5. cvičení z LA II - Skalární součin a eukleidovská geometrie, 2023

Příklad. 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gram-mův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$V = [(1,2,-1,-3,3),\ (1,-2,3,1,-1)]\,.$$

Příklad. 3. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2,11,-3,-4,7)$ do podprostoru V a jeho ortogonálního doplňku $V^{\perp}$ z předchozího příkladu.

Příklad. 4. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a nadrovinu ρ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je kolmou projekcí do nadroviny ρ. (Předpokládáme, že $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0,0,\ldots,0)$.)

Příklad. 5. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^4$ spočítejte vzdálenost bodu $A = [3,3,1,5]$ od roviny

$$\rho:\ x_1 - x_3 = -2, \quad x_2 + x_4 = 6.$$

Navíc najděte bod $R \in \rho$ takový, že $\operatorname{dist}(A,\rho) = ||A - R||$.
Řešení. $R = [1,2,3,4]$, $\operatorname{dist}(A,\rho) = \sqrt{10}$. □

Příklad. 7. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost bodu $A = [4,1,-4,-5]$ od roviny

$$\rho:\ [3,-2,1,5] + t(2,3,-2,-2) + s(4,1,3,2).$$

Současně najděte bod $M \in \rho$ takový, že $\|M - A\| = (A,\rho)$.

Příklad. 8. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p:\ [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4), \qquad \rho:\ [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\|M - N\| = (p, \rho)$.

Příklad. 9. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost rovin σ a τ a body, v nichž se realizuje.

$$\begin{aligned}\sigma &: [4, 5, 3, 2] + s(1, 2, 2, 2) + t(2, 0, 2, 1),\\ \tau &: [1, -2, 1, -3] + p(2, -2, 1, 2) + q(1, -2, 0, -1).\end{aligned}$$

Příklad. 10. Určete odchylku přímky $p: \ [1, 2, 3, 4] + t(-3, 15, 1, -5)$ od roviny

$$\rho: \ [0, 0, 0, 0] + r(1, -5, -2, 10) + s(1, 8, -2, -16).$$

Příklad. 11. V $\mathbb{R}^4$ určete odchylku rovin τ a σ.

$$\begin{aligned}\sigma &: [2, 1, 0, 1] + s(1, 1, 1, 1) + t(1, -1, 1 - 1),\\ \tau &: [1, 0, 1, 1] + p(2, 2, 1, 0) + q(1, -2, 2, 0).\end{aligned}$$

Příklad. 12. V $\mathbb{R}^5$ spočítejte odchylku roviny ρ a nadroviny Γ.

$$\begin{aligned}\rho &: s(1, -1, 1, 1, 3) + t(1, -3, -3, -3, -9),\\ \Gamma &: x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0.\end{aligned}$$

Další příklady na procvičení

Příklad. 1. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 6, úloha 1d.]
Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$V = [(1, 1, 3, 3, 4), \ (1, 3, -5, -7, -1), \ (1, -1, 5, 7, -3)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

Příklad. 2. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 7, úloha 1]
V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru $u = (1, 2, 3, 4, 5)$ do vektorových podprostorů

$$\begin{aligned}V &= [(3, 3, 2, 1, 3), \ (5, 1, 4, -1, 1)]\\ W &= [(1, -3, 4, -2, 2), \ (1, 5, -8, -2, 4), \ (1, -9, 16, 4, -4)]\end{aligned}$$

Ve druhém případě spočtěte prvně ortogonální doplněk $W^\perp$ a kolmou projekci vektoru u do $W^\perp$.

Příklad. 3. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na přímku p procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, -2, 1)$. Najděte matici B tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Bx = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$