

## 10. cvičení Samoadjungované operátory, 2024

**Příklad 1.** Uvažujme samoadjungovaný lineární operátor  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x) = Ax$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla tohoto operátoru a ortonormální bázi v  $\mathbb{R}^3$ , která je tvořena vlastními vektory operátoru  $\varphi$ . Napište podobnost mezi maticí  $A$  a diagonální maticí s vlastními čísly na diagonále.

**Příklad 2.** Uvažujme kvadratickou formu  $f$  zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma  $f$  diagonální tvar. Ten rovněž napište.

**Příklad 3.** Uvažujme kvadratickou formu  $g$  zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$g(x) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma  $g$  diagonální tvar. Ten rovněž napište.

**Příklad 4.** V souřadnicích standardní báze napište matici kolmé projekce  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  na rovinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ukažte, že  $P$  je samoadjungovaný operátor.

**Příklad 5.** Ukažte, že:

- (1) Regulární matice tvaru  $n \times n$  s prvky v  $\mathbb{R}$  nebo v  $\mathbb{C}$  s operací násobení matic tvoří grupu. Tyto grupy označujeme  $GL(n, \mathbb{R})$ , resp.  $GL(n, \mathbb{C})$ .
- (2) Množina ortogonálních matic tvaru  $n \times n$  tvoří podgrupu grupy  $GL(n, \mathbb{R})$ . Označujeme ji  $O(n)$ .
- (3) Regulární reálné symetrické matice tvaru  $n \times n$  netvoří podgrupu v grupě  $GL(n, \mathbb{R})$ .

*Poznámka.* Někteří studenti se s pojmem grupy ještě nesešli, je potřeba říci, co to je.

### Další úlohy

**Příklad 1.** [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 11, úloha 2.]

V souřadnicích standardní báze napište matici kolmé projekce  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  na rovinu

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0.$$

Ukažte, že  $P$  je samoadjungovaný operátor.

**Příklad. 2.** [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 11, úloha 3b.]  
Uvažujme kvadratickou formu  $g$  zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$g(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma  $g$  diagonální tvar. Ten rovněž napište.