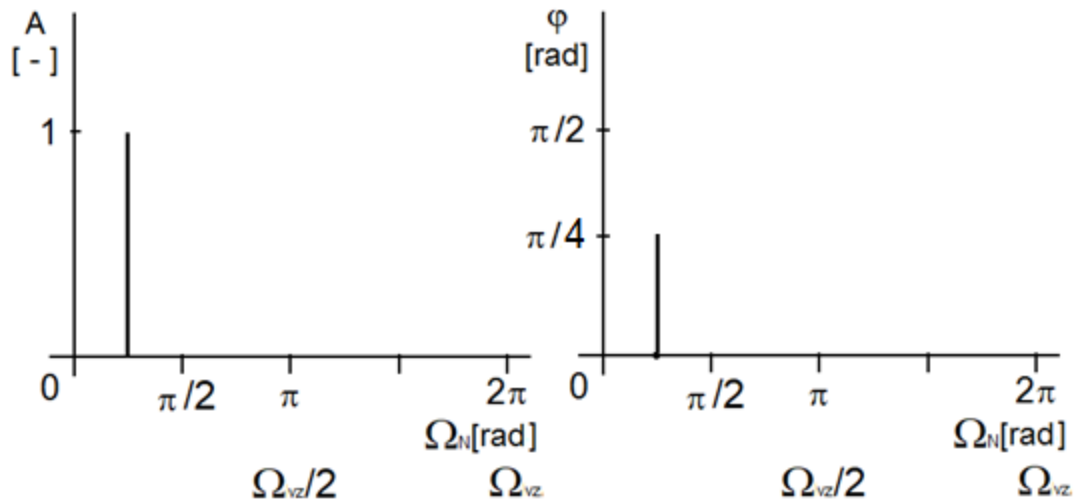
pro  $A=1$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  a  $\Omega$  pro  $T=8T_{vz}$ , tj. pro  $\Omega_N = \pi/4$

- ☑ tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda  $x$  (úhlový) kmitočet  $a$

počáteční fáze  $x$  (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\Omega) \quad a \quad \varphi_0 = \varphi_0(\Omega);$$



**spektrum** amplitud

**spektrum** počátečních fází



# !!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

**Frekvenční spektrum** časové řady je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se časová řada skládá, v závislosti na frekvenci.

(Tj. skládá se z amplitudového a fázového spektra).

**!ZAPAMATOVAT NA VĚKY!**

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

## DALŠÍ DEFINICE

### TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$$\begin{aligned}x(nT_{vz}) &= A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0) = \\ &= A_1 \cdot \cos(\Omega nT_{vz}) + A_2 \cdot \sin(\Omega nT_{vz})\end{aligned}$$

Jak to tak?

$$\cos(a + \beta) = \cos a \cdot \cos \beta - \sin a \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned}A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0) &= A \cdot \cos(\Omega nT_{vz}) \cdot \cos \varphi_0 - A \cdot \sin(\Omega nT_{vz}) \cdot \sin \varphi_0 = \\ &= \underbrace{A \cdot \cos \varphi_0}_{A_1} \cdot \cos(\Omega nT_{vz}) - \underbrace{A \cdot \sin \varphi_0}_{A_2} \cdot \sin(\Omega nT_{vz})\end{aligned}$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

## DALŠÍ DEFINICE

### TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$$A_1 = A \cdot \cos \phi_0 \quad \text{a} \quad A_2 = -A \cdot \sin \phi_0$$

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2 \cdot (\cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0)$$

