13. cvičení, Jordanův kanonický tvar II, jaro 2024

Verze z 20.6. 2024 s několika opravami ve výsledcích.

Příklad. 1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}AP$.

Řešení. Výpočet charakteristického polynomuje je pracnější. Můžete řádkovými úpravami dostat 0 na pozicích A_{31} a A_{41} a udělat Laplaceův rozvoj. Vyjde $(\lambda - 3)(\lambda - 4)^3$. Vlastní vektor k 3 je $u = (1, 1, 1, 1)^T$, vlastní vektor k 4 je $v = (1, 0, 2, 0)^T$. Proto

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řetězec délky tři k vlastnímu vektoru 4 je v, $w = (1, 1, 0, 2)^T$, $z = (1, 0, 1, 0)^T$. Matice P má ve sloupcích vektory u, v, w, z. □

Příklad. 2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}GQ$.

Řešení. Výpočet charakteristického polynomuje je pracnější. Od 1. sloupce odečteme a 4 sloupec a uděláme Laplaceův rozvoj podle 1. slouce. Char. polynom vyjde $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$. Vlastní vektor k 1 je $u = (3, 6, 7, 1)^T$, vlastní vektory k 2 jsou $a(1, 1, 1, 0)^T + b(-1, 0, 0, 1)^T$. Proto

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řetězec délky 2 k vlastnímu vektoru 2 začíná vlastním vektorem pro $b = 0$, tedy $v = (1, 1, 1, 0)^T$, a pokračuje vektorem $w = (-2, -1, 0, 0)^T$. Hledanou bázi vytvořííme z vektorů $u, v.w, z = (-1, 0, 0, 1)^T$. Tyto vektory určují sloupce matice Q. □

Příklad. 3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}KR$.

Řešení. Char. polynom je $(\lambda - 1)^4$. Vlastní vektory k 1 jsou $a(1,1,0,0)^T + b(0,0,1,1)^T$. Proto JKT má dvě buňky, jsou dvě možnosti. Rovnice $(K - E) = u$ má řešení pro každý vlastní vektor. Proto je každý vlastní vektor začátkem nějakého řetězce délky 2. Proto musí být

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledanou bázi vytvoříme z řetězců $u_1 = (1,1,0,0,)^T, u_2 = (0,0,0,1)^T$ a $v_1 = (0,0,1,1)^T, v_2 = (0,1,1,0)$. Tyto vektory určují sloupce matice R. □

Příklad. 4. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}NP$.

Návod. Využijte toho, že charakteristický polynom je $(1 - \lambda)^4$. □

Řešení. Char. polynom je $(\lambda - 1)^4$. Vlastní vektory k 1 jsou $a(0,1,0,1)^T + b(-2,0,3,0)^T$. Proto JKT má dvě buňky, jsou opět dvě možnosti. Tentokrát má rovnice $(K - E) = u$ řešení pouze pro vlastní vektory s $a + 6b = 0$. Proto nemohou existovat dva lineárně nezávislé řetězce délky 2. Tedy musí být

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řetězec délky 3 hledejme pro vlastní vektor s $a = 6$, $b = -1$, $u_1 = (2,6,-3,6)^T$. Řešení rovnice $(N-E)x = u_1$ je $x = (-1,1,1,0)^T + (-2\beta, \alpha, 3\beta.\alpha)^T$. Řešení rovnice $(N-E)y = x$ existuje pro $3 + \alpha + 6\beta = 0$. Volíme tedy $\alpha = -3$, $\beta = 0$. Dostáváme řetězec délky tři $u_1 = (2,6,-3,6,)^T, u_2 = (-1,-2,1,-3)^T, u_3 = (-1,0,1,0)^T$. K nim do báze doplníme $v_1 = (0,1,0,1)^T$. Tyto vektory určují sloupce matice P. □

Příklad. 5. Pomocí Jordanova kanonického tvaru najděte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Návod. Matice $A = PJP^{-1}$, kde

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy je

$$x(t) = \mathrm{e}^{3t}\, P \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

Další úlohy na procvičení

Příklad. 1. [Kaďourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 3]
Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}CR$. Nápověda: Vlastní číslo 3 algebraické násobnosti 4.

Příklad. 2. [Kaďourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 2]
Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}BQ$. Nápověda: Vlastní číslo 3 algebraické násobnosti 1 a vlastní číslo 1 algebbraické násobnosti 3 .

Příklad. 3. [Kaďourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 4]
Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici S takovou, že $J = S^{-1}DS$. Nápověda: Vlastní číslo -1 algebraické násobnosti 4.

Příklad. 4. [Kaďourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 5]
Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici T takovou, že $J = T^{-1}FT$. Nápověda: Vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4.

Příklad. 5. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$L = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}LP$.