ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

OPERACE SE DVĚMA POSLOUPNOSTMI
(BINÁRNÍ OPERACE)

KONVOLUCE

DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi $x_1(t)$ a $x_2(t)$ téhož argumentu definovaná (v případě spojitých funkcí) integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = (x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) \cdot d\tau,$$

kde funkce $x_2(t)$ se často nazývá ***konvoluční jádro***.

DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma posloupnostmi $x_1(n)$ a $x_2(n)$ téhož argumentu definovaná součtovým vztahem

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = (x_1 * x_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

kde posloupnost $x_2(n)$ se často nazývá ***konvoluční jádro***.

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

- ☑ **komutativní zákon**

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n);$$

- ☑ **asociativní zákon**

$$x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n).$$

- ☑ **distributivní zákon (vůči sčítání)**

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n);$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

☑ zákon o posunu v čase

Je-li $x_1(n) * x_2(n) = c(n)$,

pak

$$x_1(n) * x_2(n-m) = c(n-m)$$

$$x_1(n-m) * x_2(n) = c(n-m)$$

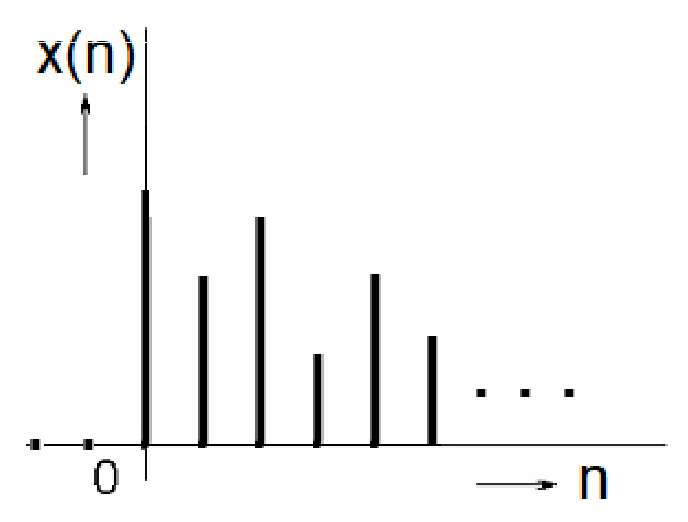
a dále

$$x_1(n-m_1) * x_2(n-m_2) = c(n-m_1-m_2).$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI
KAUZALITA

Kauzální je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupní veličiny $x(t)$ pro $t \leq t_0$. Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupní veličiny. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme ***nekauzální***, příp. ***anticipativní***.

Zprostředkovaně:
jako kauzální označujeme takové posloupnosti, pro které platí
$x(n) = 0$ pro $n < 0$.



Konvoluce kauzálních funkcí:

Pro kauzální funkce platí s(t) = 0 pro t < 0

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau) \, . \, s_2(t-\tau) . \, d\tau$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

- pro kauzální posloupnosti, tj. takové pro které platí x(n) = 0 pro n < 0 se konvoluční vztah mění na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum^{n} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

- V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1-1 \rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2-1 \rangle$.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=\max(0,N_2-n+1)}^{\min(n,N_1)} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

☑ šířková vlastnost konvoluce

Pokud jsou doby trvání (šířky, tj. počty vzorků posloupností, jejichž hodnoty jsou různé od nuly) posloupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$ konečné, např. N_1 v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 pro $x_2(n)$ je počet vzorků výsledné konvoluční posloupnosti obou funkcí rovna N_1+N_2-1.

KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

☑ konvoluce posloupnosti s jednotkovým impulzem

Výsledkem konvoluce posloupnosti x(n) s jednotkovým impulzem je posloupnost x(n).

Z definice konvoluce vyplývá, že

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m).\delta(n-m)$$

Protože δ(n-m) reprezentuje jednotkový impulz posunutý oproti počátku o n vzorků, je suma ve výše uvedeném vztahu průběžně rovna hodnotě x(n). Proto

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

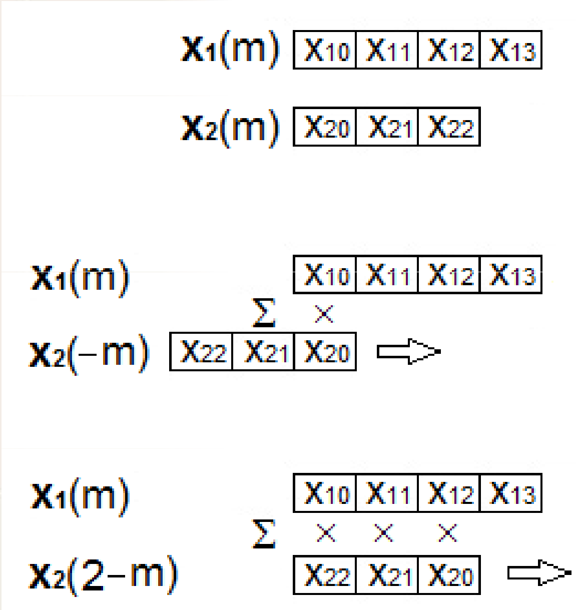
DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

DISKRÉTNÍ KRUHOVÁ KONVOLUCE
SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 1

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$ ..

Řešení:



		1	2	-2	-1			
		1	-1	1				
		1	2	-2	-1			1
1	-1	1						
		1	2	-2	-1			1
	1	-1	1					
		1	2	-2	-1			-3
		1	-1	1				
		1	2	-2	-1			3
			1	-1	1			
		1	2	-2	-1			-1
				1	-1	1		
		1	2	-2	-1			-1
					1	-1	1	

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 2

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$ ..

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$\{x_{10}, x_{11}, \dots x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} =$

$$
\begin{array}{lllllll}
= (x_{10}\cdot x_{20}) & (x_{10}\cdot x_{21}) & (x_{10}\cdot x_{22}) & & & & \\
 & (x_{11}\cdot x_{20}) & (x_{11}\cdot x_{21}) & (x_{11}\cdot x_{22}) & & & \\
 & & (x_{12}\cdot x_{20}) & (x_{12}\cdot x_{21}) & (x_{12}\cdot x_{22}) & & \\
 & & & (x_{13}\cdot x_{20}) & (x_{13}\cdot x_{21}) & (x_{13}\cdot x_{22}) & \\
\hline
\end{array}
$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 2

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$\{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} =$

=	1	-1	1			
		2	-2	2		
			-2	2	-2	
				-1	1	-1
	1	1	-3	3	-1	-1

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 3

Vypočtěte konvoluci posloupností x_1 = {1, 2, -2, -1} a $x_2(n)$ = {1, -1, 1}

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí i následující maticové schéma:

$$[a \quad b \quad c \quad d] * [e \quad f \quad g] = [a \quad b \quad c \quad d] \begin{bmatrix} e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & f & g \end{bmatrix}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE
PŘÍKLAD 3

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1 = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí i následující maticové schéma:

$$[1,2,-2,-1]*[1,-1,1]=[1,2,-2,-1].\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$= [1, 1, -3, 3, -1, -1]$

DEFINICE

ABZ slovník cizích slov

Korelace = vzájemný vztah, souvztažnost mezi znaky, veličinami, ději

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

lātiō - nesení, poskytování

relātiō – nesení zpět, odnášení, opakování; zpráva; vztah, poměr

correlātiō – vzájemný vztah, souvislost

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Pokud se mezi dvěma procesy ukáže korelace, je možné, že na sobě závisejí, nelze z toho však ještě usoudit, že by jeden z nich musel být příčinou a druhý následkem. To samotná korelace nedovoluje rozhodnout.

