ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

KORELAČNÍ POSLOUPNOST

1. $$R_{x1x2}(mT_s) = \sum_{n}^{N} x_1(nT_s)x_2(nT_s + mT_s)$$

2.

3.

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

KORELAČNÍ POSLOUPNOST

1. $R_{x1x2}(mT_s) = \sum_{n}^{N} x_1(nT_s)x_2(nT_s + mT_s)$

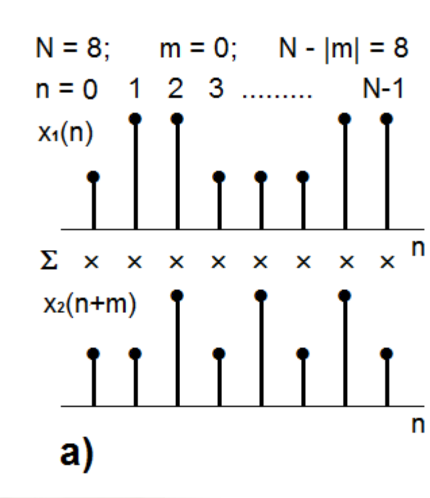
2.

3.

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

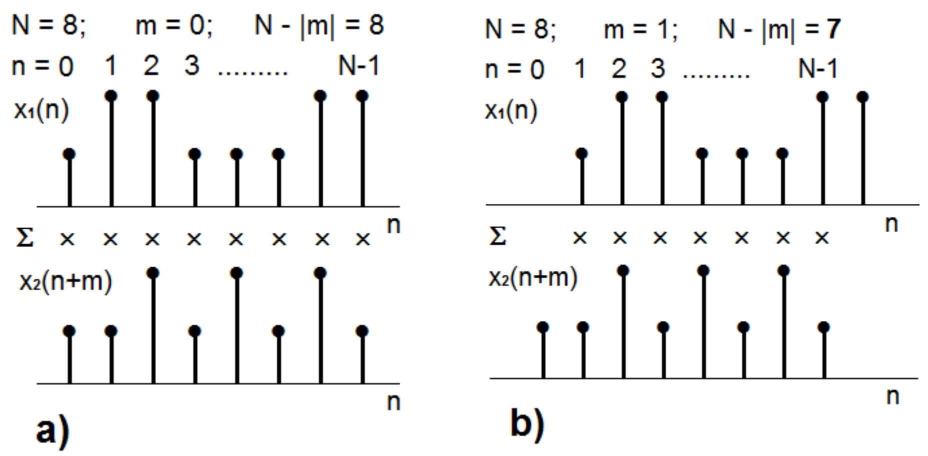
$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A.\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$



ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o týž délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A.\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$

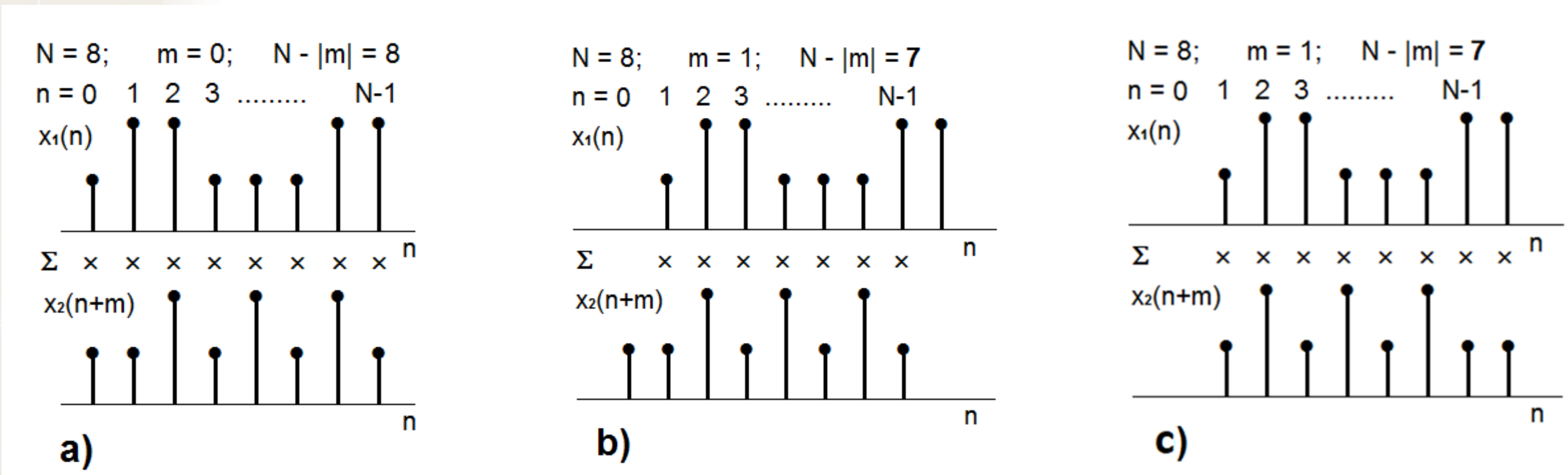


?

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o týž délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A.\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$



odhad korelační posloupnosti s konstantní vahou

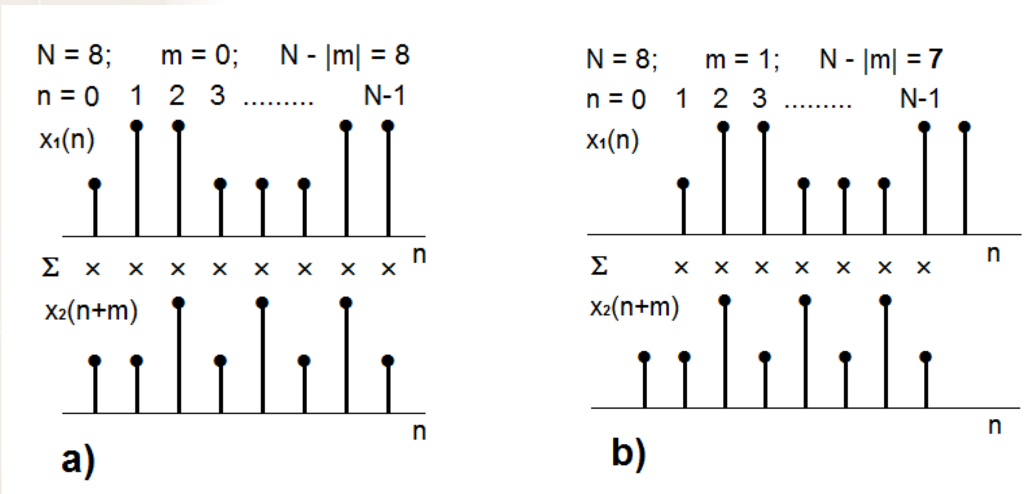
odhad korelační posloupnosti s proměnnou vahou

odhad kruhové korelační posloupnosti

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A . \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$

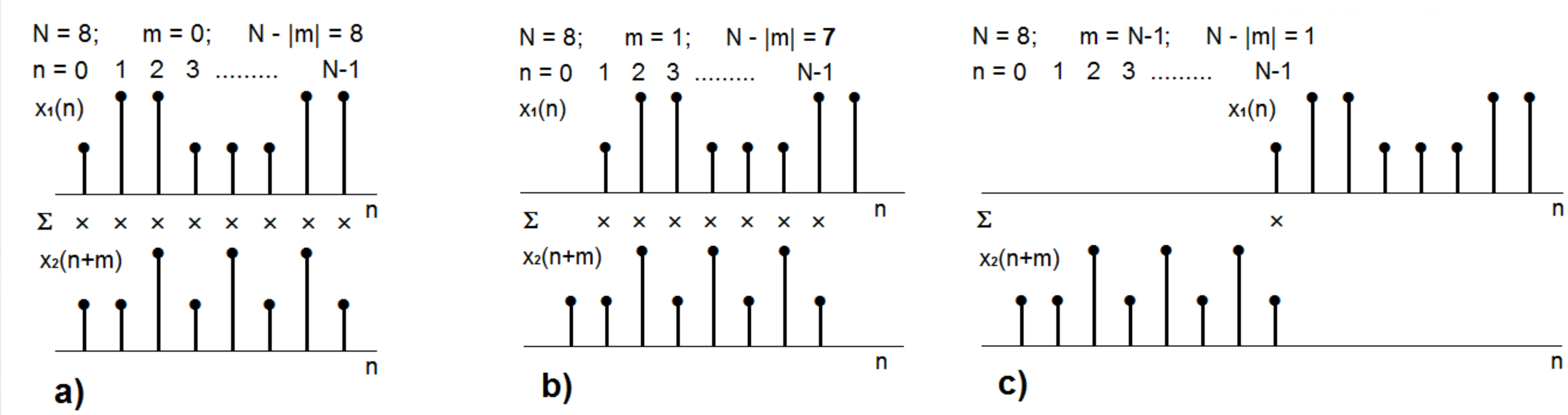


$$A = \frac{1}{N} \text{ nebo } A = \frac{1}{N-1}$$

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o týž délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A.\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$

