6. cvičení z LA II - Eukleidovská geometrie I a vlastní čísla, 2023

Příklad. 1. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p: \ [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4), \quad \rho: \ [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\|M - N\| = (p, \rho)$.

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost rovin σ a τ a body, v nichž se realizuje.

$$\sigma : [4,5,3,2] + s(1,2,2,2) + t(2,0,2,1),$$
$$\tau : [1,-2,1,-3] + p(2,-2,1,2) + q(1,-2,0,-1).$$

Příklad. 3. Určete odchylku přímky $p: \ [1,2,3,4] + t(-3,15,1,-5)$ od roviny

$$\rho: \ [0,0,0,0] + r(1,-5,-2,10) + s(1,8,-2,-16).$$

Příklad. 4. V $\mathbb{R}^4$ určete odchylku rovin τ a σ.

$$\sigma : [2,1,0,1] + s(1,1,1,1) + t(1,-1,1-1),$$
$$\tau : [1,0,1,1] + p(2,2,1,0) + q(1,-2,2,0).$$

Příklad. 5. V $\mathbb{R}^5$ spočítejte odchylku roviny ρ a nadroviny Γ.

$$\rho : s(1,-1,1,1,3) + t(1,-3,-3,-3,-9),$$
$$\Gamma : x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0.$$

Příklad. 6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení φ v této bázi.

Příklad. 7. Najděte vlastní čísla a vlastní podprostory lineárního zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení ψ v této bázi.

Příklad. 8. Najděte vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost u lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bázi vlastních podprostorů doplňte na bázi α celého prostoru $\mathbb{R}^4$ a napište matici zobrazení φ v této bázi.

Příklad. 9. Pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte, které z následujících matic jsou podobné diagonální matici nad $\mathbb{R}$ a které nad $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$