DEFINICE

Korelace (z lat.) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Kauzalita - příčinná souvislost či závislost. Jeden jev vyvolává druhý, popřípadě se oba vzájemně podporují (synergie)

DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný (nejčastěji **lineární**) vztah mezi znaky či veličinami ***x*** a ***y***.

DEFINICE

Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný (nejčastěji **lineární**) vztah mezi znaky či veličinami ***x*** a ***y***.

funkční závislost a míru této závislosti

ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

KORELAČNÍ KOEFICIENT

numerická míra určitého typu korelace, tj. statistického vztahu mezi dvěma proměnnými

ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

KORELAČNÍ KOEFICIENT

1. $$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

2. $$r_s = \rho_{\mathrm{rg}_X,\mathrm{rg}_Y} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rg}_X,\mathrm{rg}_Y)}{\sigma_{\mathrm{rg}_X}\sigma_{\mathrm{rg}_Y}}$$

3. $$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

4. $$\tau = \frac{(\text{počet shodných dvojic}) - (\text{počet neshodných dvojic})}{n(n-1)/2}$$

ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

KORELAČNÍ KOEFICIENT

1. $$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

obecný vztah

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

3. $$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

výběrový Pearsonův korelační koeficient

KORELAČNÍ KOEFICIENT

pořadová korelace – míra vztahu mezi pořadím hodnot dvou proměnných

2. $$r_s = \rho_{\mathrm{rg}_X, \mathrm{rg}_Y} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rg}_X, \mathrm{rg}_Y)}{\sigma_{\mathrm{rg}_X} \sigma_{\mathrm{rg}_Y}}$$

SPEARMANŮV POŘADOVÝ KORELAČNÍ KOEFICIENT

KENDALLŮV POŘADOVÝ KORELAČNÍ KOEFICIENT

4. $$\tau = \frac{(\text{počet shodných dvojic}) - (\text{počet neshodných dvojic})}{n(n-1)/2}$$

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

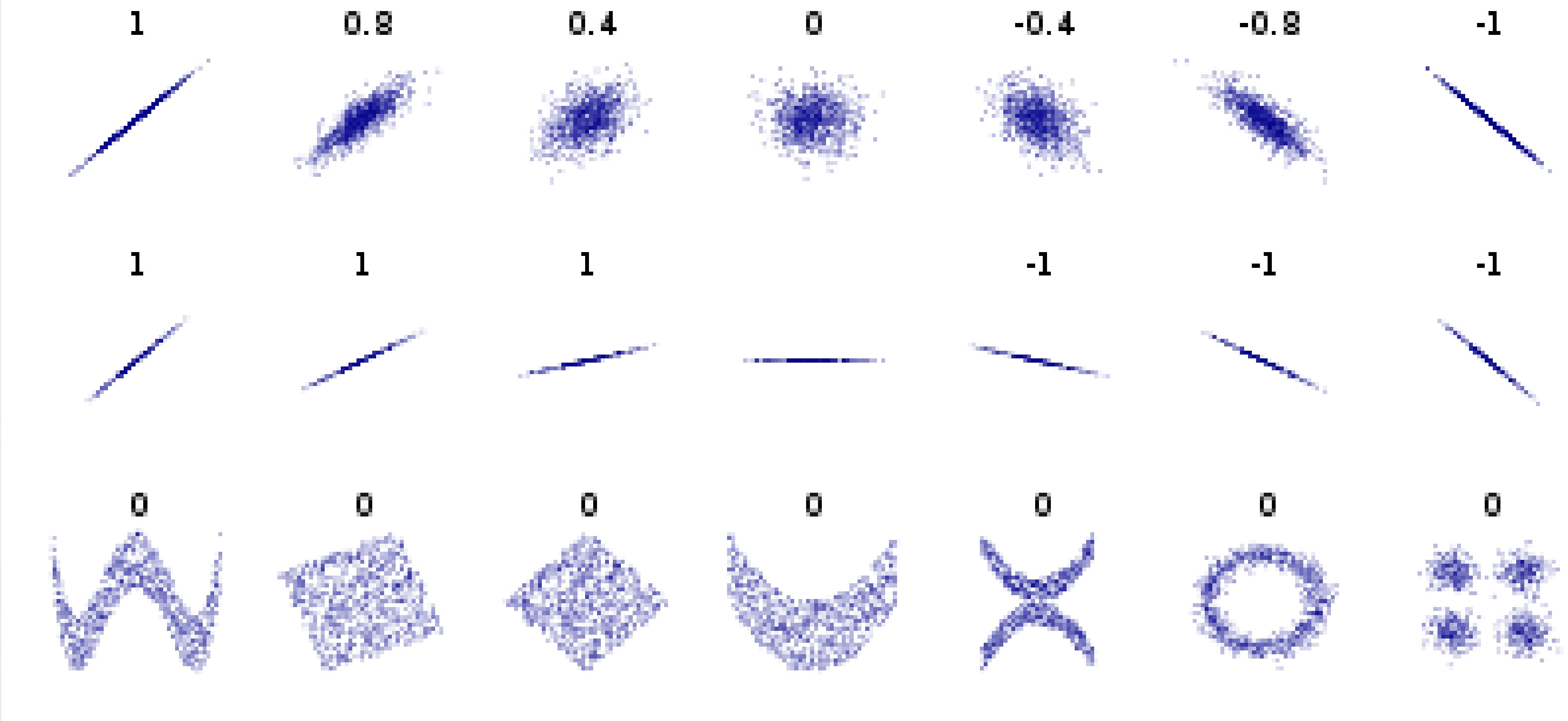
$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sigma_x \, \sigma_y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{(x_n - \bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y_n - \bar{y})}{\sigma_y}$$

nabývá hodnoty v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Když je roven +1, znamená to zcela pozitivní (přímou) **lineární** korelaci (y=kx, tj. funkční závislost), při nulové hodnotě není mezi proměnnými **lineární** vztah a hodnota -1 znamená zcela negativní **lineární** korelaci mezi oběma proměnnými (y=-kx) .

PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{(x_n-\overline{x})}{\sigma_x}\cdot\frac{(y_n-\overline{y})}{\sigma_y}$$



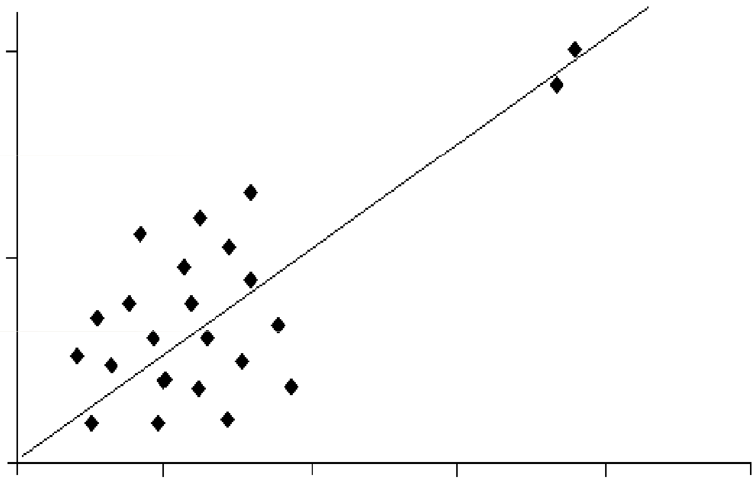
PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

- nabývá hodnot od −1 do +1, které značí perfektní lineární vztah (záporný nebo kladný)
  - v případě kladné korelace hodnoty obou proměnných zároveň stoupají;
  - v případě záporné korelace hodnota jedné proměnné stoupá a druhé klesá;
  - v případě neexistence lineárního vztahu r = 0;
- je nezávislý na jednotkách původních proměnných, je bezrozměrný;
- při změně pořadí proměnných se výše korelačního koeficientu nemění;
- korelační koeficient je platný pouze v rozmezí daném použitými daty;
- korelační koeficient výrazně odlišný od nuly není důkazem funkčního vztahu proměnných, jiného než lineárního;
- malá hodnota korelačního koeficientu není známkou nefunkčního vztahu proměnných.

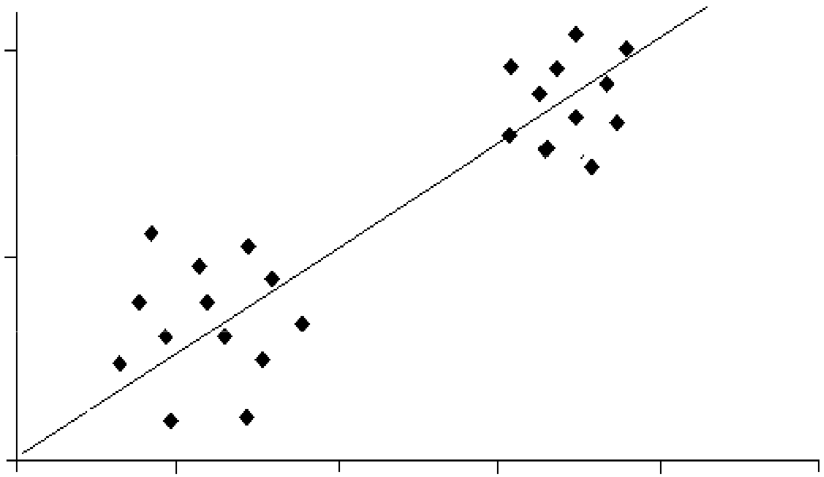
PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Správná interpretace Pearsonova korelačního koeficientu předpokládá, že obě proměnné jsou náhodné veličiny a mají společné dvourozměrné normální rozdělení. Potom nulový korelační koeficient znamená, že veličiny jsou i statisticky **nezávislé**.

Pokud není splněn předpoklad dvourozměrné normality, z nulové hodnoty korelačního koeficientu nelze usuzovat na nic víc, než že veličiny jsou nekorelované.



odlehlé hodnoty

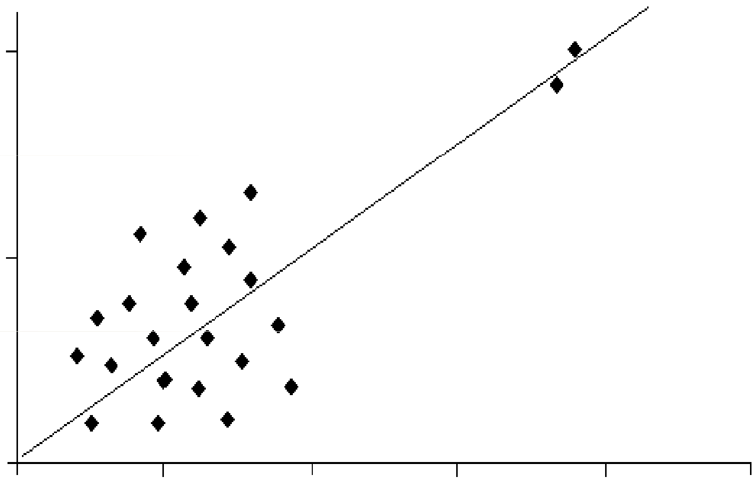


bimodální rozložení

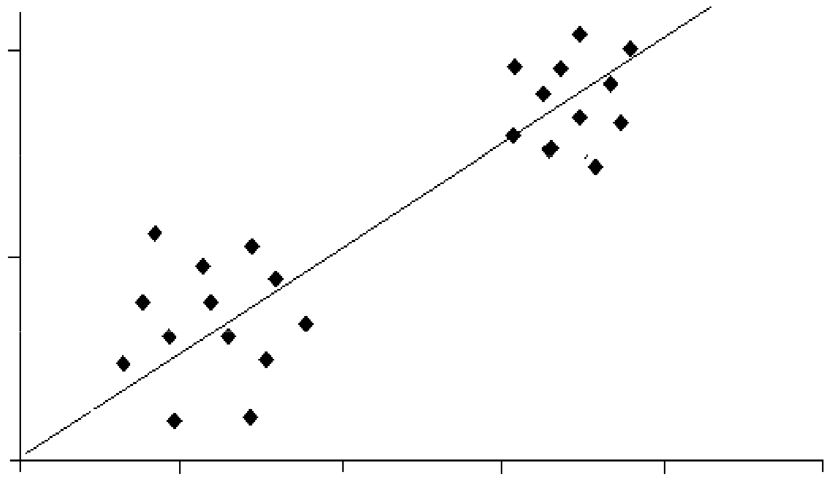
PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

může být nadhodnocen:

- ☑ vlivem třetí skryté proměnné
- ☑ přítomností odlehlých hodnot
- ☑ data jsou složena z různých podskupin (tříd)



odlehlé hodnoty



bimodální rozložení

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r_s = \rho_{\mathrm{rg}_X, \mathrm{rg}_Y} = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rg}_X, \mathrm{rg}_Y)}{\sigma_{\mathrm{rg}_X} \sigma_{\mathrm{rg}_Y}}$$

Hodnotí, jak dobře lze vztah mezi dvěma proměnnými popsat pomocí **monotónní** funkce.

Pokud jsou všechna pořadí určena ***různými celými čísly od 1 do n***, pak jeho hodnotu lze určit pomocí vztahu

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}.$$

kde $d_i = rg(X_i) - rg(Y_i)$ je rozdíl mezi pořadími každého pozorování

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Určeme korelaci mezi IQ sledovaných osob a počtem hodin, které stráví za týden sledováním televize.