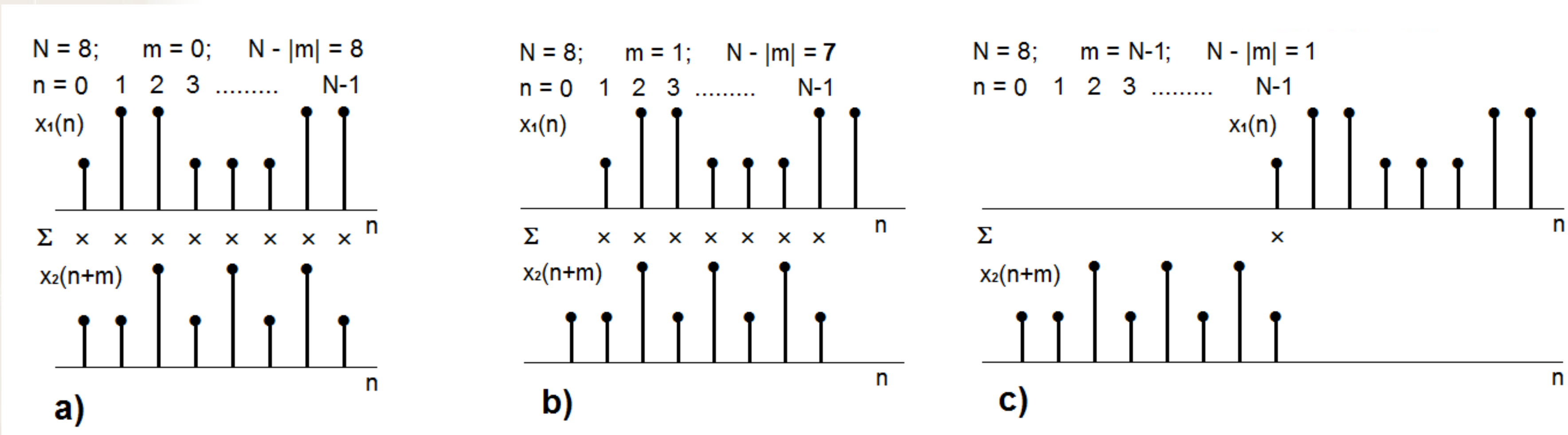


$$A = \frac{1}{N} \text{ nebo } A = \frac{1}{N-1}$$

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A.\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$



$${}_1\tilde{r}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1 \qquad {}_2\tilde{r}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1$$

KRÁTKÝ ODHADOVÝ EXKURZ

- odhad parametru je závislý na volbě úseku analyzované veličiny;
- protože je výběr intervalu náhodný, je i odhad parametru náhodnou veličinou;
- základní (požadované) vlastnosti odhadů:
  - **nestrannost** – záruka, že v průměru se bude odhad pohybovat kolem správné hodnoty parametru

    $E\hat{q} = q; \quad \lim_{K \to \infty} E\hat{q} = q$ asymptoticky nestranný odhad

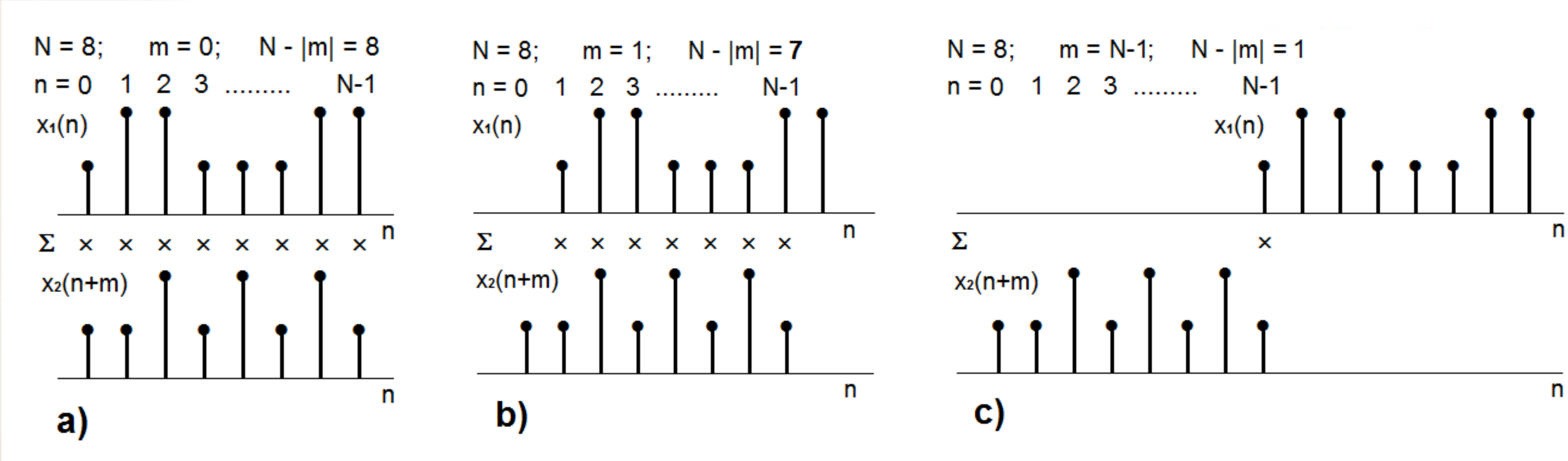
  - **konzistence** – čím delší bude zkoumaný interval, tím více se bude odhad blížit neznámé hodnotě

    $$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{K \to \infty} P(\|\hat{q} - q\| > \varepsilon) = 0$$

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x1x2}(m) = A.\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n).x_2(n+m) \qquad A = \frac{1}{N}$$



1) Konstantní

$$_1\tilde{r}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\ldots,N-1$$

2) proměnná

$$_2\tilde{r}_{x1x2}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\ldots,N-1$$

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) **střední hodnota**

$$E\left[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})\right] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E\left[x(nT_{vz})x(nT_{vz}+mT_{vz})\right]}_{} = \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

takhle je definovaná AKF stacionárního diskrétního náhodného procesu

tzn. je nestranný odhad

rozptyl [Jenkins, G.M., Watts,D.G.: Spectral Analysis & Its Application, Holden-Day, 1968]

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) pokračování

Protože a

je odhad [konzistentní]

pro velké hodnoty m má odhad velký rozptyl

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) **střední hodnota**

je asymptoticky nestranný odhad

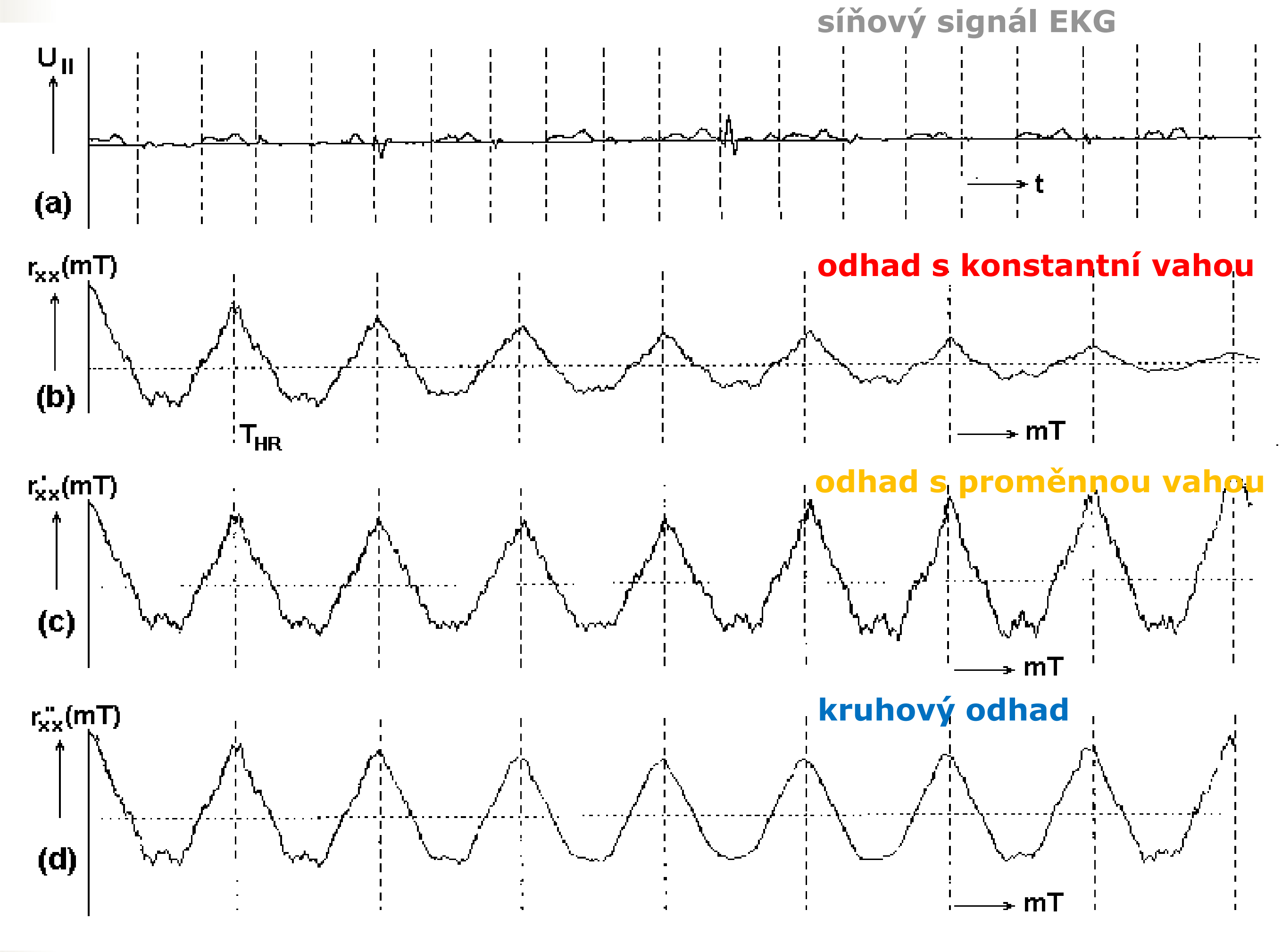
ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) **rozptyl**

