

Pokročilé numerické metody II

1. přednáška

Základní pojmy

Jednokrokové metody

Eulerovy metody

Jiří Zelinka

- Rektorys, K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. Vyd. 6., opr. české 2. Praha: Academia, 1999. 602 s. ISBN 8020007148.
- Vitásek, E.: Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic. 1. vyd. Praha: Academia, 1994. 409 s. ISBN 8020002812.
- Ralston, A.: Základy numerické matematiky. Translated by Milan Práger - Emil Vitásek. 2. čes. vyd. Praha: Academia, 1978.
- Mathews, J.H., Fink, K.D.: Numerical methods using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2003
- Stoer, J., Bulirsch R.: Introduction to Numerical Analysis, Springer, 1992
- Butcher, J.C.: Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Wiley, 2008

- 1 Obyčejné diferenciální rovnice
 - jedнокrokové metody
 - vícečrokové metody
 - okrajové úlohy
 - metoda střelby
 - diferenční metody
- 2 Variační metody (ODR i PDR)
- 3 Diferenční metody pro PDR
 - eliptické rovnice
 - časově závislé rovnice

Následující část je převzata z 6. kapitoly výukových materiálů
Numerické metody Jaromíra Kubena a Pavlíny Račkové,
Univerzita obrany.

Kapitola 6

Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni vysvětlit:

- co je to obyčejná diferenciální rovnice (ODR) prvního řádu v implicitním resp. explicitním tvaru a co je její řešení,
- jak vypadá Cauchyova počáteční úloha pro ODR prvního řádu,
- proč je nutné hledat řešení počáteční úlohy numericky a jaký je princip numerického řešení,

- jaký je rozdíl mezi jednokrokovými a vícekrokovými metodami,
- jaký je obecný tvar jednokrokové explicitní a implicitní metody,
- co je to lokální a globální chyba, řád, konvergence a A-stabilita jednokrokové metody,
- co jsou to metody Rungeho-Kutty a jaký je jejich princip,
- jaký je obecný tvar lineární vícekrokové explicitní a implicitní metody,
- co je to lokální a globální chyba, řád, konvergence a A-stabilita lineární vícekrokové metody,
- co jsou Adamsovy-Bashforthovy a Adamsovy-Moultonovy metody a metody zpětného derivování a jaký je princip jejich odvození,
- co jsou metody prediktor-korektor,
- čemu se říká tuhé problémy a na co je nutné dbát při jejich řešení,
- jak se výsledky pro jednu ODR prvního řádu přenesou na soustavy ODR prvního řádu,
- jak přepíšeme jednu ODR vyššího řádu na soustavu ODR prvního řádu.

Jde o jednu z nejdůležitějších úloh numerické matematiky, protože diferenciální rovnice patří k nejvýznamnějším matematickým modelům reálných problémů. Přitom pouze malá část obyčejných diferenciálních rovnic má řešení, které lze vyjádřit v uzavřeném tvaru, tj. pomocí elementárních funkcí.

6.1 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

6.1.1 Základní vlastnosti obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

Připomeneme si základní poznatky z tzv. *kvalitativní teorie* obyčejných diferenciálních rovnic. Podrobněji viz [34].

- Rovnice $F(x, y, y') = 0$ se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu v implicitním tvaru* s neznámou funkcí $y(x)$ nezávisle proměnné x . Příkladem takové rovnice je

$$\ln(x^2 - yy' + y^2) - (y')^3 + x \sin(xy y') - \sqrt{y - y'} = 0.$$

- Pro vyšetřování rovnic je důležitý případ, kdy se dá osamostatnit první derivace y' , tj. rovnice má tvar

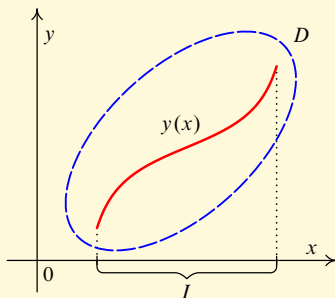
$$y' = f(x, y). \quad (6.1)$$

O takové rovnici říkáme, že je v *explicitním tvaru*. O funkci $f(x, y)$ předpokládáme, že je definována na nějaké otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^2$.