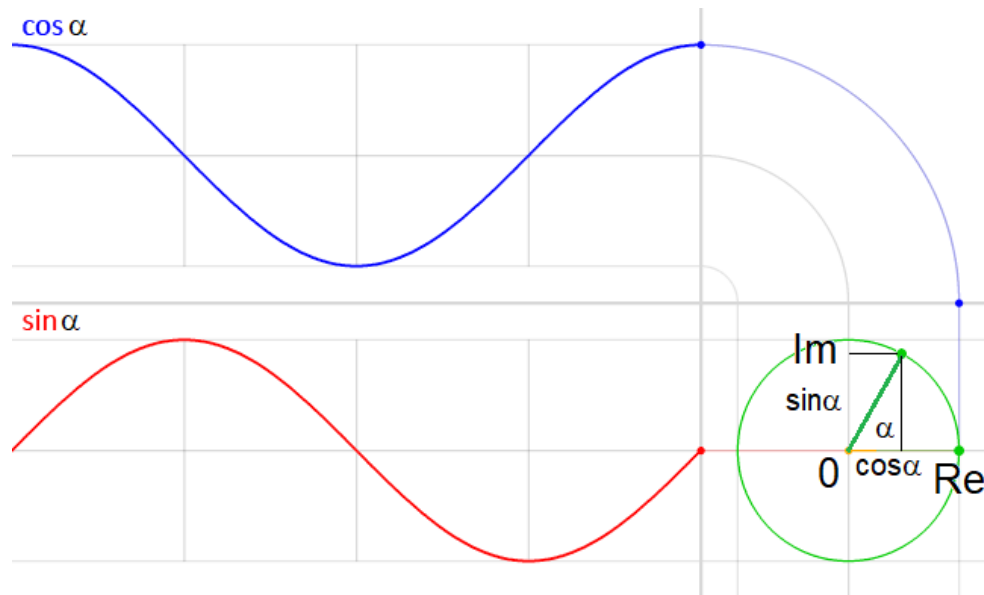
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-A \cdot \sin \phi_0}{A \cdot \cos \phi_0} = -\operatorname{tg} \phi_0.$$

$$\phi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}.$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

## DALŠÍ DEFINICE EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR



$$\cos \alpha(n) + i \cdot \sin \alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$

$$\cos \alpha(n) - i \cdot \sin \alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega nT_{vz} + \phi_0) = A \cdot \cos(2\pi f nT_{vz} + \phi_0)$$

když  $T = NT_{vz}$  a tedy  $f = 1/NT_{vz}$  nebo

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \exp\left[i\left(\frac{2\pi n}{N} + \phi_0\right)\right].$$

Zde se zabýváme  
pouze reálnou částí  
pravé strany...

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x[(k + N)T_{vz}] = \exp\frac{i2\pi(k + N)}{N} = \exp\frac{i2\pi k}{N} \cdot \exp(i2\pi),$$

když  $\exp(i2\pi) = \cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

## DALŠÍ DEFINICE EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$\cos\alpha(n) + i.\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha(n) - i.\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Eulerovy vztahy

$$x(n) = A.\cos(\alpha(n)) = \operatorname{Re}\{A.e^{i\alpha(n)}\}$$



# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

## DALŠÍ DEFINICE

## EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$x(n) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(n)\} = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[i(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

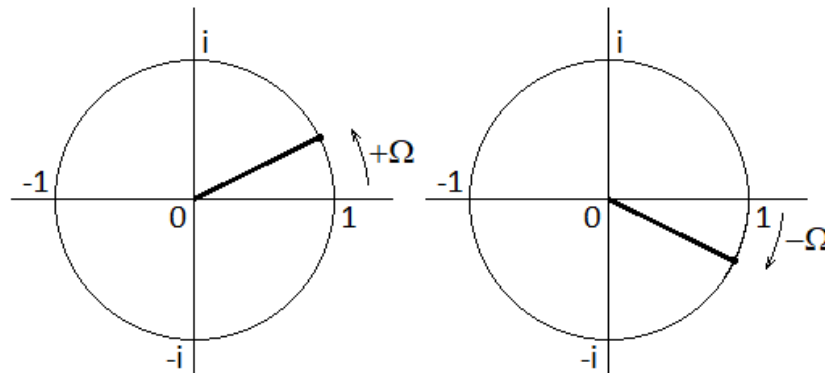
# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

kupodivu lze použít i vztah

$$x(n) = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[i(-\Omega n T_{vz} - \varphi_0)]\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(n)\}$$