je to menší než pro

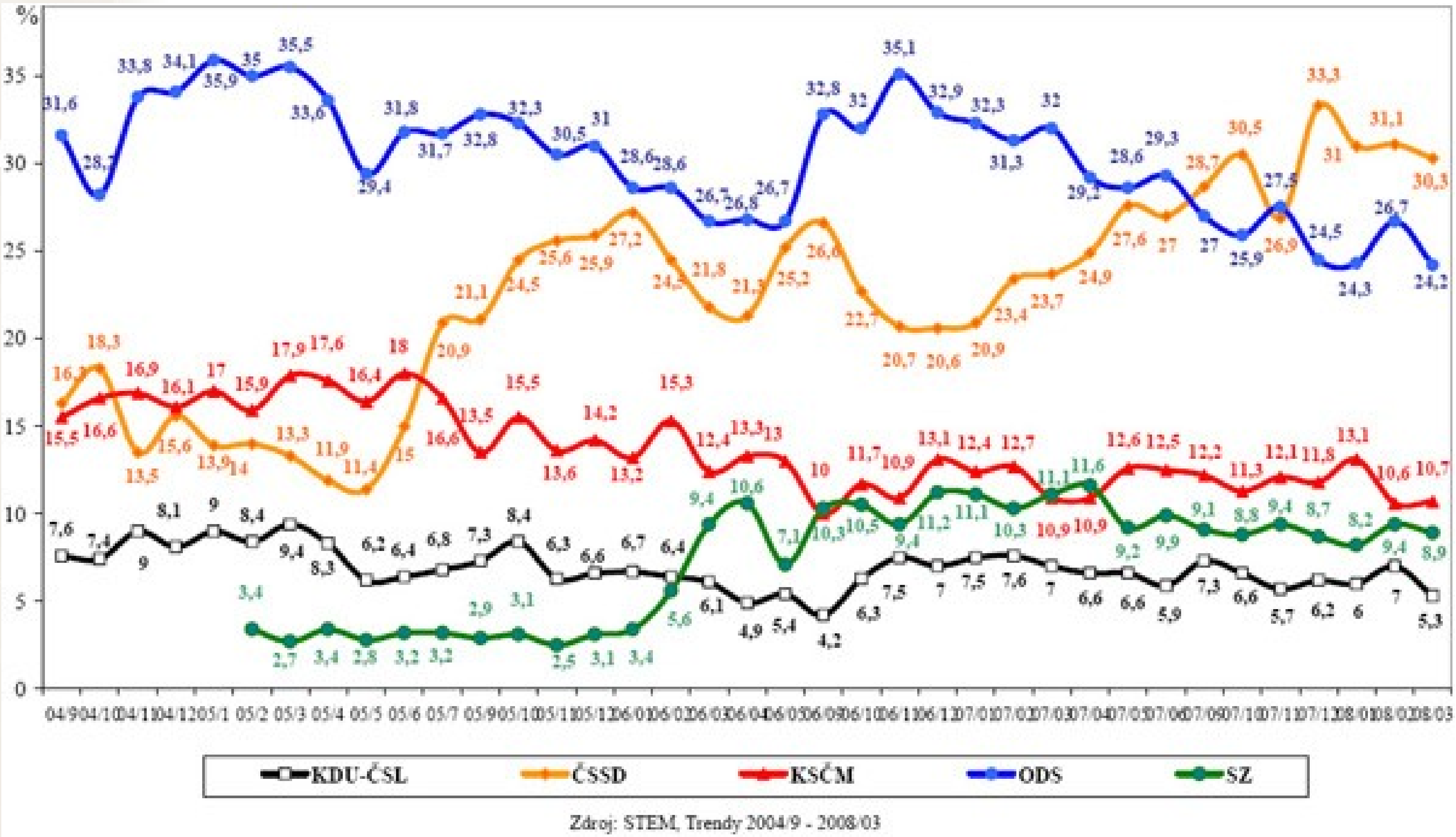
a tak je také konzistentní

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI
PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA



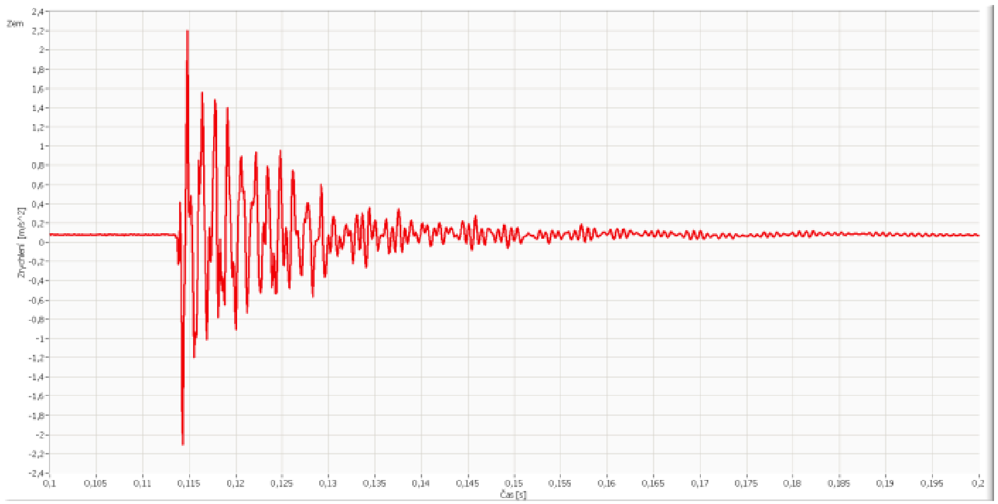
VII. HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

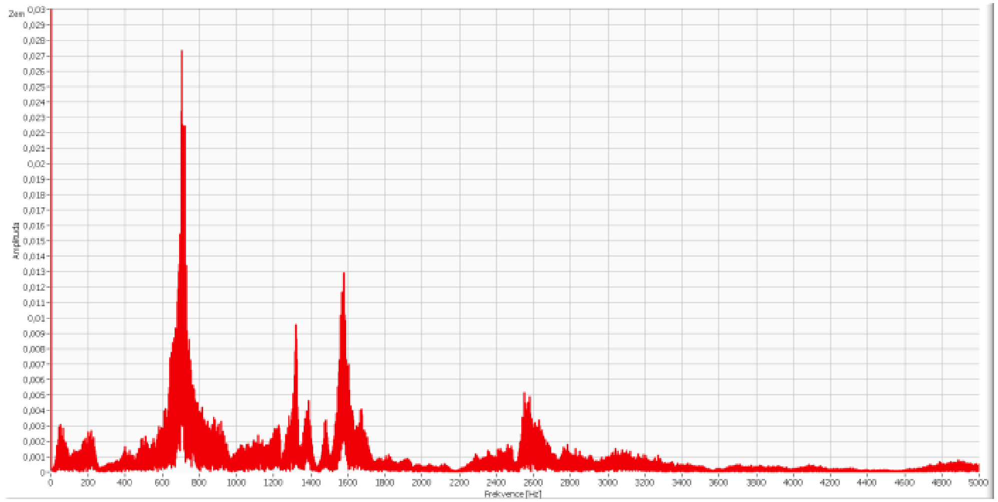
ČASOVÁ ŘADA



Preference politických stran v ČR v období od 8/2004 do 3/2008

OSCILACE



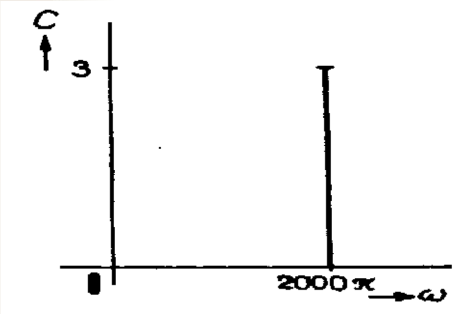


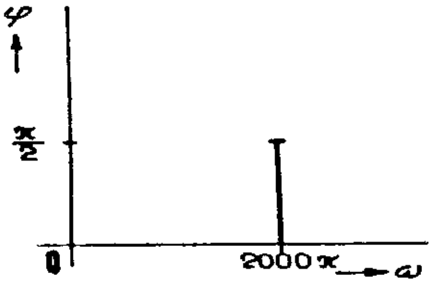
HARMONICKÁ FUNKCE

- tříparametrickou harmonickou funkci lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

  amplituda x úhlový kmitočet a počáteční fáze x úhlový kmitočet:

$$C_1 = C_1(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \varphi_1(\omega);$$