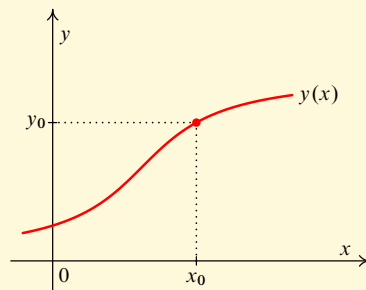
Příklady takových rovnic jsou

$$y' = x^2 + y^2, \quad y' = \frac{y}{x}, \quad y' = y^2, \quad y' = \sin xy, \quad y' = \sqrt{x^2 - y^2} \quad \text{apod.}$$

- *Řešením* je funkce $y(x)$ definovaná na *intervalu* I , která splňuje rovnici (6.1). Musí tedy platit, že $[x, y(x)] \in D$ pro $x \in I$ (jinými slovy, graf funkce $y(x)$ leží v množině D — viz obr. 6.1 a)) a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro každé $x \in I$.
- V každém bodě $[x, y(x)]$ grafu řešení tedy platí, že tečna ke grafu v tomto bodě má směrnici rovnou číslu $f(x, y(x))$. Protože funkci $f(x, y)$ známe, můžeme sestavit (teoreticky) v každém bodě $[x, y]$ vázaný vektor, jehož směrnice je $f(x, y)$. Graf řešení se musí v každém bodě, kterým prochází, dotýkat tohoto vektoru. Tyto vektory tvoří *směrové pole* diferenciální rovnice. Na obr. 6.2, 6.3 a 6.4 jsou znázorněna směrová pole



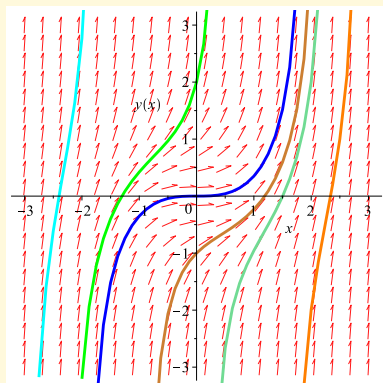
a) Řešení diferenciální rovnice



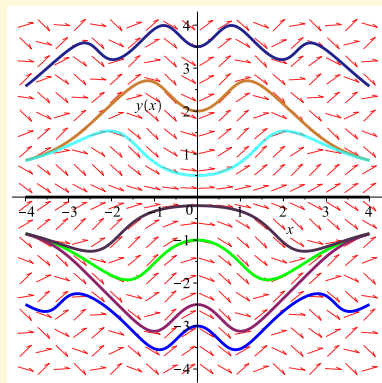
b) Cauchyova počáteční úloha

Obr. 6.1

a několik řešení šesti diferenciálních rovnic. Všimněte si, že u rovnic na obr. 6.3 a) až 6.4 b) není množina D rovna celé rovině \mathbb{R}^2 (určete definiční obory pravých stran těchto rovnic).