**pozor !!! pozor**

- záporný kmitočet - ale funguje to



# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

Protože platí

$$x(n) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(n)\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(n)\} \text{ a } \operatorname{Im}\{\dot{x}(n)\} = -\operatorname{Im}\{\dot{x}^*(n)\}$$

je i

$$x(n) = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{x}(n) + \dot{x}^*(n)\}$$

$$x(n) = \frac{1}{2} \cdot \{A \cdot \exp(i\varphi_0) \cdot \exp(i\Omega n T_{vz})\} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \{A \exp(-i\varphi_0) \cdot \exp(-i\Omega n T_{vz})\}$$

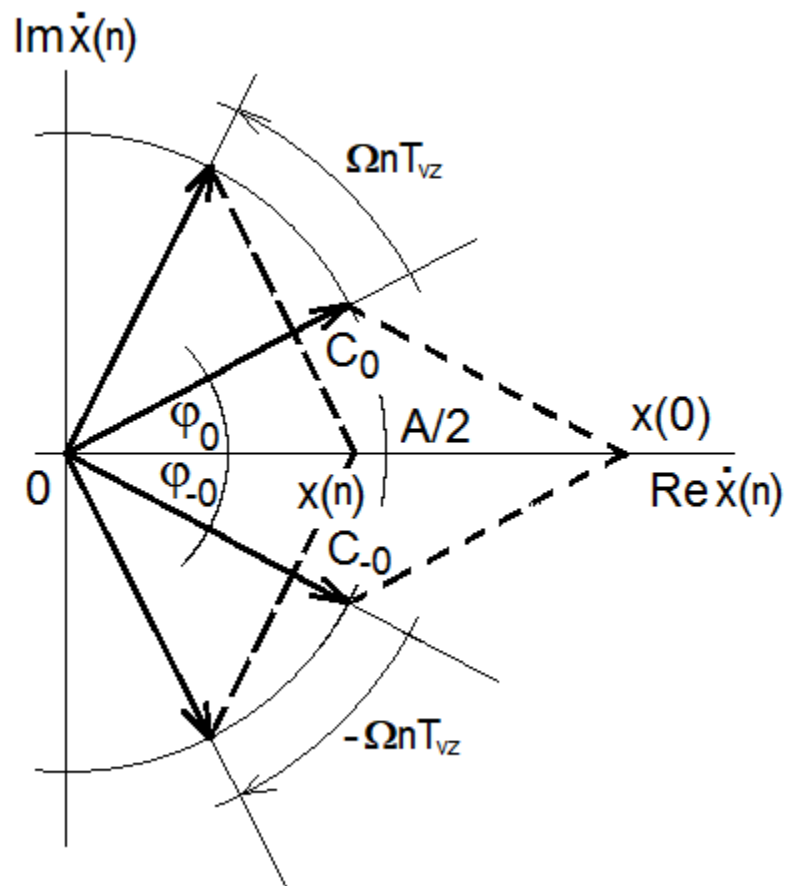
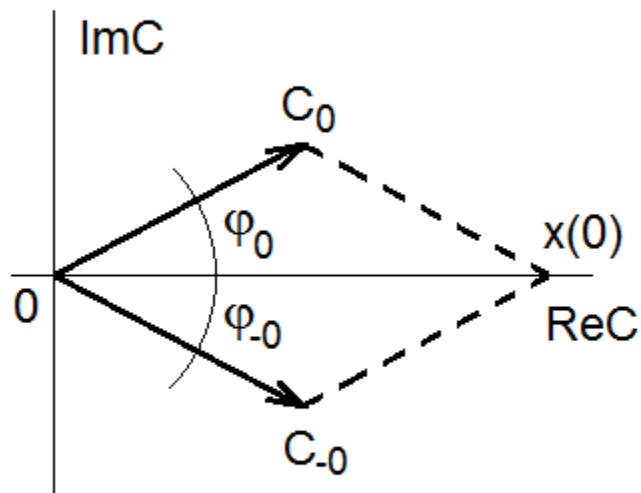
Označíme-li

$$\dot{C}_0 = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \exp(i\varphi_0) \text{ a } \dot{C}_{-0} = \frac{1}{2} \cdot A \exp(-i\varphi_0)$$

je

$$x(n) = \dot{C}_0 \cdot \exp(i\Omega n T_{vz}) + \dot{C}_{-0} \cdot \exp[i(-\Omega)nT_{vz}]$$

