Pokročilé numerické metody II
2. přednáška

Metody Taylorova rozvoje
Metody Rungeho-Kutty

Jiří Zelinka

Opakování

Počáteční úloha:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

Explicitní Eulerova metoda:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Implicitní Eulerova metoda:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Lichoběžníková metoda:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Chyby, konvergence

Lokální diskretizační chyba (lte_i): teoretická chyba v i-tém kroku pro přesné hodnoty

Lokální chyba (le_i): chyba v i-tém kroku

Globální chyba (e_i): $y(x_i) - y_i$

Řád metody: p, $lte_i = O(h^{p+1})$

Metoda se nazývá konvergentní v bodě $x(= x_n)$, jestliže pro $h \to 0$, $n \to \infty$, $nh = x_n - x_0$ platí $y_n \to y(x)$.

Eulerovy metody: $lte_i = O(h^2)$, $le_i = O(h^2)$, $lte_i - le_i = O(h^3)$, $e_i = O(h)$, jsou konvergentní (řádu 1)

Lichoběžníková metoda: $lte_i = O(h^3)$, $le_i = O(h^3)$, $e_i = O(h^2)$, je konvergentní (řádu 2)

Stabilita

Zkoumáme, co se děje pro konstantní h a $n \to \infty$.

Pro testovací úlohu $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}(\lambda) < 0$, požadujeme aby $|y_{n+1}| < |y_n|$

Definované pojmy
oblast stability, interval stability, A–stabilní metoda, L–stabilní metoda.

Oblasti stability pro explicitní probrané metody.

Metoda prediktor–korektor: iterační řešení implicitní metody

Prediktor – explicitní Eulerova metoda – počáteční iterace:
$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$

Korektor – implicitní Eulerova metoda – zpřesňování iterace:
$y_{i+1}^{(j+1)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(j)})$

Metody Taylorova rozvoje

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(x) + \cdots + \frac{1}{n!}h^n y^{(n)}(x) + O(h^{n+1})$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) f(x, y(x))$$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

Použití:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2) \\
y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)] + O(h^3) \\
y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)] + \\
&+ \frac{1}{6}h^3[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f](x_i, y_i) + O(h^4)
\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- metoda Taylorova rozvoje stupně n je řádu n.
- výhodou je libovolný dosažitelný řád metody.
- nevýhodou je nutnost počítat parciální derivace pro každou funkci f.
- zpravidla se používá jen pro $f = f(y)$, pak vypadnou všechny členy obsahující f_x.

Metody Rungeho–Kutty (explicitní)

Motivace: prediktor–korektor.

Derivaci $y'(x_i)$ odhadujeme jako kombinaci hodnot směrového pole (hodnoty $f(x,y)$) „poblíž“ (x_i, y_i).

Explicitní metoda Rungeho–Kutty stupně s:

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_s k_s)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + c_2 h, y_i + h a_{21} k_1) \\
k_3 &= f(x_i + c_3 h, y_i + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
&\vdots \\
k_s &= f(x_i + c_s h, y_i + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} k_j)
\end{aligned}$$

Butcherovy tabulky

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

Podmínky řádu ($lte_i = O(h^{p+1})$):

$p = 1$: $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$

$p = 2$: $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$, $\sum_{j=2}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$

$p = 3$: předchozí $+ \sum_{j=2}^{s} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$, $\sum_{j=3}^{s} \sum_{l=2}^{j-1} b_j a_{jl} c_l = \frac{1}{6}$

Další podmínka: $c_j = \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}$, splňují ji všechny používané metody

Vztah mezi stupněm a řádem metody

$p(s)$: maximální dossažitelný řád pro metodu stupně s

$$
\begin{array}{rcll}
p(s) & = & s, & s = 1, \dots, 4 \\
p(5) & = & 4 & \\
p(6) & = & 5 & \\
p(7) & = & 6 & \\
p(8) & = & 6 & \\
p(9) & = & 7 & \\
p(s) & \leq & s - 2, & s \geq 10
\end{array}
$$

Metody druhého stupně (i řádu)

Obecná m. 2. řádu ($ab = 1/2$)

$$\begin{array}{c|cc} a & a & \\ \hline & 1-b & b \end{array}$$

Modifikovaná EM (midpoint EM)

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Ralstonova m. 2. řádu

$$\begin{array}{c|cc} 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Heunova metoda

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$