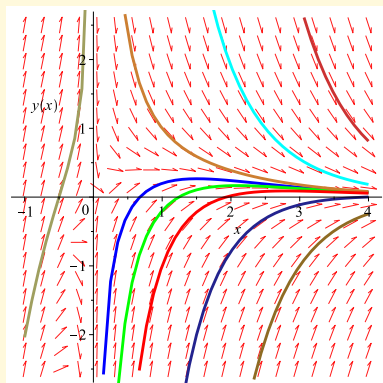


a) $y' = x^2 + y^2$

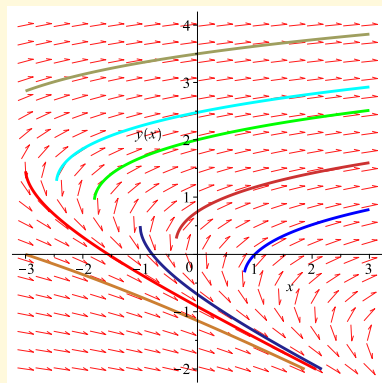


b) $y' = \sin(xy)$

Obr. 6.2: Směrová pole a řešení diferenciálních rovnic — část 1

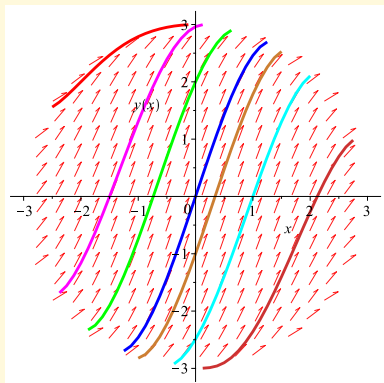


a) $y' = 2e^{-x} - (1 + 1/x)y$

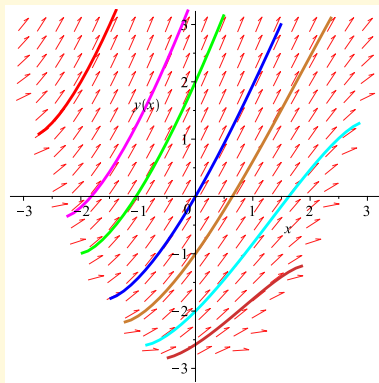


b) $y' = 1/(x + 2y)$

Obr. 6.3: Směrová pole a řešení diferenciálních rovnic — část 2



$$\text{a) } y' = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$



$$\text{b) } y' = \sqrt{y - x^2/2 + 3}$$

Obr. 6.4: Směrová pole a řešení diferenciálních rovnic — část 3

- Rovnice $y' = f(x, y)$ má obvykle nekonečně mnoho řešení. Hledáme tedy řešení, které splňuje nějakou dodatečnou podmínku. Tato podmínka by měla jednoznačně určit jediné řešení.

My budeme hledat řešení, jehož graf prochází zadaným bodem $[x_0, y_0]$. Chceme tedy, aby platila tzv. *počáteční podmínka* $y(x_0) = y_0$ — viz obr. 6.1 b). Úloha, kterou budeme řešit, má tudíž tvar

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

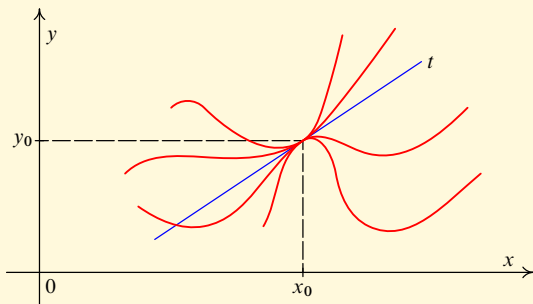
Říká se jí obvykle *Cauchyova počáteční úloha*.

- Připomeňme si, jaké vlastnosti funkce $f(x, y)$ zaručují, že Cauchyova počáteční úloha (6.2) má řešení a že toto řešení je jediné.

1) Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic je známo, že *spojitost funkce* $f(x, y)$ zaručuje existenci řešení počáteční úlohy.

Toto řešení ale nemusí být jediné. Pak říkáme, že v bodě $[x_0, y_0]$ je porušena jednoznačnost. Protože všechna řešení počáteční úlohy (6.2) musí mít v bodě $[x_0, y_0]$

společnou tečnu t , musí dojít k jakémusi „rozvětvení“ — viz obr. 6.5. Numerické hledání řešení je pak velmi problematické.



Obr. 6.5: Porušení jednoznačnosti v bodě $[x_0, y_0]$

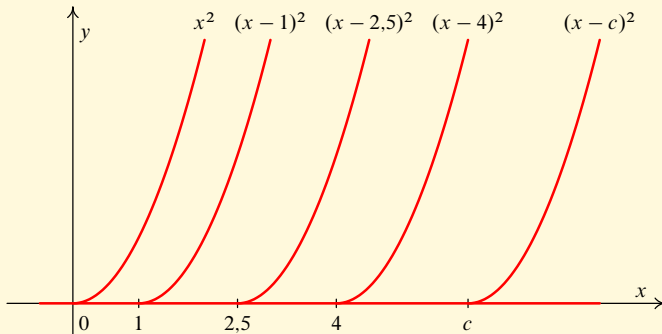
Např. počáteční úloha $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, má spojitou pravou stranu $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ v množině $D = \mathbb{R}^2$. Uvedená úloha má ale nekonečně mnoho řešení.

