Dynamické systémy
Druhé cvičení

Příklad 1: Nalezněte trajektorie pro následující systémy:

a)
$$x' = y(1 + x + y)$$
$$y' = -x(1 + x + y)$$

b)
$$x' = y + x^2 y$$
$$y' = 3x + xy^2$$

c)
$$x' = 2xy$$
$$y' = x^2 - y^2$$

Příklad 2: Načrtněte nulkliny a trajektorie pro systémy

a)
$$x' = x + y$$
$$y' = 2x + 2y$$

b)
$$x' = x + y$$
$$y' = -x - y$$

Příklad 3: Dokažte, že každé řešení systému

$$x' = x^2 + y \sin x$$
$$y' = -1 + xy + \cos y,$$

které má počáteční podmínku v prvním kvadrantu, v něm i zůstane (pro $t \to \pm\infty$).

Příklad 4: Dokažte, že každé řešení systému

$$x' = 1 + x^2 + y^2$$
$$y' = xy + \operatorname{tg} y,$$

které začíná v horní polorovině ($y > 0$), v ní i zůstane.

Příklad 5: Dokažte, že každé řešení systému

$$x' = -1 - y + x^2$$
$$y' = x + xy,$$

které začíná uvnitř jednotkového kruhu $x^2 + y^2 = 1$, v něm i zůstane.

Příklad 6: Dokažte, že každé řešení rovnice $z'' + z + z^3 = 0$ je periodické.

Příklad 7: Dokažte, že každé řešení rovnice $z'' + z - 2z^3 = 0$ je periodické, jestliže

$$(z')^2(0) + z^2(0) - z^4(0) < \frac{1}{4}.$$