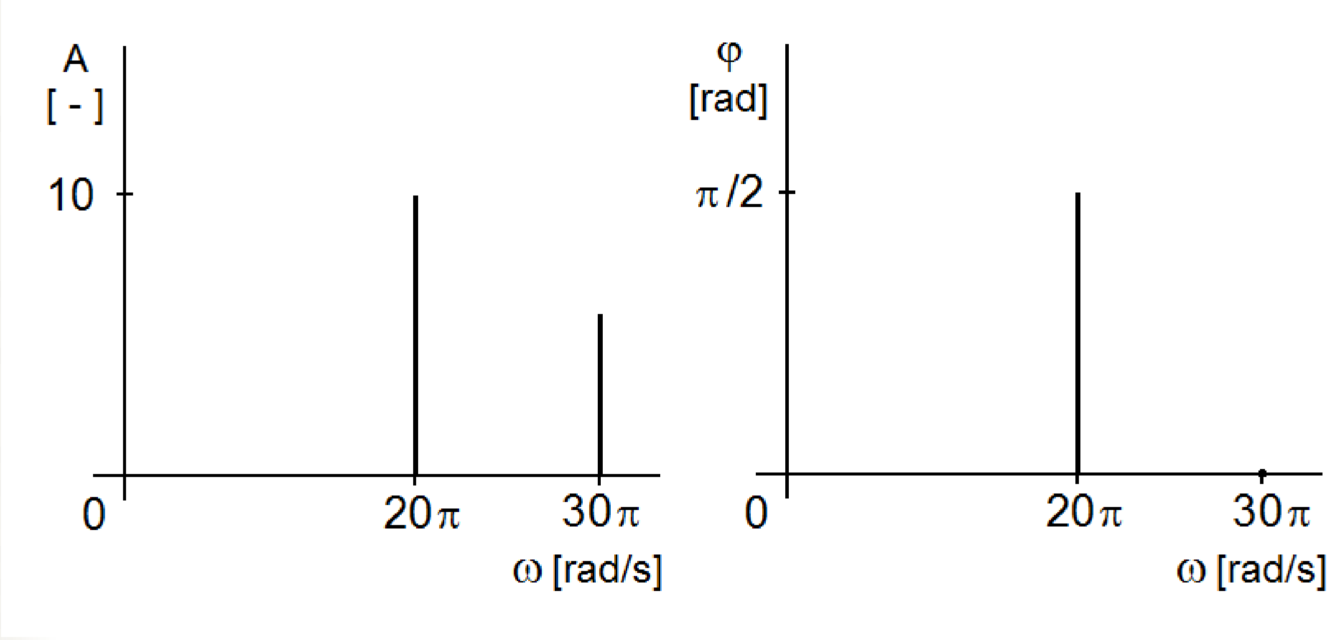
spektrum amplitud   **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ FUNKCE

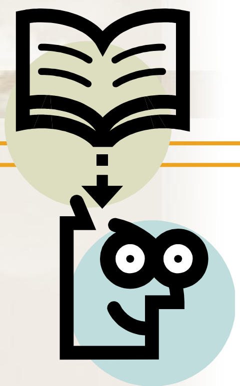
$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2)$.

HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2) + 5.\cos(2\pi.15t)$$



!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



Frekvenční spektrum funkce je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se funkce skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

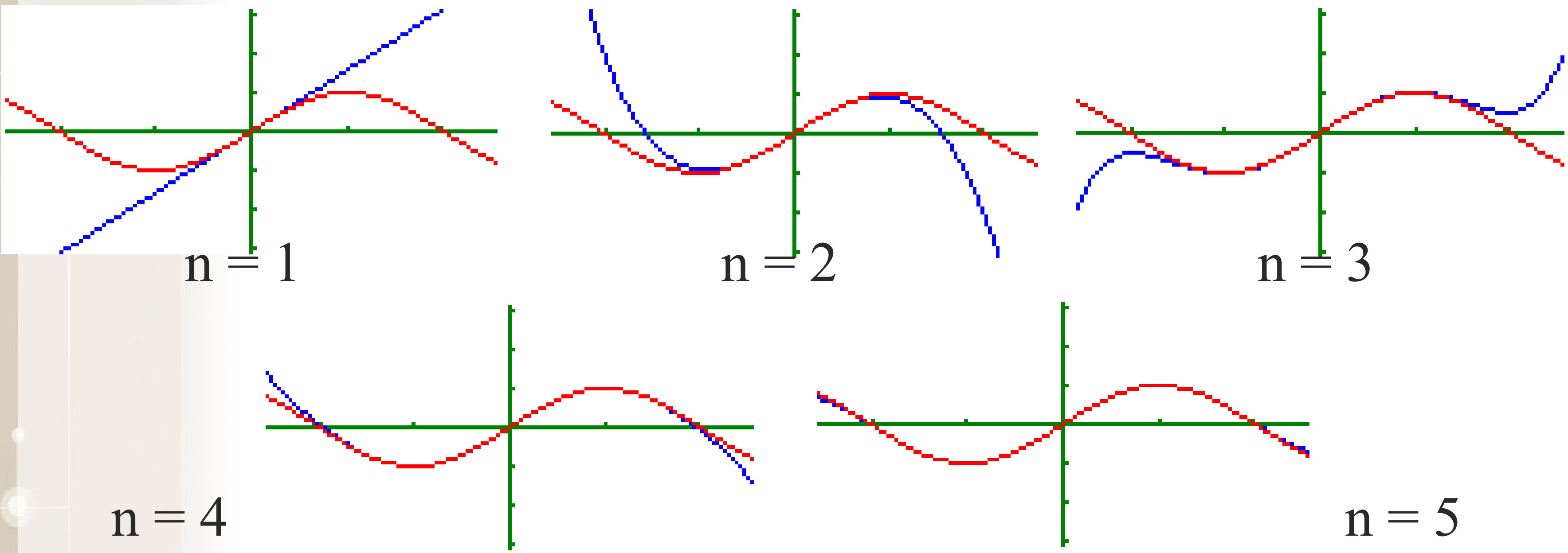
TAYLORŮV ROZVOJ

Nechť funkce f(x) má v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu n+1 včetně

Taylorova řada

Maclaurinova řada, tj. Taylorova řada pro $x_0 = 0$

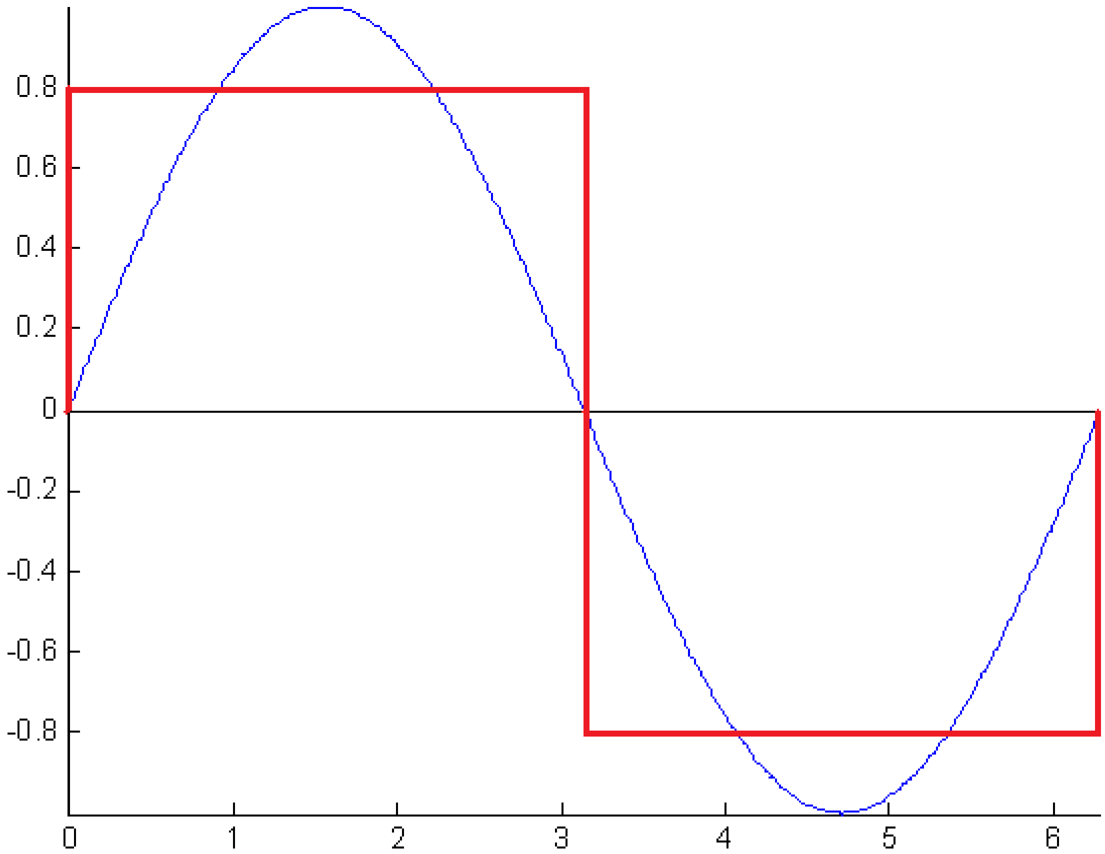
TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCE y = sin(x) PRO x = 0