Jedním je nulová funkce $y(x) \equiv 0$, dalšími řešeními jsou funkce

$$y_c = \begin{cases} (x - c)^2, & x \geq c, \\ 0, & x < c, \end{cases}$$

kde $c \in \mathbb{R}_0^+$ je libovolné číslo. Řešení jsou znázorněna na obr. 6.6. Že jde opravdu o řešení, se snadno ověří dosazením do rovnice.

- 2) Standardní vlastností, která zaručuje, že počáteční úloha (6.2) má jediné řešení, je *Lipschitzova podmínka* (existuje konstanta $L > 0$ taková, že je v množině D splněna nerovnost $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$; stačí, aby tato vlastnost platila lokálně). K platnosti této podmínky stačí, aby v okolí bodu $[x_0, y_0]$ byla *spojitá parciální derivace* $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$. Tuto podmínku rovnice, se kterými se v aplikacích setkáváme, většinou splňují.

Obr. 6.6: Řešení úlohy $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$

Systémy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), & y_1(x_0) &= y_{10} \\y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), & y_2(x_0) &= y_{20} \\&\vdots \\y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= y_{n0}\end{aligned}$$

Zápis jednou rovnicí

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0,$$

Y, F jsou vektory.

Rovnice vyšších řádů

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

jsou dány počáteční podmínky $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$.

Lze převést na systém DR.

Numerické řešení počátečního problému

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

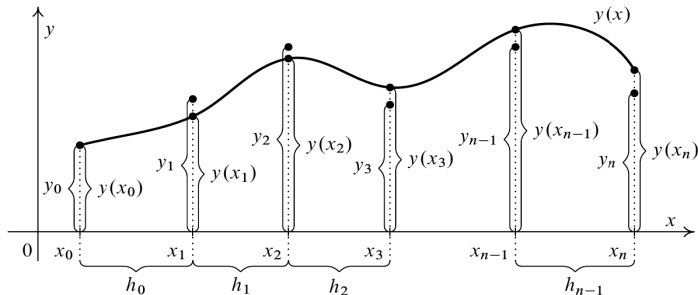
Numerické řešení hledáme v bodech (uzlech)

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

zpravidla používáme ekvidistantní uzly, tj. $h_i = h, \forall i$.

Označení: y_i je hodnota numerického řešení v bodě x_i , tj.

$$y_i \approx y(x_i).$$



Obecná explicitní jednokroková metoda

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(x_i, h, y_i)$$

Funkce Φ se nazývá přírůstková funkce, závisí i na f .

Poznámka: Φ může záviset i na y_{i+1} , pak se jedná **implicitní** metodu.

Lokální diskretizační chyba

Jedná se o chybu metody v jednom kroku, pokud bychom použili přesné hodnoty řešení. Označení: lte_i

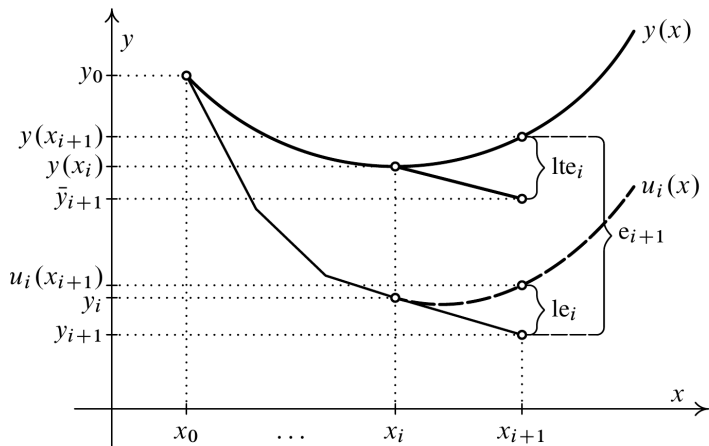
$$lte_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h\Phi(x_i, y(x_i), h, y(x_{i+1}))$$

Lokální chyba

Bodem (x_i, y_i) prochází nějaké řešení u_i diferenciální rovnice, lokální chyba le_i je dána chybou metody pro u_i :

$$le_i = u_i(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Globální chyba $e_i = y(x_i) - y_i$.



Řád a konvergence metody

Číslo p nazýváme **řádem metody**, jestliže lte_i je $O(h^{p+1})$.