(https://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s_rank_correlation_coefficient)

X_i IQ	Y_i hours
86	0
112	6
106	7
113	12
110	17
97	20
100	27
99	28
103	29
101	50

X_i IQ	Y_i hours	rank x_i	rank y_i	d_i	d_i^2
86	0	1	1	0	0
97	20	2	6	−4	16
99	28	3	8	−5	25
100	27	4	7	−3	9
101	50	5	10	−5	25
103	29	6	9	−3	9
106	7	7	3	4	16
110	17	8	5	3	9
112	6	9	2	7	49
113	12	10	4	6	36

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}.$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 194}{10.(10^2 - 1)} = -0.1757575\ldots$$

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

ZÁVĚR

Nízká hodnota korelačního koeficientu ukazuje, že korelace mezi IQ a hodinami sledování TV je malá a jeho záporná hodnota indikuje, že delší čas před TV je vázán na menší hodnotu IQ.

Nehodnotíme zde ovšem statistickou signifikanci neboli riziko falešně pozitivního výsledku korelačního testu…

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT
PŘÍKLADY

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}.$$

X_i	Y_i	rank x_i	rank y_i	d_i	d_i^2
1	1	1	1	0	0
2	2	2	2	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	4	0	0

$$r_s = 1 - \frac{6\times 0}{4\times(16-1)} = 1$$

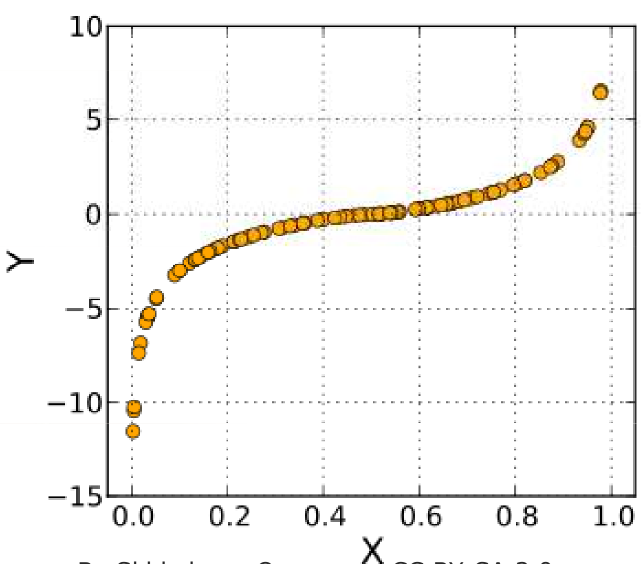
X_i	Y_i	rank x_i	rank y_i	d_i	d_i^2
1	-1	1	4	-3	9
2	-2	2	3	-1	1
3	-3	3	2	1	1
4	-4	4	1	3	9

$$r_s = 1 - \frac{6\times 20}{4\times(16-1)} =$$

$$= 1 - \frac{120}{60} = -1$$

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

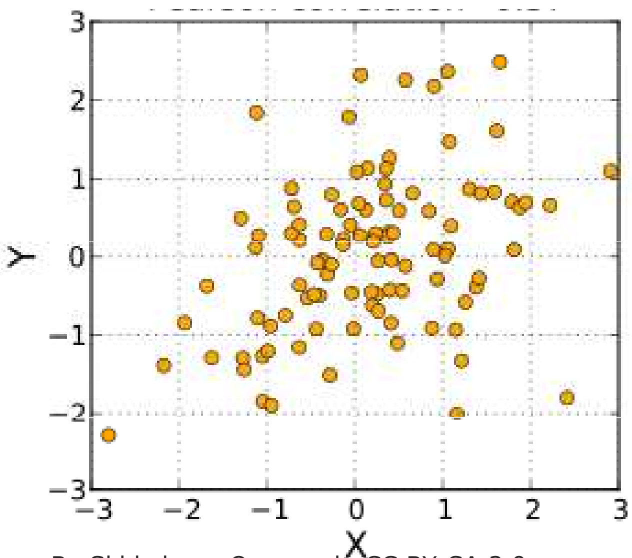
Spearmanův koeficient=1
Pearsonův koeficient=0,88



By Skbkekas - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8778554

Hodnota Spearmanova korelačního koeficientu je rovna 1 pokud jsou srovnávané veličiny monotónně závislé, i pokud je jejich vzájemný vztah nelineární.

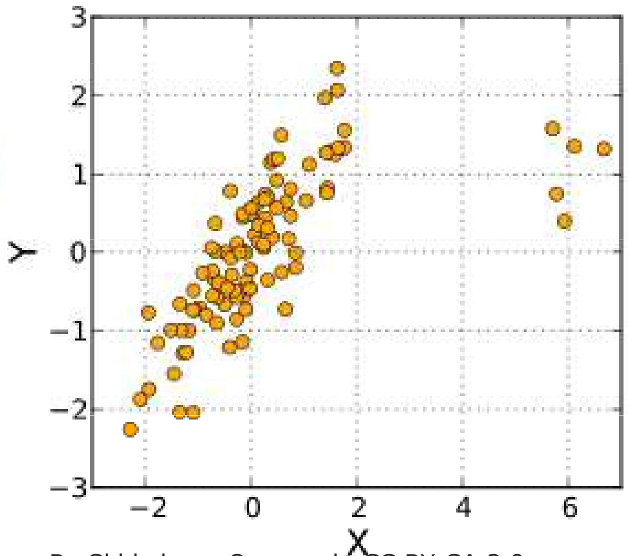
Spearmanův koeficient=0,35
Pearsonův koeficient=0,37



By Skbkekas - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8778562

Pokud jsou data rozložena přibližně elipticky a nevyskytují se žádné významné odlehlé hodnoty, pak Pearsonův a Spearmanův korelační koeficient nabývají přibližně týchž hodnot.

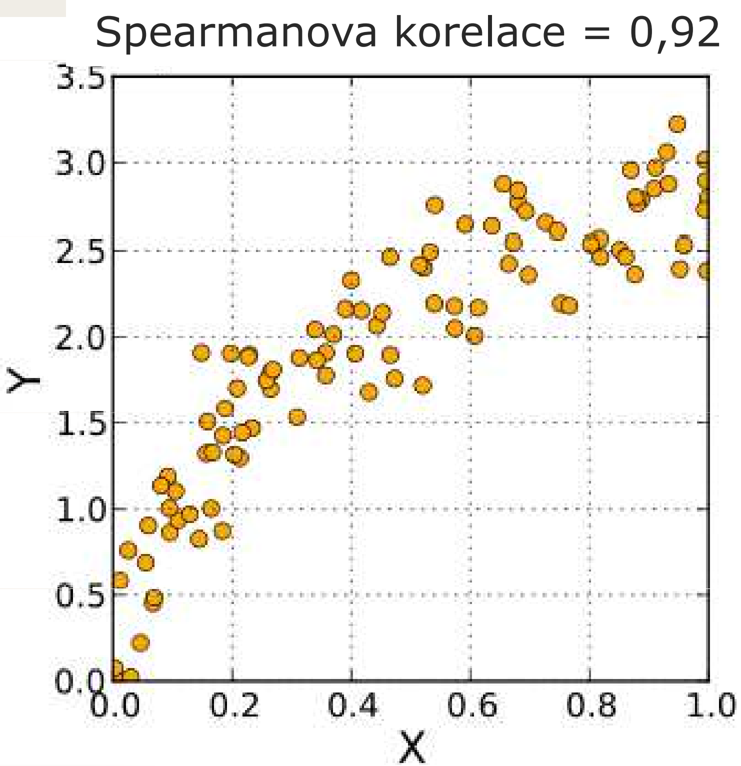
Spearmanův koeficient=0,84
Pearsonův koeficient=0,67