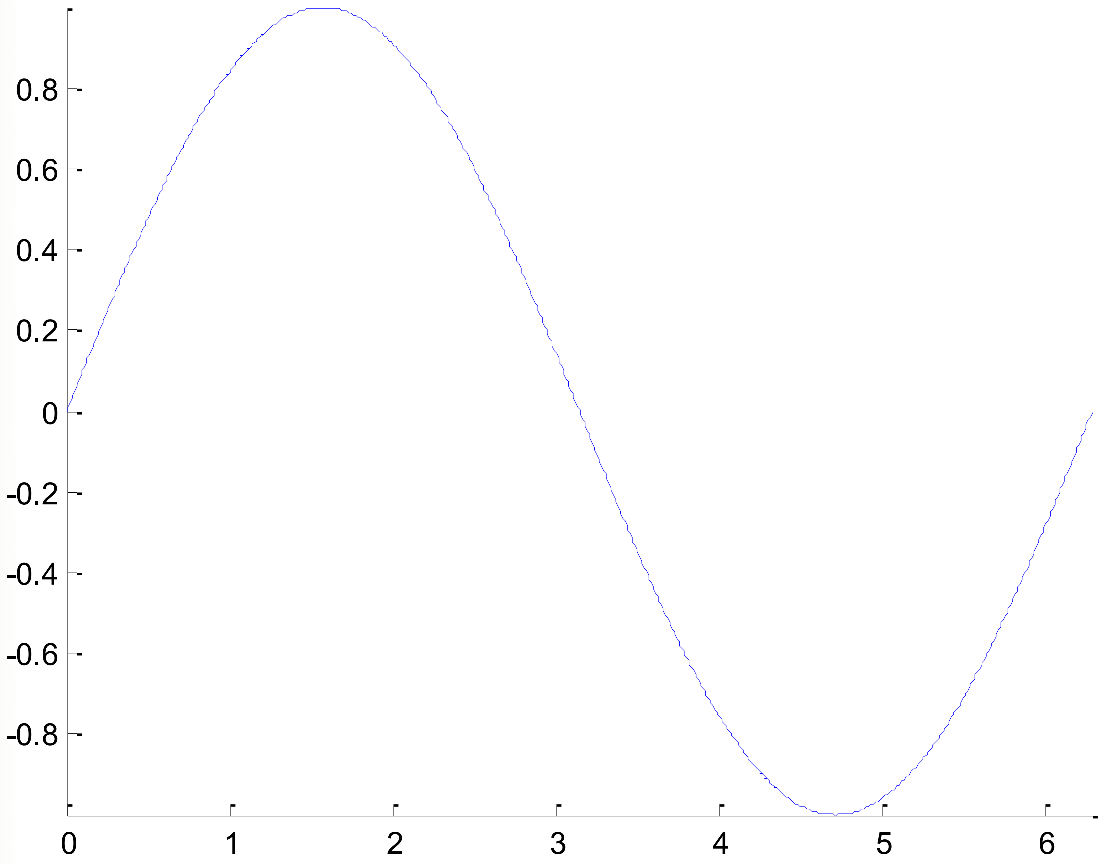
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

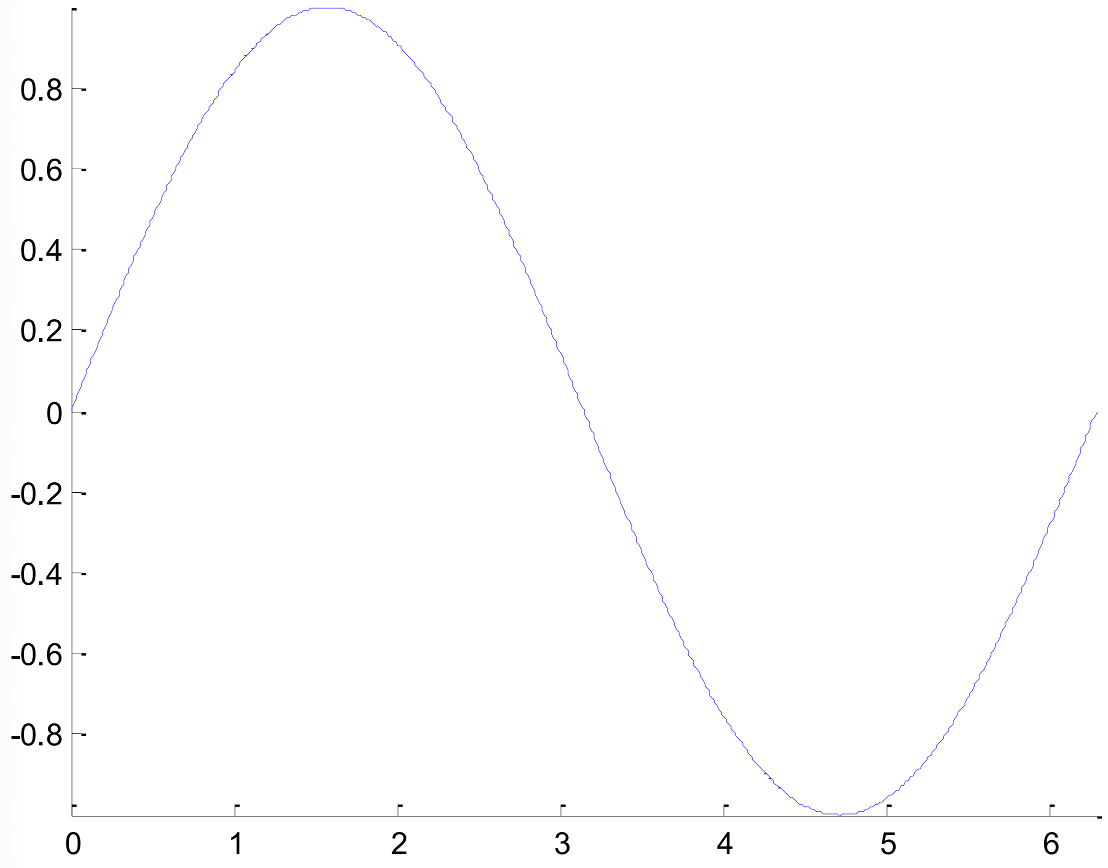
ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

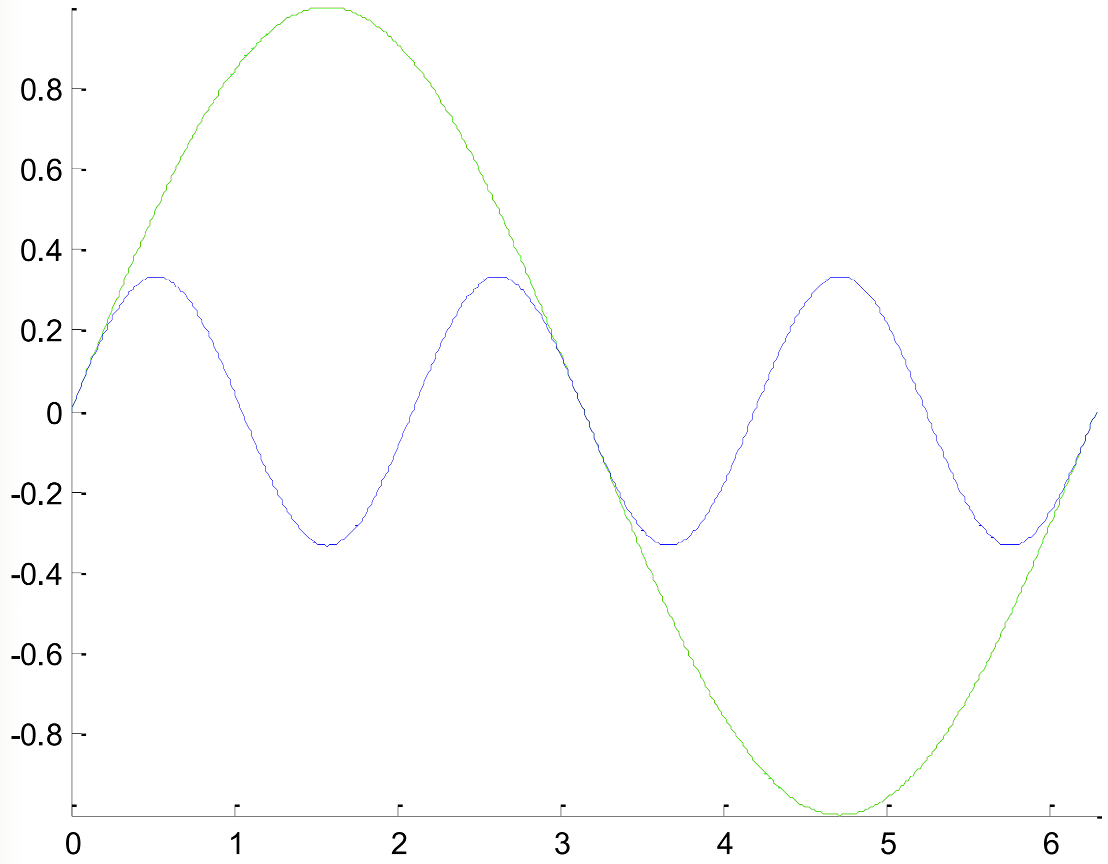
- poznali jsme, že funkci je možné vyjádřit jako mocninou řadu;
- jinou možností je vyjádřit funkci jako harmonickou (trigonometrickou) řadu (tj. jako součet harmonických funkcí);
- takto lze vyjádřit obsáhlejší třídu funkcí než mocninnými řadami.

