

8. cvičení – Ortogonální operátory, 2024

Příklad 1. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky $x_1 - 2x_2 = 0$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Jaká jsou vlastní čísla zobrazení φ a čemu se rovná $\det B$?

Příklad 2. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. A je ortogonální matice, $\det A = -1$, vlastní vektor k -1 je $(1, 1, 2)$, zobrazení je symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. \square

Příklad 3. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. B je ortogonální matice, $\det B = 1$, vlastní vektor k 1 je $(1, 1, 1)$, zobrazení je otočení kolem osy $(1, 1, 1)$ o úhel $\pi/3$ od vektoru $(1, -1, 0)$ k vektoru $(1, 0, -1)$. \square

Příklad 4. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. C je ortogonální matice, $\det C = -1$, vlastní vektor k -1 je $(1, 1, 1)$, zobrazení je složení symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ a otočení o úhel $2\pi/3$ od vektoru $(1, -1, 0)$ k vektoru $(-1, 0, 1)$. \square

Příklad 5. Necht' $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

převádějící vektor $(0, 0, 2)^T$ na vektor $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Další úlohy

Příklad 1. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 10, úloha 1a.]
Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Gx$, kde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Fx$, kde

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 10, úloha 2b.]
Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 = 0$$

převádějící vektor $(2, 0, 0)^T$ na vektor $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad 4. Necht' $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Najděte matici C tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Cx$.