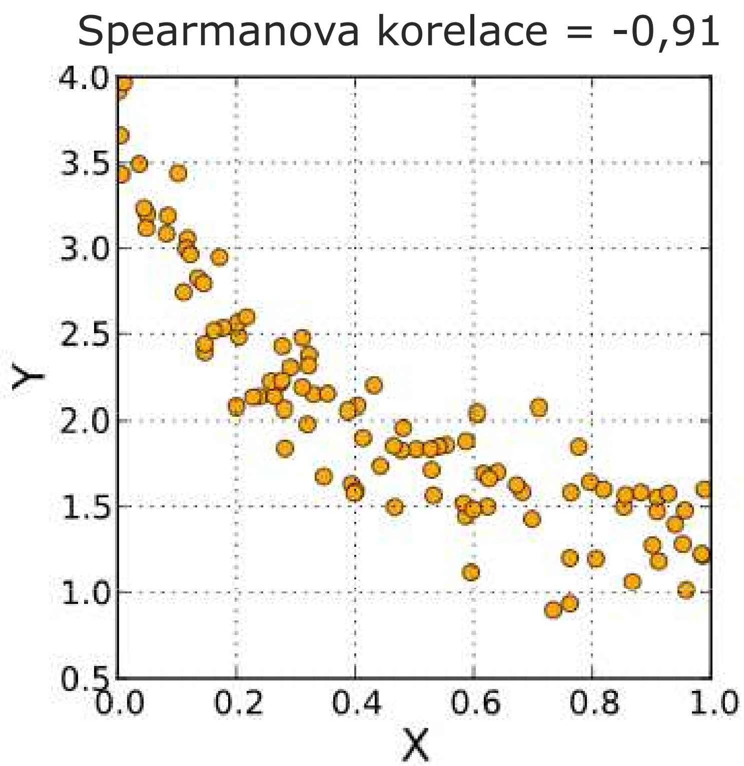


By Skbkekas - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8778570

Spearmanův korelační koeficient je méně citlivý vůči významným odlehlým hodnotám. To je způsobeno skutečností, že Spearmanův koeficient redukuje hodnoty odlehlých hodnot na jejich pořadí v posloupnosti.

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT





Kladná hodnota Spearmanova korelačního koeficientu odpovídá monotónně rostoucí závislosti mezi náhodnými veličinami X a Y.

Záporná hodnota Spearmanova koeficientu odpovídá monotónně klesající závislosti mezi X a Y.

SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Spearmanův (ρ) a Kendallův (τ) koeficient pracují s monotónností (ranky) namísto linearity.

Nejsou proto ani příliš citlivé na malé počty odlehlých hodnot (tj. nemají požadavek na 2D normalitu dat).

KORELACI LZE POČÍTAT I S ČASEM

Trend

Trend = tendence, směřování.

Definice se různí:

- ☑ obecná tendence vývoje zkoumaného jevu za dlouhé období,
- ☑ dlouhodobý nárůst nebo pokles hodnot časové řady,
- ☑ dlouhodobá (systematická) změna hodnot časové řady,
- ☑ aj.

Monotónní × lineární trend – dvě pojetí, pro obě existují příslušné testy:

- ☑ Kendallův test trendu, Danielsův test trendu.
- ☑ Lineární regrese parametrická (MNČ) a neparametrická (Siegelův odhad, Theil-Senův odhad).

ČASOVĚ ZÁVISLÁ DATA

KŘÍŽOVÁ (VZÁJEMNÁ) KORELAČNÍ POSLOUPNOST

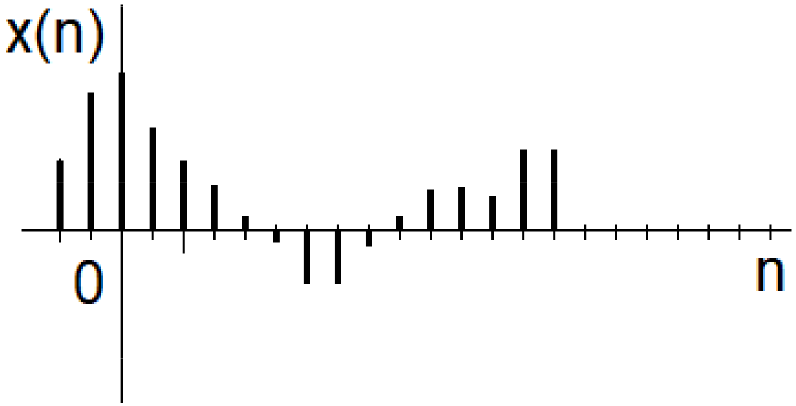
1. $$R_{x1x2}(mT_{vz}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

2. $$R_{x1x2}(mT_{vz}) = \sum_{n}^{N} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

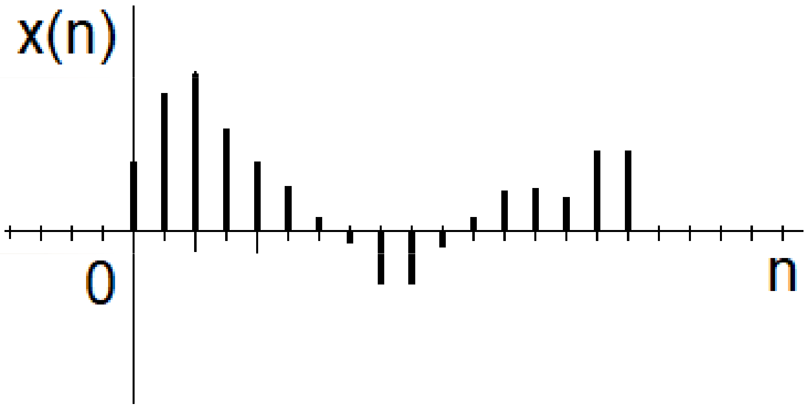
3. $$R_{x1x2}(m) = \sum_{n}^{N} x_1(n)x_2(n + m) \qquad R_{x1x2}(m) = \sum^{N} x_1(n)x_2(n - m)$$