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST



# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega nT_{vz} + \pi/4)$$

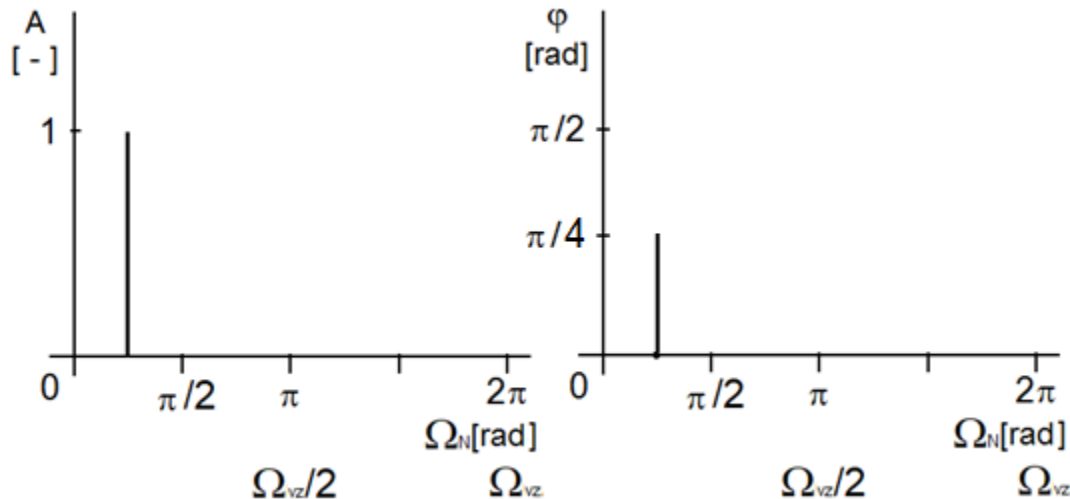
pro  $A=1$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  a  $\Omega$  pro  $T=8T_{vz}$ , tj. pro  $\Omega_N = \pi/4$

- ☑ tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda  $x$  (úhlový) kmitočet  $a$

počáteční fáze  $x$  (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad a \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$