Věta

Jestliže $lte_i = O(h^{p+1})$ a funkce Φ je spojitá a lipschitzovská v y , tj. existuje konstanta M , že

$$|\Phi(x, h, \tilde{y}) - \Phi(x, h, \hat{y})| \leq M|\tilde{y} - \hat{y}|,$$

pak $e_i = O(h^p)$.

Lemma: Jestliže pro posloupnost a_0, a_1, \dots platí

$$|a_{i+1}| \leq (1 + \lambda)|a_i| + B, \quad \lambda, B > 0, \quad \text{pak } |a_n| \leq e^{\lambda n}|a_0| + B \frac{e^{\lambda n} - 1}{\lambda}.$$

Metoda se nazývá **konvergentní v bodě** $x (= x_n)$, jestliže pro $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh = x_n - x_0$ platí $y_n \rightarrow y(x)$.

Metoda se nazývá **konvergentní na intervalu** $[a, b]$, (zpravidla $a = x_0$), jestliže je konvergentní $\forall x \in [a, b]$.

Poznámka: konvergence zpravidla plyne z řádu globální chyby.

Explicitní Eulerova metoda

Taylorův rozvoj:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + O(h^2) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2),$$

tedy

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + O(h^2).$$

Zanedbáním chybového členu a použitím přibližných hodnot dostaneme **Eulerovu explicitní metodu**:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Současně vidíme, že $l_{te_i} = O(h^2)$, takže metoda je řádu 1.

Dá se ukázat, že i $l_{e_i} = O(h^2)$ a $l_{te_i} - l_{e_i} = O(h^3)$.

Dále je $\Phi(x, h, y) = f(x, y)$, takže pokud funkce f splňuje předpoklady Picardovy věty o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice, pak globální chyba je $O(h)$ a metoda je konvergentní.

Implicitní Eulerova metoda

Taylorův rozvoj:

$$y(x) = y(x+h) - hy'(x+h) + O(h^2) = \\ = y(x+h) - hf(x+h, y(x+h)) + O(h^2),$$

tedy

$$y(x_i) = y(x_{i+1}) - hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + O(h^2).$$

Zanedbáním chybového členu, převedením na druhou stranu rovnice a použitím přibližných hodnot dostaneme **Eulerovu implicitní metodu**:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Opět platí $lte_i = O(h^2)$, podobně jsou další vlastnosti (řád globální chyby a konvergence metody) stejné jako u explicitní metody.

V každém kroku Eulerovy implicitní metody ovšem musíme řešit nelineární rovnici.

Lichoběžníková metoda

Integrální tvar ODR:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Lichoběžníkové pravidlo pro numerický výpočet integrálu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Chyba lichoběžníkového pravidla je $O(h^3)$, takže i lokální diskretizační chyba pro lichoběžníkovou metodu je $O(h^3)$, tedy metoda je řádu 2 a je konvergentní.

Zkoumáme, co se děje pro konstantní h a $n \rightarrow \infty$.

Pro testovací úlohu $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re(\lambda) < 0$ je řešení $y(x) = e^{\lambda x}$. Pro něj platí $|y(x_{n+1})| < |y(x_n)|$, proto požadujeme aby

$$|y_{n+1}| < |y_n|.$$

Pro obecnou jedнокrokovou metodu a testovací úlohu dostaneme vztah

$$y_{n+1} = R(z)y_n,$$

kde R se nazývá **funkce stability**, $z = \lambda h$. Zajímá nás tedy podmínka $|R(z)| < 1$.

Oblast (absolutní) stability: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$.

Interval stability: reálná část oblasti stability.

Metoda se nazývá **absolutně stabilní** (A–stabilní), pokud Ω obsahuje všechna záporná reálná čísla.

Metoda se nazývá **L–stabilní**, jestliže je A–stabilní a

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = 0.$$

Oblast stability pro explicitní Eulerovu metodu: $|z - (-1)| < 1$.

Implicitní Eulerova metoda a lichoběžníková metoda jsou absolutně stabilní, implicitní Eulerova metoda je dokonce L–stabilní.

Iterační řešení implicitní metody

Prediktor – explicitní Eulerova metoda – počáteční iterace:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Korektor – implicitní Eulerova metoda – zpřesňování iterace:

$$y_{i+1}^{(j+1)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(j)})$$

– podobně s lichoběžníkovou metodou

Metoda konverguje pro dostatečně malé h .