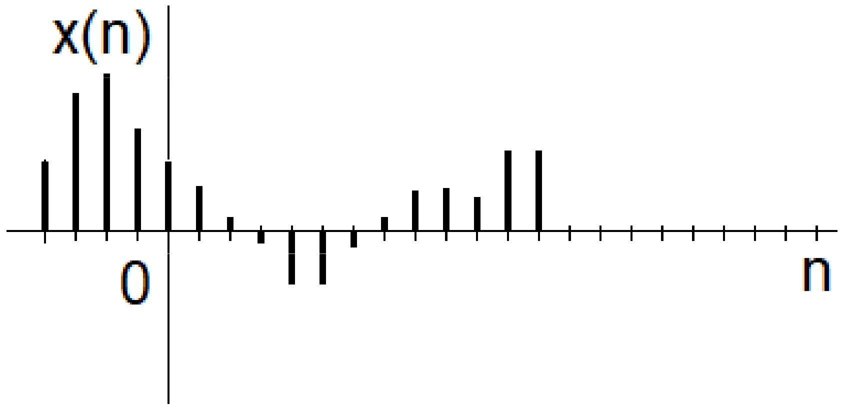
4. $$R_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum^{N} x_1(n)x_2(n + m) \qquad R_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum^{N} x_1(n)x_2(n - m)$$

KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

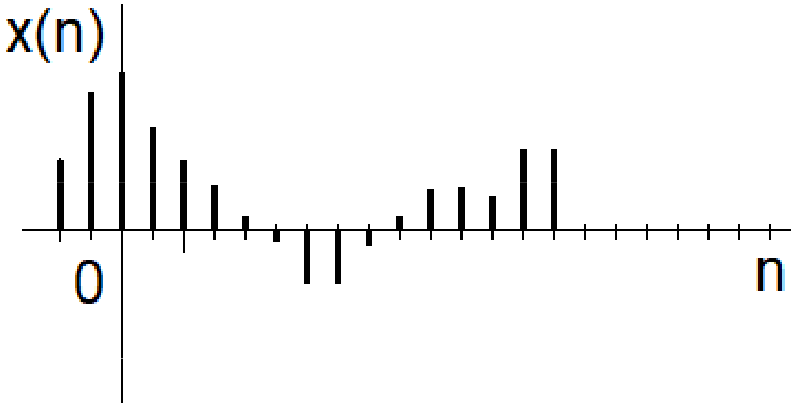


? x(n+2) ?

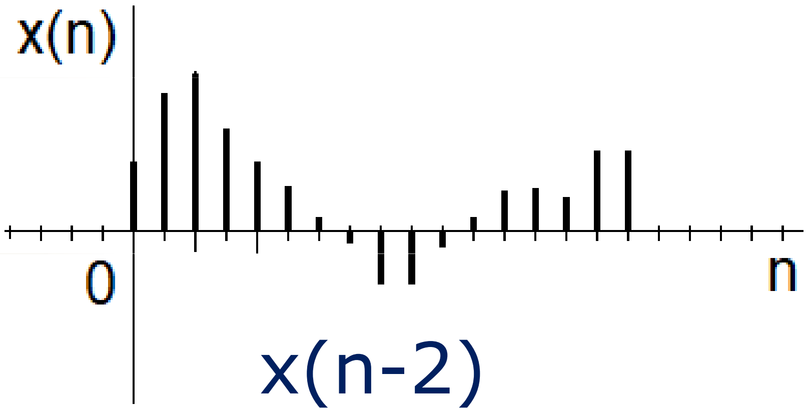


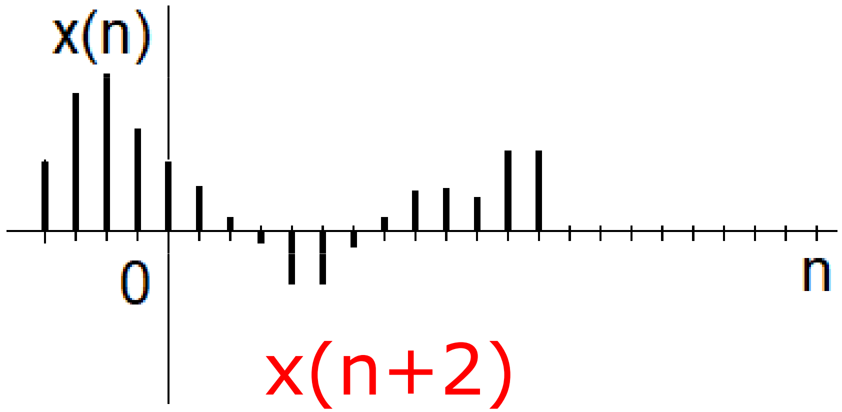


KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST



? x(n+2) ?





ČASOVĚ ZÁVISLÁ DATA

KŘÍŽOVÁ (VZÁJEMNÁ) KORELAČNÍ POSLOUPNOST

1. $$R_{x1x2}(mT_{vz}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

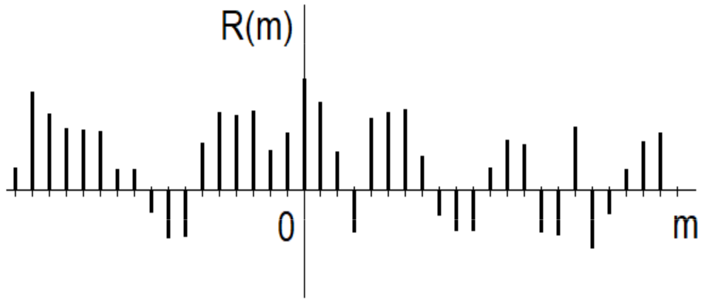
2. $$R_{x1x2}(mT_{vz}) = \sum_{n}^{N} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

3. $$R_{x1x2}(m) = \sum_{n}^{N} x_1(n)x_2(n + m)$$ $$\boxed{R_{x1x2}(m) = \sum^{N} x_1(n)x_2(n - m)}$$

4. $$R_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum^{N} x_1(n)x_2(n + m)$$ $$R_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum^{N} x_1(n)x_2(n - m)$$

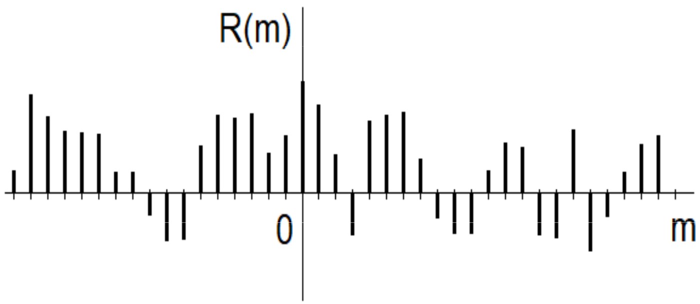
KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

?