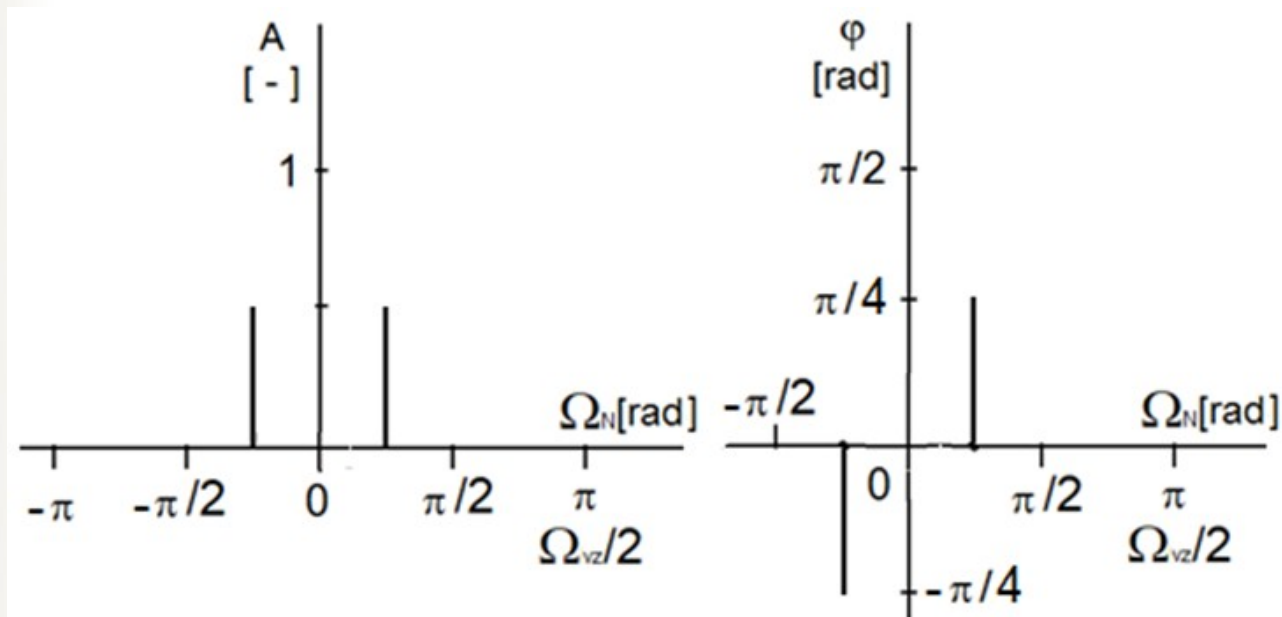


**spektrum** amplitud

**spektrum** počátečních fází

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega nT_{vz} + \pi/4)$   
pro  $A=1$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  a  $\Omega$  pro  $T=8T_{vz}$ , tj. pro  $\Omega_N = \pi/4$

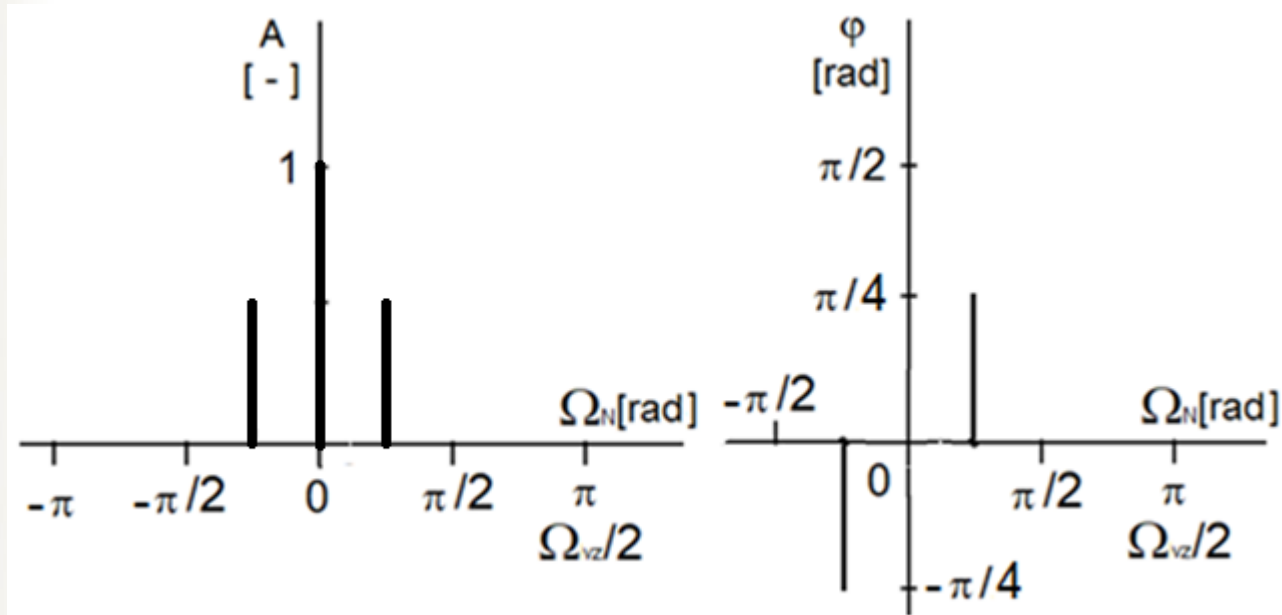


**spektrum** amplitud

**spektrum** počátečních fází

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$x(nT_{vz}) = 1 + \cos(\Omega nT_{vz} + \pi/4)$   
pro  $A=1$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  a  $\Omega$  pro  $T=8T_{vz}$ , tj. pro  $\Omega_N = \pi/4$