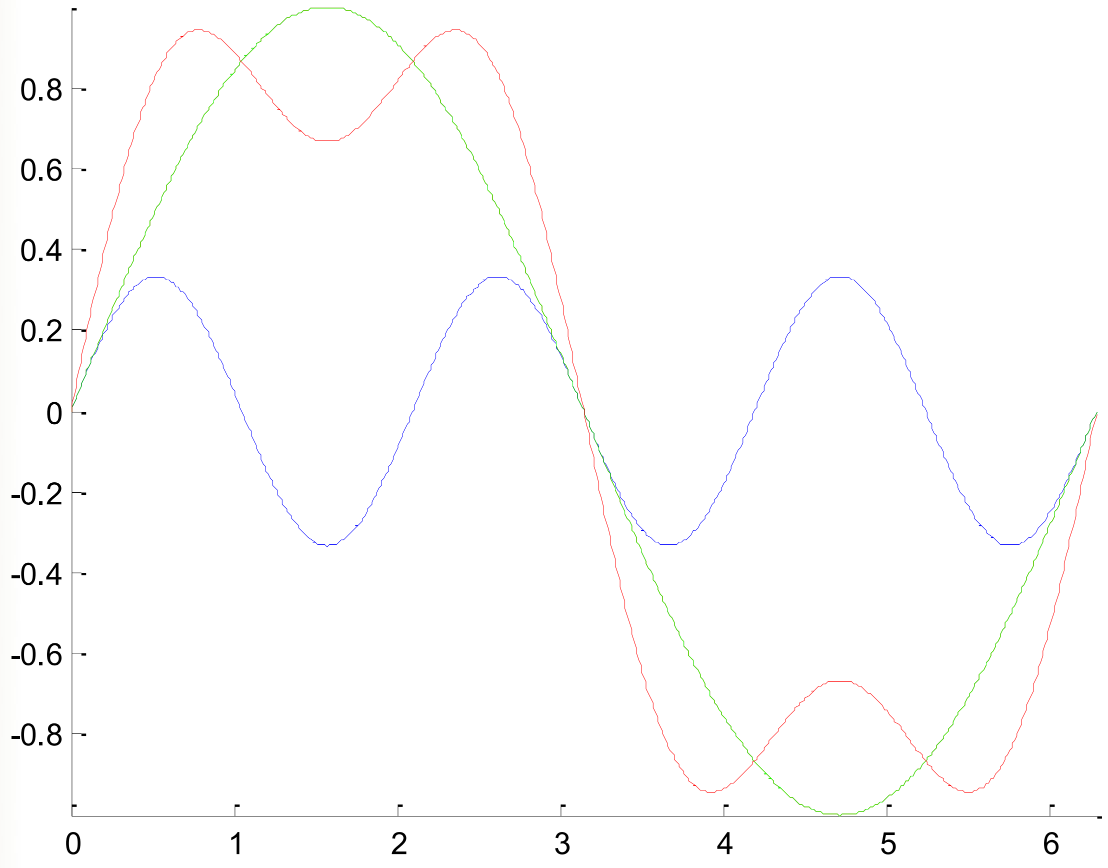


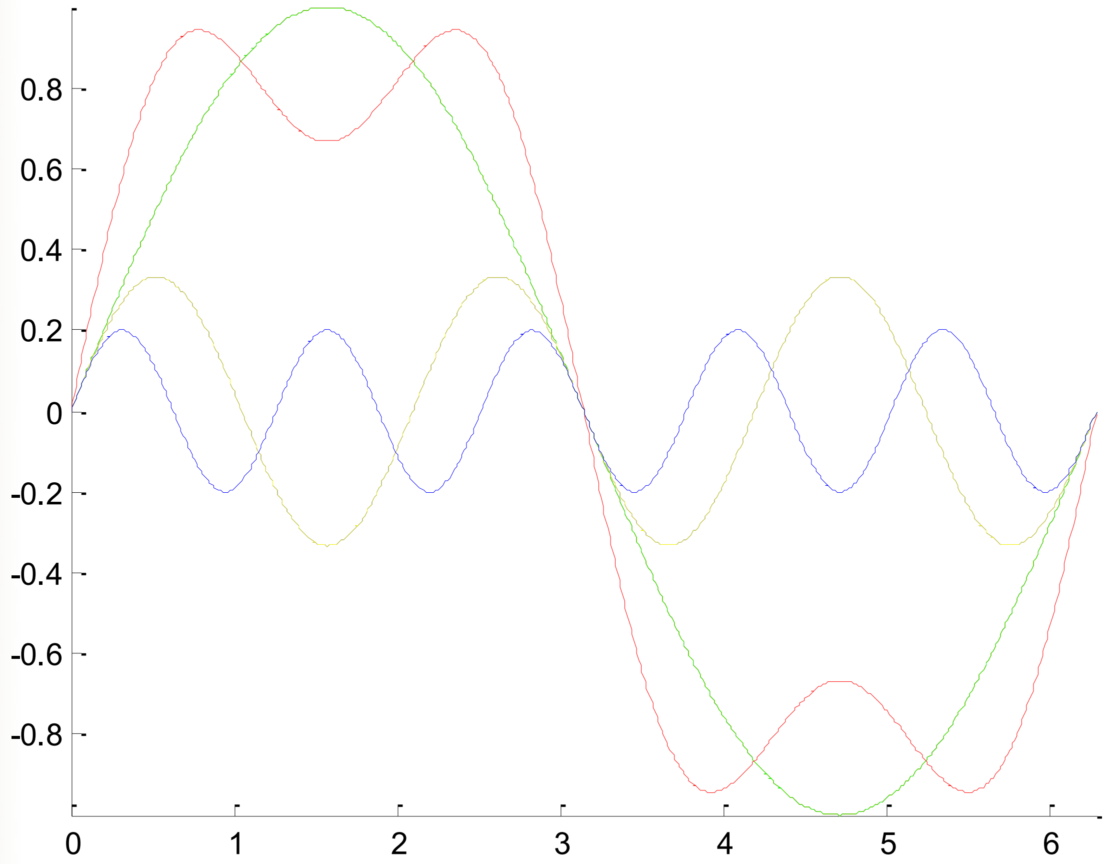
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