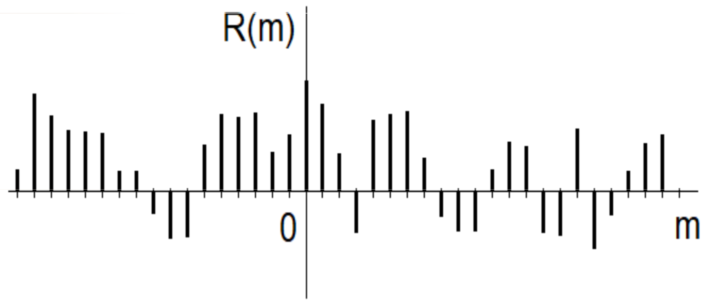


KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

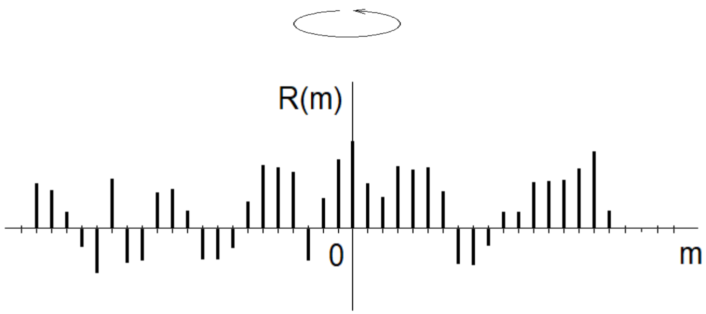
?



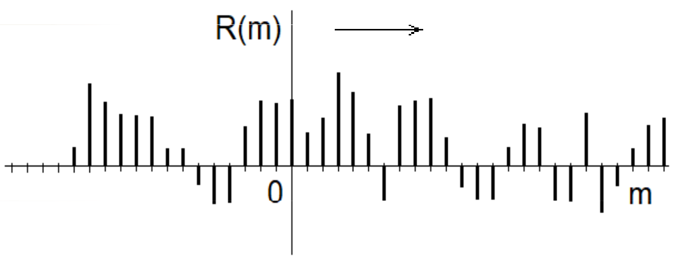
1.



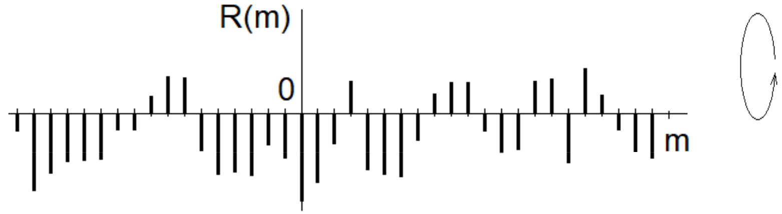
2.



3.

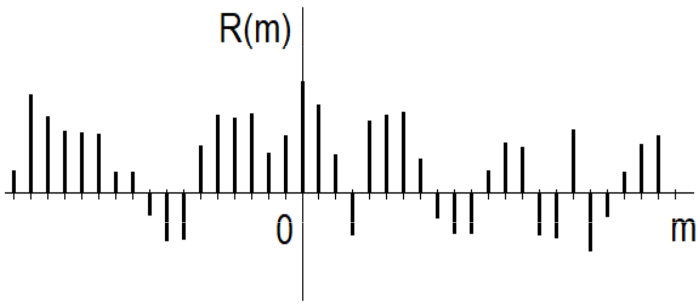


4.

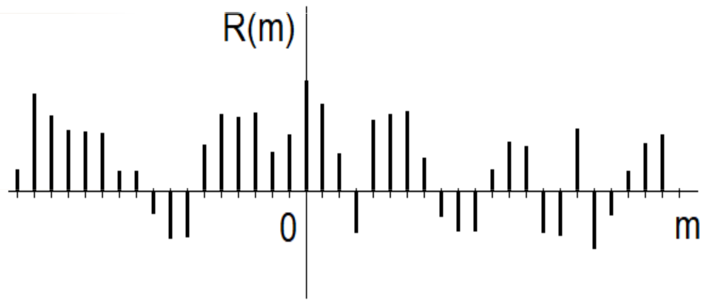


KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

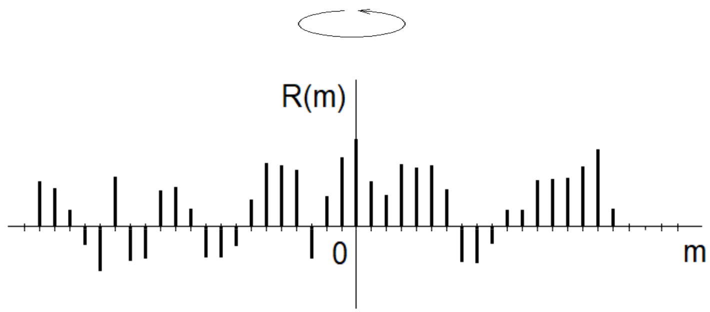
?



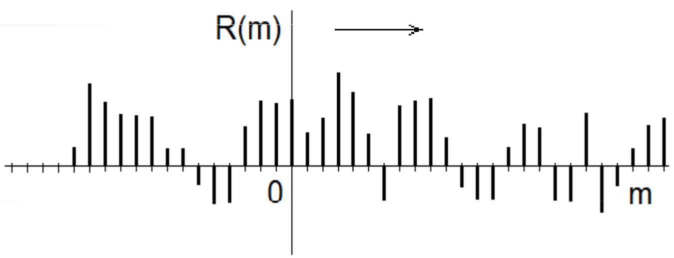
1.



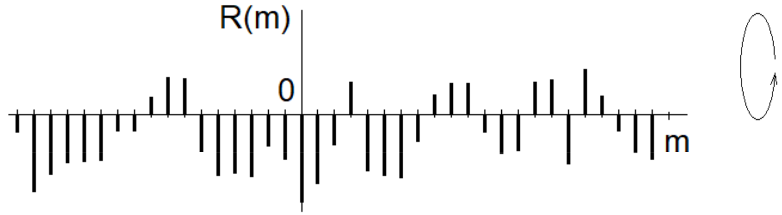
2.



3.



4.



KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

KŘÍŽOVÁ (VZÁJEMNÁ) KORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$x_1(n) \neq x_2(n)$$

AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$x_1(n) = x_2(n)$$

KŘÍŽOVÁ KOVARIANČNÍ/AUTOKOVARIANČNÍ POSLOUPNOST

$$x_1(n) = x_{1orig}(n) - m_{x1orig} \qquad x_2(n) = x_{2orig}(n) - m_{x2orig}$$

KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

VLASTNOSTI VZÁJEMNÉ KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

- ☑ vzájemná korelační posloupnost není komutativní, tj.

$$R_{x1x2}(n) \neq R_{x2x1}(n)$$

VLASTNOSTI AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

- ☑ sudá, tj. $R(-n) = R(n)$;
- ☑ $\forall n \in \mathbb{Z}$: $R(0) \geq R(n)$;
- ☑ $R(0)$ je rovna energii, resp. výkonu posloupnosti $x(n)$;
- ☑ pokud je posloupnost $x(n)$ periodická, pak je její autokorelační posloupnost rovněž periodická s toutéž periodou.