**spektrum** amplitud

**spektrum** počátečních fází

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- ✓ <http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html>
- ✓ <http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/complex/complex.html>
- ✓ <http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic>
- ✓ <http://www.khanacademy.org/science/physics/oscillatory-motion/harmonic-motion/v/introduction-to-harmonic-motion>
- ✓ <http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg>



# NEPERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

## ☑ jednorázová deterministická veličina

$$s(t) = 10 \cdot 10^{-6} \text{ V pro } t \in \langle -0,5 \mu\text{s}; 0,5 \mu\text{s} \rangle$$

$$s(t) = 0 \text{ V pro } t \in (0,5 \mu\text{s}; \infty \rangle$$

$$s(t) = 0 \text{ V pro } t \in \langle -\infty; -0,5 \mu\text{s} \rangle$$

- „začíná a končí“

# JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

- ☑ diskrétní jednotkový impulz;
- ☑ diskrétní jednotkový skok;
- ☑ diskrétní jednotkový obdélníkový impulz;

# JEDNOTKOVÝ IMPULZ

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

**zjednodušeně:**

jednotkový impuls  $\delta(t)$  je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice vysoký (limitně nekonečně) obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky  $\Rightarrow$  **mohutnost** je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 .$$

# JEDNOTKOVÝ IMPULZ

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

**zjednodušeně:**

jednotkový impuls  $\delta(t)$  je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky  $\Rightarrow$  **mohutnost** je jednotková

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

# JEDNOTKOVÝ IMPULZ

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

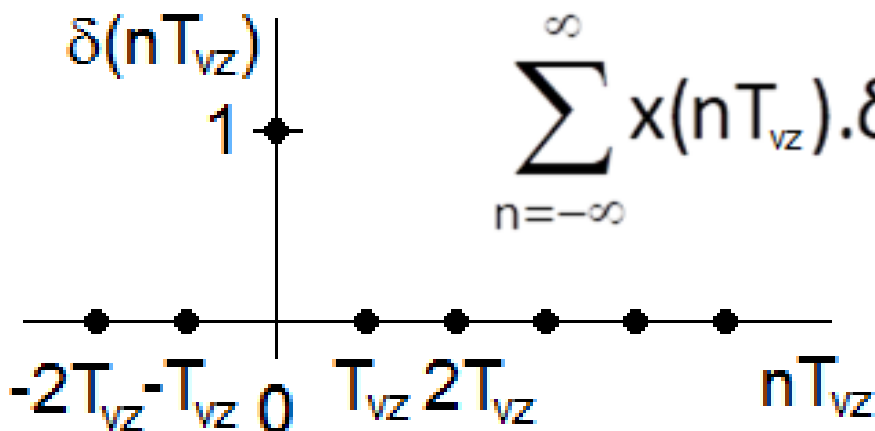
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

# DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ IMPULZ

definice:

$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(nT_{vz}) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz}) = x(0),$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = x(mT_{vz})$$

# JEDNOTKOVÝ SKOK

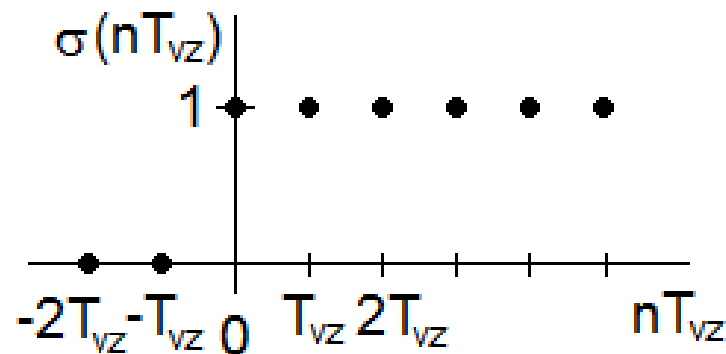
☑ jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$

# DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ SKOK

☑ definice:

$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$





# VZÁJEMNÉ VZTAHY

- ☑ pro obě uvedené jednorázové „funkce“ platí:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t) \qquad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