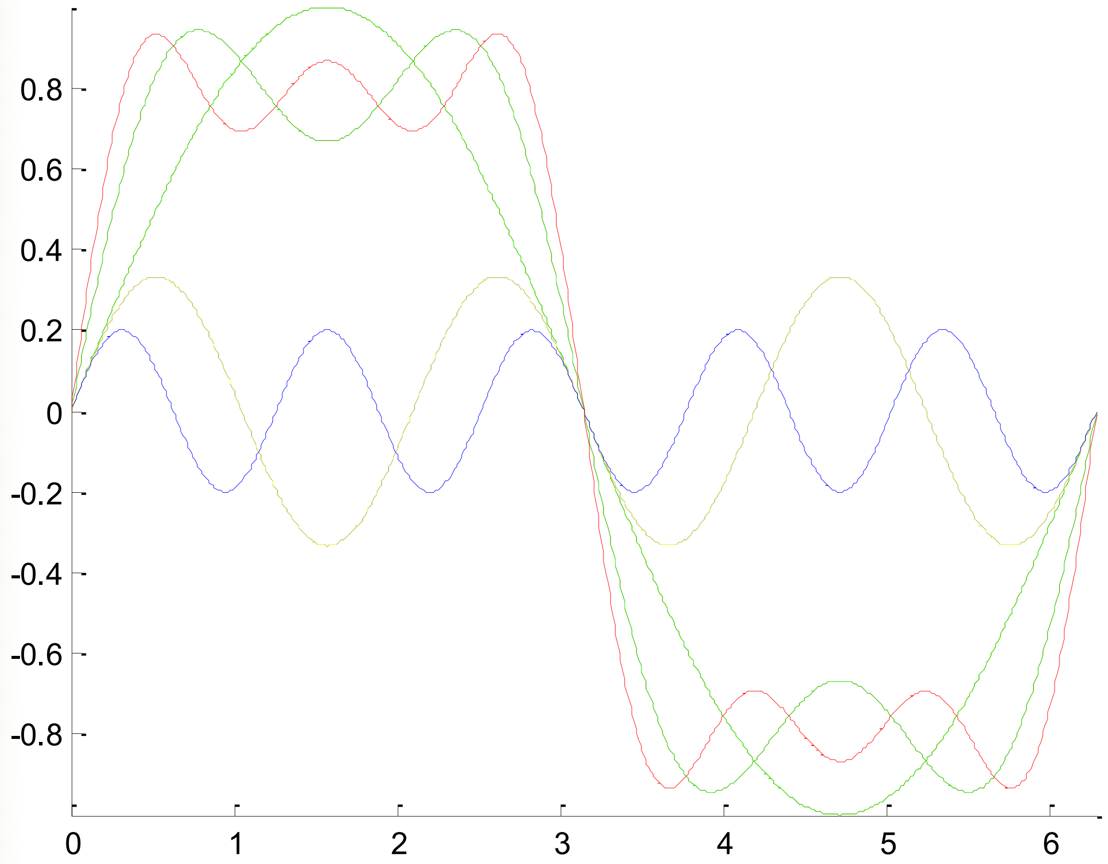

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

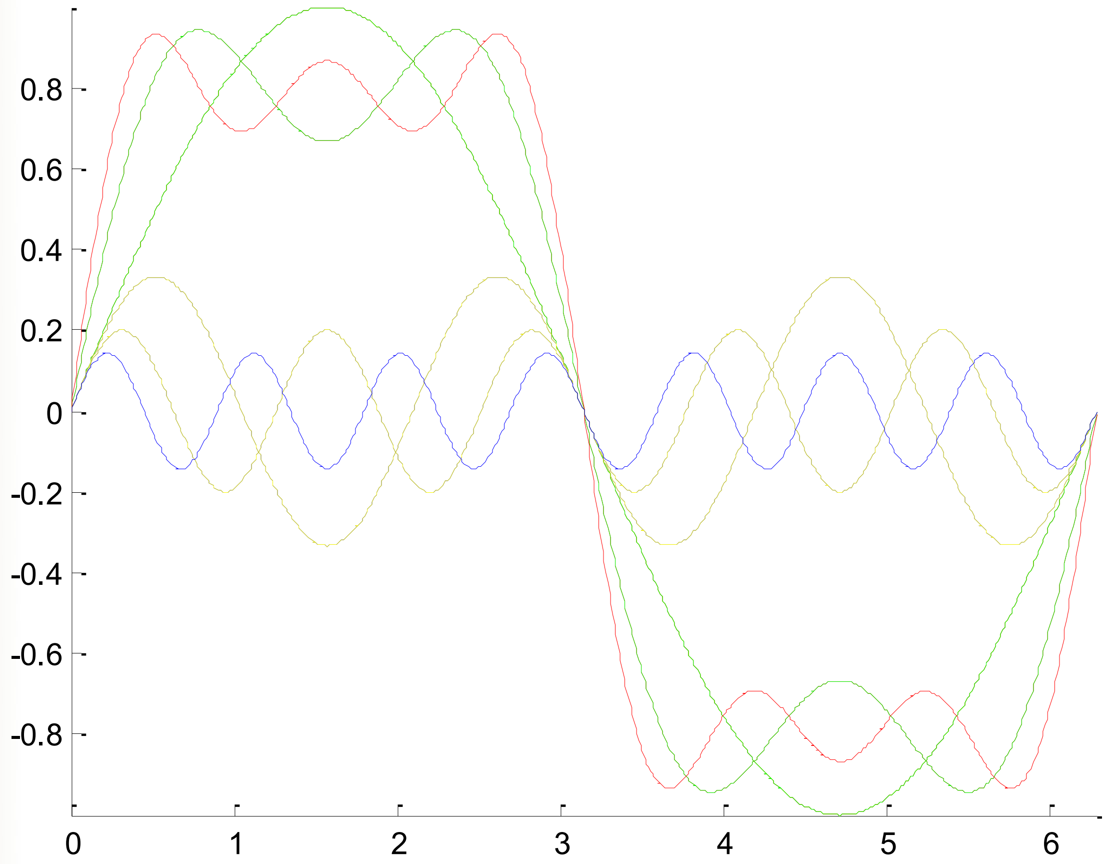

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

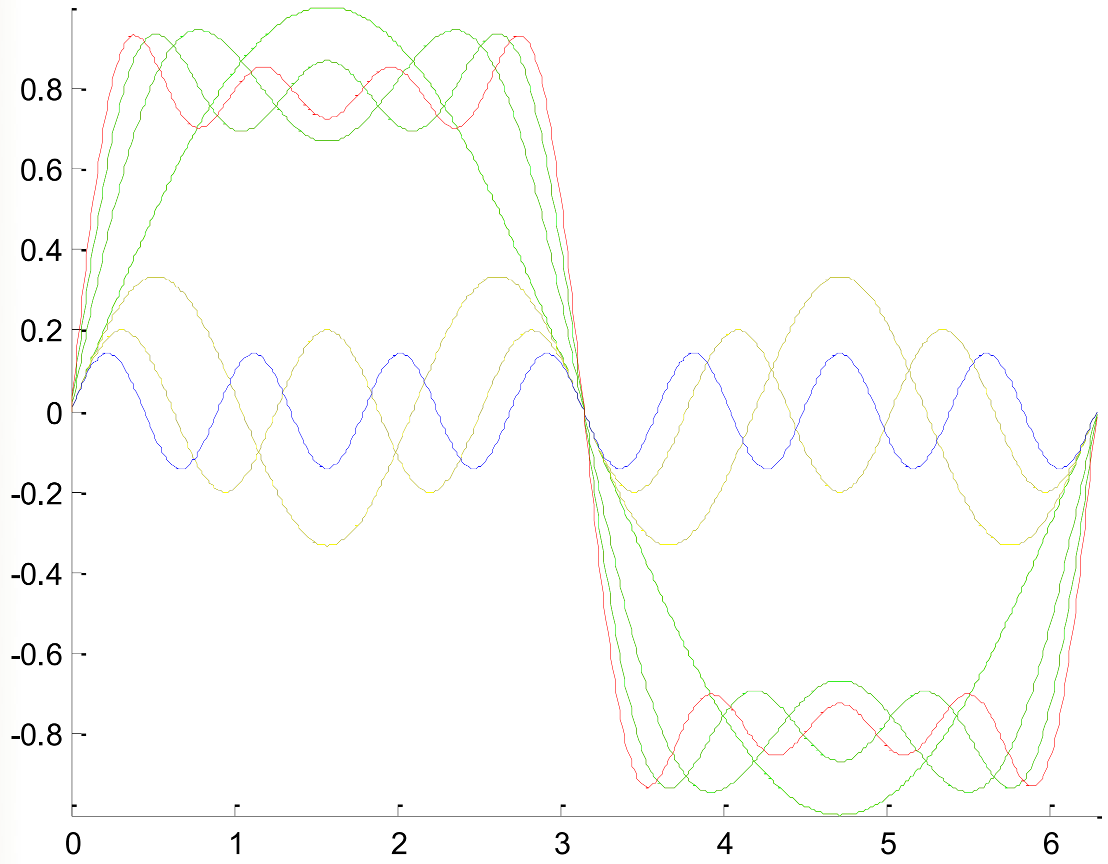


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

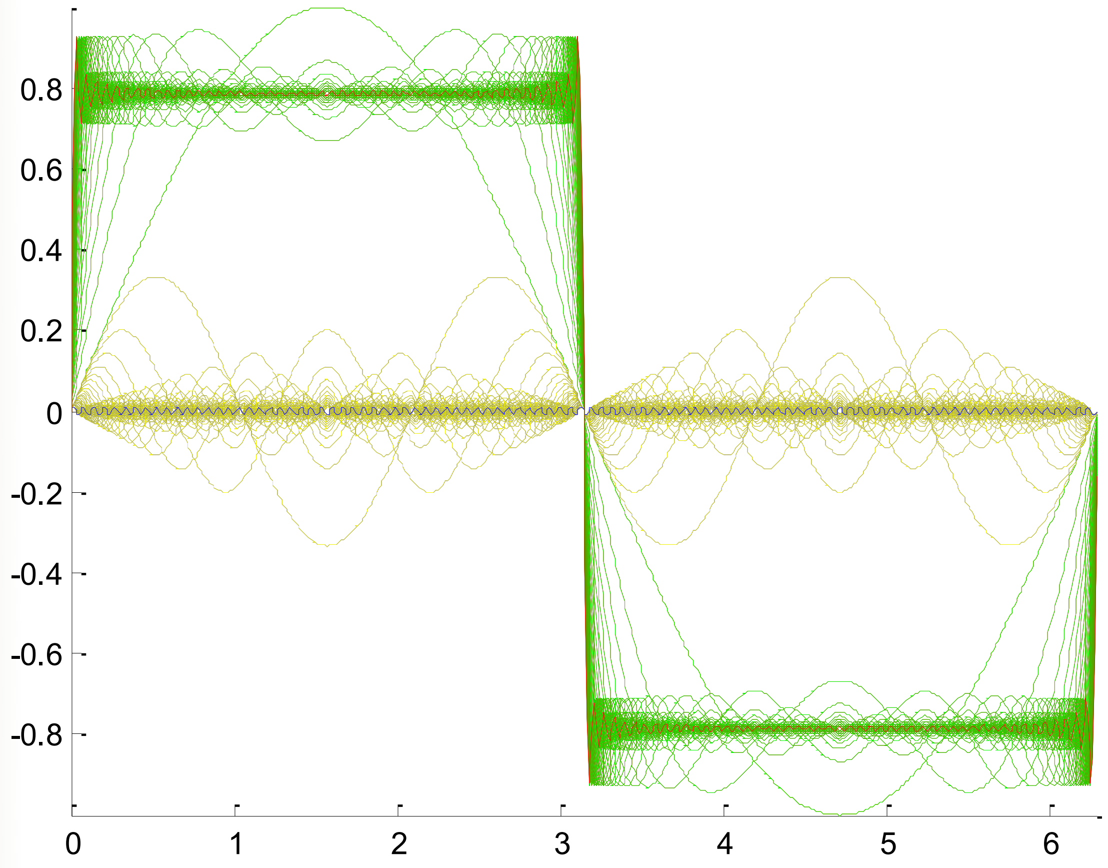

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

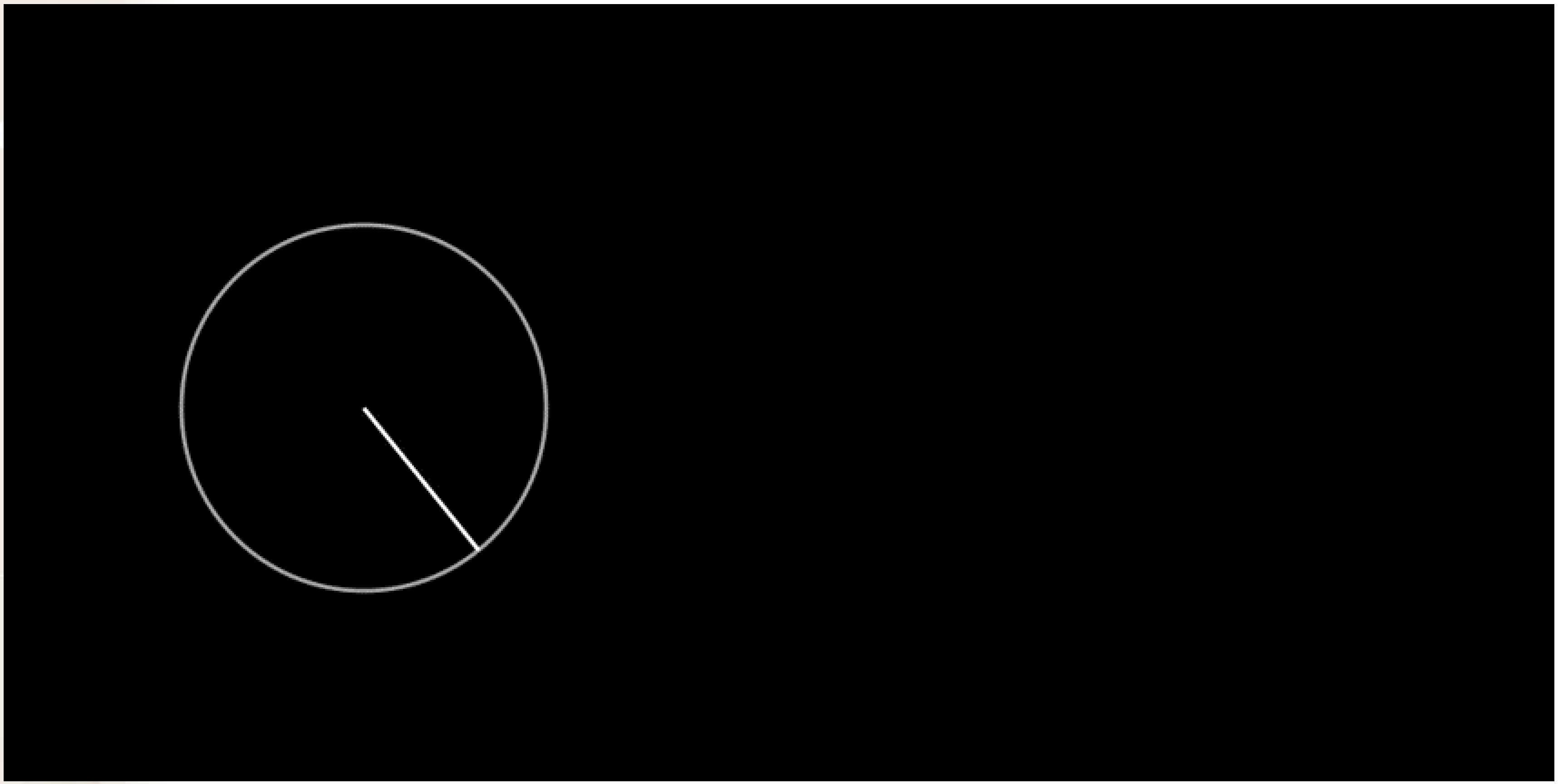


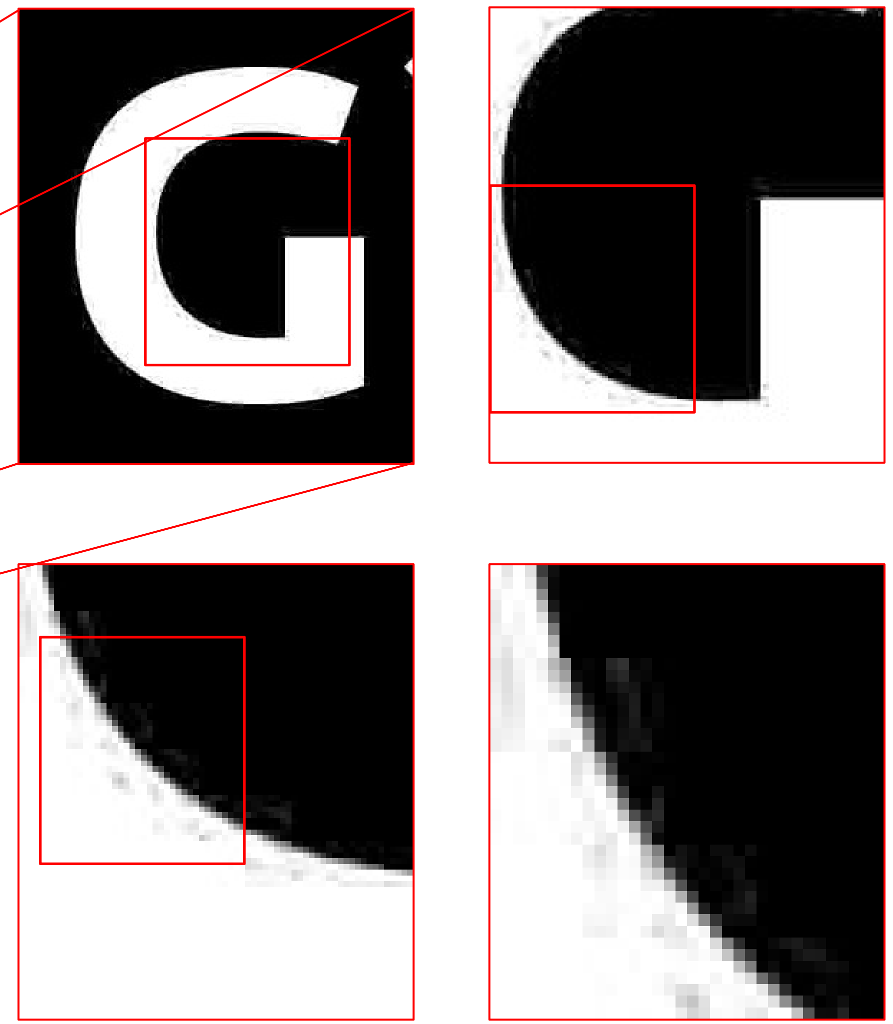
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6



0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6





- ☑ Demonstrace nedokonalé aproximace skokových přechodů v jpg kompresi.

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

- Fourierova analýza – snaha vyjádřit (rozložit, rozvinout) funkci jako součet jednoduchých funkcí (harmonických funkcí, složek).
- počty těchto harmonických složek, jejich amplitudy, frekvence a fázové posuny jednoznačně charakterizují analyzovanou funkci.
- Základní rozdělení podle periodicity:
  - Fourierova řada (periodické funkce).
  - Fourierův integrál, Fourierova transformace (neperiodické).
- Fourierovy řady mohou být vyjádřeny v klasickém, trigonometrickém nebo komplexním tvaru.
- zpracovávat můžeme spojité i diskrétní veličiny.

FOURIEROVA ŘADA

- ☑ Každou periodickou funkci x(t+kT) = x(t), která vyhovuje Dirichletovým podmínkám, lze vyjádřit pomocí Fourierovy řady, pro kterou v exponenciálním tvaru je

kde jsou komplexní *Fourierovy koeficienty* definované vztahem

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-in\omega_1 t}dt$$

a ω_1 = 2π/T je úhlový kmitočet první základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce x(t).

Dirichletovy podmínky pro rozklad periodické funkce x(t) do Fourierovy řady jsou:

1) x(t) je absolutně integrovatelná nad každou periodou; 2) x(t) má nad každou periodou pouze konečný počet maxim a minim; 3) x(t) má nad každou periodou konečný počet nespojitostí.

Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné. Lze konstatovat, že všechny rozumné, tj. fyzikálně realizovatelné funkce Dirichletovy podmínky splňují.

FOURIEROVA ŘADA

- Modul komplexního Fourierova koeficientu určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

- Pro n = 0 je

FOURIEROVA ŘADA

- Modul komplexního Fourierova koeficientu určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

- Pro n = 0 je

  což je střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce x(t).

- Pro reálné funkce x(t) je (symbolem * označujeme komplexně sdruženou hodnotu).

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 1

Určeme parametry jednotlivých harmonických složek, z nichž se skládá obdélníkový pulz o základní periodě T, době trvání jednotlivých impulzů □ a výšce A. Nechť je první z impulzů umístěn symetricky kolem počátku časové osy.

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

