Autonomní systémy

Zvláštnosti nelineárních systémů

Petr Liška

Masarykova univerzita

07.03.2025

Nulová reálná čast je opravdu problém

Dva podobné, ale různé systémy

Dokažte, že nulová řešení následujících systému mají různou stabilitu:

$$
\begin{aligned}
x' &= y - x(x^2 + y^2) \\
y' &= -x - y(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x' &= y + x(x^2 + y^2) \\
y' &= -x + y(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

Existence „zvláštního“ cyklu

Limitní cykl

Ukažte, že následující systém má jako trajektorii alespoň jeden cyklus

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$
$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

V čem se liší systém

$$x' = -y(1 - x^2 - y^2)^2 + x(1 - x^2 - y^2)^3 - y^3$$
$$y' = x(1 - x^2 - y^2)^2 + y(1 - x^2 - y^2)^3 + xy^2,$$

který „numericky“ vypadá „stejně“?

Uvažme opět náš systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Definice ((Asymptoticky) stabilní cykly)

Cyklus C_ω rovnice (1) se nazývá stabilní, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subseteq \mathbb{R}^n$, která obsahuje C_ω, existuje otevřená množina $W \subseteq V$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in W$ v čase nula, zůstane v množině V pro všechna $t \geq 0$.
Cyklus C_ω se nazývá asymptoticky stabilní, jestliže navíc existuje množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in X$, se asymptoticky blíží k C_ω pro $t \to \infty$.

Jak poznat, že cyklus neexistuje?

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

Věta (Dulacovo kritérium, Bendixson-Dulac)

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce $\phi(x,y)$ taková, že výraz

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x,y)f(x,y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(x,y)g(x,y)\right]$$

nemění znaménko v Ω a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny Ω, pak v Ω neexistuje uzavřená trajektorie systému (2).

Dulac, H., *Points singuliers des équations différentielles*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 61, Paris : Gauthier-Villar, 1934.

Důsledek (Bendixsonovo kritérium)

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Nemění-li výraz

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$$

znaménko v Ω a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny Ω, pak v Ω neexistuje uzavřená trajektorie systému (2).

Bendixson, I., *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica 24(1), 1901, 1–88.

Příklad

Ukažte, že daný systém nemá žádné uzavřené trajektorie

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - y + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Jednoduché rozšíření

Věta

Nechť Ω *je otevřená souvislá oblast ve fázovém prostoru. Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce* $\phi(x, y)$ *taková, že výraz*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x, y) f(x, y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(x, y) g(x, y)\right] \neq 0 \quad \textit{pro} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Má-li Ω^C *(doplněk* Ω*)* k *komponent, potom* (2) *má nejvýše* k *cyklů v* Ω.

Příklad

Ukažte, že van der Polova rovnice

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

má nejvýše jeden limitní cyklus pro $\varepsilon \neq 0$.