VLASTNOSTI AUTOKOVARIANČNÍ POSLOUPNOSTI

- ☑ $R(0)$ je rovna disperzi posloupnosti $x(n)$ pokud je R určena pomocí vztahu

$$R_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n}^{N}[x(n)-m_x][x(n+m)-m_x]$$

KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

?

ENERGIE & VÝKON

KORELAČNÍ POSLOUPNOST VS. PERSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

☑ VZÁJEMNÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$\hat{R}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+m)$$

$$\hat{R}_{x1x2}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n)$$

☑ PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sigma_x \, \sigma_y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{(x_n - \bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y_n - \bar{y})}{\sigma_y}$$

Pokud jsou srovnávané posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ standardizovány, pak každý vzorek jejich vzájemné korelační posloupnosti je roven odpovídající hodnotě Pearsonova korelačního koeficientu.

KORELAČNÍ POSLOUPNOST VS. KONVOLUCE

vzájemná korelační posloupnost:

konvoluce:

$$y(n)=x_1(n)*x_2(n)=\sum_m x_1(m).x_2(n-m)=\sum_m x_1(n-m).x_2(m)$$

Po záměně symbolů

$$y(m)=x_1(m)*x_2(m)=\sum_n x_1(n).x_2(m-n)$$

Vztahy by byly ekvivalentní, pokud by posloupnost x_2 byla invertována v čase. Pro symetrickou posloupnost, tj. $x_2(n-m) = x_2(m-n)$ je tento požadavek splněn.

PARCIÁLNÍ KORELACE

Parciální korelační koeficient je míra vztahu mezi dvěma veličinami, které jsou řízeny jednou nebo více řídicími veličinami.

PARCIÁLNÍ KORELACE

PŘÍKLAD: (https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_correlation)

Předpokládejme, že známe hodnoty tří proměnných, *X*, *Y*, a *Z*:

X	Y	Z
2	1	0
4	2	0
15	3	1
20	4	1

Pokud *Z* = 0, jsou hodnoty *X* rovny přesně dvojnásobkům *Y*, a pokud *Z* = 1, *X* je přesně rovno pětinásobku *Y*. Tak v závislosti na Y je přesný vztah mezi *X* a *Y*; tato relace ale nemůže být přesná bez reference k hodnotám *Z*.

Pokud určíme Pearsonův korelační koeficient mezi posloupnostmi *X* a *Y*, je výsledná hodnota 0,836. Určíme-li ale parciální korelaci mezi *X* a *Y* pomocí dále uvedeného vztahu, odpovídá její hodnota 0,919 podstatně silnějšímu vzájemnému vztahu.

PARCIÁLNÍ KORELACE

JAK JI SPOČÍTAT?

Parciální korelace $r_{XY.\mathbf{Z}}$ mezi posloupnostmi X a Y za předpokladu, že existují řídicí veličiny **Z** = $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ je rovna Pearsonově korelaci mezi rezidui e_x a e_y, která plynou z lineární regrese (MNČ) posloupnosti X a posloupnosti **Z**, resp. posloupnosti Y a posloupnosti **Z**.

- ☑ pomocí lineární regrese;
- ☑ pomocí maticové inverze;
- ☑ pomocí rekurzivního vztahu

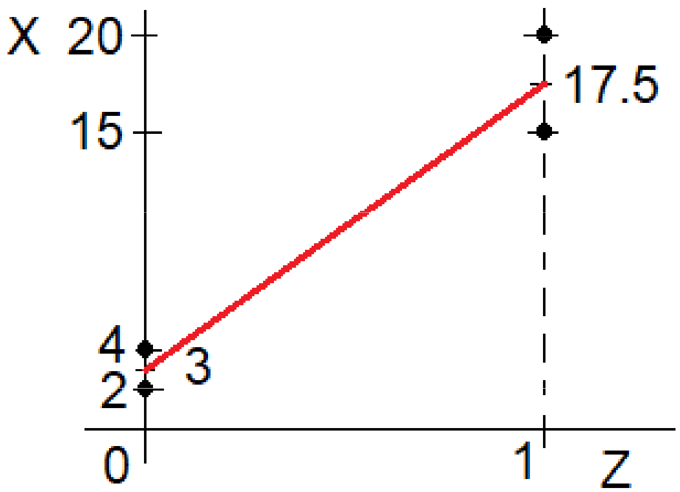
  s jedinou řídicí proměnnou se tento vztah redukuje na tvar

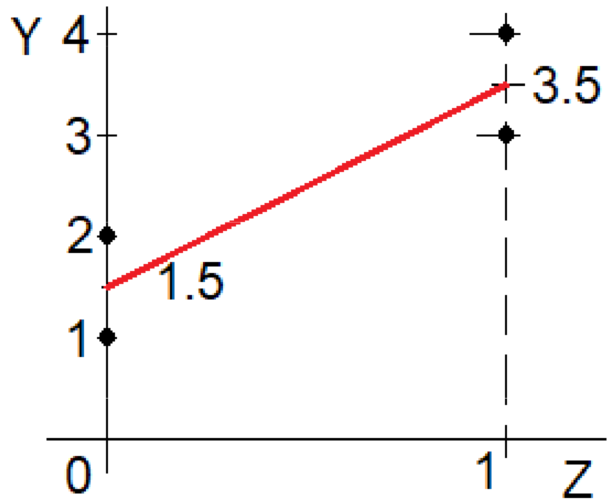
$$r_{XYZ} = \frac{r_{XY} - r_{XZ} r_{YZ}}{\sqrt{(1 - r_{XZ}{}^2)(1 - r_{YZ}{}^2)}}$$

PARCIÁLNÍ KORELACE

JAK JI SPOČÍTAT?

X	Y	Z
2	1	0
4	2	0
15	3	1
20	4	1





X	ΔX	Y	ΔY
2	-1.0	1	-0.5
4	1.0	2	0.5
15	-2.5	3	-0.5
20	2.5	4	0.5

$r_{\Delta X \Delta Y} = 0{,}919$

PARCIÁLNÍ AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOST

Parciální autokorelační posloupnost (**PACF**) určuje hodnoty parciální korelace mezi hodnotami časové řady a jejími zpožděnými hodnotami, přičemž jako řídící posloupnost je použita posloupnost pro všechna menší zpoždění.

Na rozdíl od obyčejné autokorelační posloupnosti, která již na ničem dalším nezávisí.

Je-li známa časová řada x(n), pak parciální autokorelační posloupnost $R_{xx}(k)$ pro zpoždění k je určena podle následujících vztahů

$$R_{xx}(1) = \mathrm{Cor}\,(x(n), x(n+1)),$$

$$R_{xx}(k) = \mathrm{Cor}\,(x(n) - \hat{x}(n),\ x(n+k) - \hat{x}(n+k)),\ k = 2,3,\ldots,$$

kde $\hat{x}(n)$ a $\hat{x}(n+k)$ jsou hodnoty nejlepší lineární predikce x(n) a x(n+k) z hodnot x(n+1), …, x(n+k-1).

ZA TÝDEN NASHLEDANOU