Pro n = 0 je

a pro n ≠ 0

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

Pro n = 0 je

si α α 2 .

a pro n ≠ 0

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Nulové hodnoty nabývá funkce Sa(x) pro argumenty rovné celočíselným násobkům π, tj.

$$\frac{\vartheta}{2}\omega = \pm k\pi$$

a tedy pro frekvenci

$$\omega = \pm k\frac{2\pi}{\vartheta}.$$

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 2

Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy?

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 2 - ŘEŠENÍ

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD 2 - VÝSLEDEK

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Pro periodickou funkci je kmitočet základní harmonické složky

$$\omega_1 = 2\pi/T.$$

Pro **neperiodickou** funkci, tj. pro periodickou s $T \to \infty$ je

Pro neperiodický signál tedy budou spektrální čáry na sebe spojitě navazovat a definiční sumační vztah pro Fourierovu řadu přechází na vztah integrační, kde koeficienty $\dot{c}_n$ určíme následovně.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Ve vztahu

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-in\omega_1 t}dt$$

je T = 2π/dω a tedy pro limitní rozdíl dvou sousedních frekvencí dω → 0 je T → ∞ a $n\omega_1$ → ω. Meze integrálu budou pro nekonečně dlouho trvající funkci −∞ a +∞. Pro T →∞ budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulzu **nekonečně malé**.

Vyjádříme-li výše uvedený vztah pro v limitním tvaru a dostáváme

FOURIEROVA TRANSFORMACE

připomeňme vztah
pro Fourierovu řadu:

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{-in\omega_1 t}dt$$

V tom případě se definiční vztah Fourierova rozkladu transformuje do podoby

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-i\omega t}dt\right).e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega).e^{i\omega t}d\omega \qquad (*)$$

kde vztah

nazýváme *Fourierovu transformací* a vztah (*) *inverzní (zpětnou) Fourierovu transformací*.

FOURIEROVA TRANSFORMACE
VLASTNOSTI

Princip superpozice (! podmínka linearity !)

$$s_1(t) + s_2(t) \sim S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$a.s(t) \sim a.S(\omega)$$

Lineární kombinaci funkcí odpovídá lineární kombinace jejich spekter

Změna znaménka

$$s(-t) \sim S^*(\omega)$$

Změna měřítka

$$s(t/a) \sim a.S(a\omega), \text{ kde } a > 0$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE
VLASTNOSTI

Translace funkce

$$s(t-\tau) \sim S(\omega).e^{-i\omega\tau}$$

Transpozice spektra

$$S(\omega-\Omega) \sim s(t).e^{i\Omega t}$$

Konvoluce funkcí

! SHRNUTÍ !

! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- **spojitá periodická funkce** má **diskrétní** frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- **spojitá neperiodická funkce** má **spojité** frekvenční spektrum– pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT PROČ !