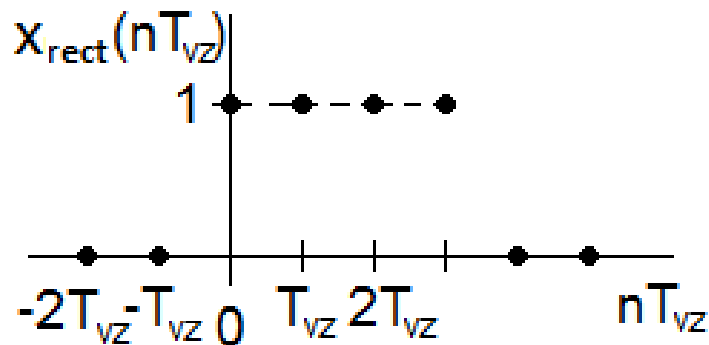
- ☑ pro obě uvedené jednorázové posloupnosti platí:

$$\sum_{n=-\infty}^m \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz}) \qquad \delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}]$$

# DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ OBDÉLNÍKOVÝ IMPULZ

☑ definice:

$$x_{\text{rect}}(nT_{\text{vz}}) = x_{\text{rect}}(n) = \begin{cases} 1, & n \in \langle 0, M-1 \rangle; \\ 0, & n < 0 \text{ a } n \geq M. \end{cases}$$



$$x_{\text{rect}}(nT_{\text{vz}}) = x_{\text{rect}}(n) = \sigma(nT_{\text{vz}}) - \sigma[(n - M)T_{\text{vz}}]$$



# VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY ČASOVÝCH ŘAD



# OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ (UNÁRNÍ OPERACE)

# OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ (UNÁRNÍ OPERACE)

## ☑ násobení konstantou

$$x(n) \sim A \cdot x(n),$$

$$A=2$$

# OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ (UNÁRNÍ OPERACE)

## ☑ změna časového měřítka

$$x(n) \sim x(m \cdot n),$$

kde  $m$  je kladné reálné číslo

$m > 1$  – časová komprese;

$m < 1$  – časová expanze

$m = 1$  – nic se neděje

# OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ (UNÁRNÍ OPERACE)

## ☑ změna časového měřítka

$$x(n) \sim x(m \cdot n),$$

kde  $m$  je kladné reálné číslo

$m = 1$  – nic se neděje

$m > 1$  – časová komprese;

$m < 1$  – časová expanze

# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

## (UNÁRNÍ OPERACE)

### ☑ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$  je reálné, od nuly různé číslo;

$$\tau > 0 - ?$$



# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

## (UNÁRNÍ OPERACE)

### ☑ posunutí v čase

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$  je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$  – zpoždění

a) originál  $x(n)$ ; b) funkce  $x(n-1)$ ; c) funkce  $x(n+1)$ ;

# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

## (UNÁRNÍ OPERACE)

### ☑ obrácení (inverze) časové osy

$$x(n) \sim x(-n) ,$$

*a) originál  $x(n)$ ; b) funkce  $x(-n)$ ; c) funkce  $x(-n+1)$*

# SHRNUTÍ

- ☑ definice základních modelů veličin (jednotkový skok, impulz, periodická posloupnost);
- ☑ různé formy vyjádření harmonické posloupnosti;
- ☑ co je frekvenční spektrum?
- ☑ základní unární operace s posloupnostmi.

# TESTÍK

1. Harmonickou posloupnost definují tři parametry:

1. amplituda, frekv., poč. fáze
2. úhl. rych., frekv., poč. fáze
3. amplituda, frekv., perioda
4. amplituda, per., úhl. rych.

2. Frekvenční spektrum časové řady se skládá ze spekter

1. fázového a imaginárního
2. reálného a imaginárního
3. reálného a amplitudového
4. amplitudového a fázového

Jednotkový (diskrétní) impulz

1. má nekonečnou výšku
2. má nekonečnou šířku
3. má jednotkovou výšku
4. má jednotkovou šířku

4. Komplexně sdružená čísla mají

1. opačnou imaginární složku
2. stejnou imaginární složku
3. opačnou reálnou složku
4. obě složky opačné

**ZA TÝDEN NASHLEDANOU**