MIN201 Matematika II – příklady počítané na cvičení (jarní semestr 2025)

1 1. týden – interpolační polynomy

Cvičení konané 18.2. 2025.

Příklad 1.1: Nalezněte největší společný dělitel polynomů

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 6 \quad \text{a} \quad g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 2.$$

Příklad 1.2: [2.B.7] Dokažte vzorec pro *Vandermondův determinant*,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i).$$

Příklad 1.3: [5.A.6 a 5.A.7]

- Nalezněte reálný polynom $P(x)$ co nejnižšího stupně splňující

$$P(2) = 1, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = -1, \quad P(5) = 6.$$

- Nalezněte komplexní polynom $Q(x)$ co nejnižšího stupně splňující

$$Q(1+i) = i, \quad Q(2) = 1, \quad Q(3) = -i.$$

Příklad 1.4: [5.A.9] Nalezněte reálný polynom $P(x)$ co nejnižšího stupně splňující

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

Příklad 1.5: [5.A.14] Nalezněte přirozený splajn $S(x)$, který splňuje podmínky

$$S(-1) = 0, \quad S(0) = 1, \quad S(1) = 0.$$

2 2. týden – limity posloupností

Cvičení konané 8. 3. 2025.

Příklad 2.1: [5.36] Určete limity následujících posloupností:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n+1}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+1}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2+3n+1}$,

(iv) $\lim_{n\to-\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}$,

(v) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}}{n+1}$,

(vi) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+n} - 2n$.

Příklad 2.2: [5.37 a 5.38]

(i) Nechť $c \in \mathbb{R}_+$ je kladné reálné číslo. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

(ii) Určete $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Příklad 2.3: [5.41] Určete limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 11n^2 + 2} + \sqrt[5]{n^7 - 2n^5 - n^3} - n + \sin^2 n}{2 - \sqrt{3}5n^4 + 2n^3 + 5}.$$

Příklad 2.4: Určete následující limity:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-2)^{n+1}}{3^{n-2}-2^{2n-1}}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} (1+\sin n)^n$.

3 3. týden – limity funkcí a derivace

Cvičení konané 15. 3. 2025.

Příklad 3.1: [5.47] Určete limity následujících funkcí:

(i) $\lim_{x\to\pi/3}\sin x$,

(ii) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$,

(iii) $\lim_{x\to\infty}\left(\arccos\frac{1}{x+1}\right)^3$,

(iv) $\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x}$, $\quad\lim_{x\to-\infty}\arctan x^4$, $\quad\lim_{x\to-\infty}\arctan(\sin x)$.

Příklad 3.2: [5.56] Určete limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\sin^2 x}.$$

Příklad 3.3: Ukažte, že $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Příklad 3.4: [5.49] Určete limity následujících funkcí:

(i) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$,

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$,

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$,

(iv) $\lim_{x\to 0}e^{1/x}$.

Příklad 3.5: [Část 5.57] S využitím

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^n=e^a$$

určete následující limity:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^n,\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)^n,\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Příklad 3.6: [5.61] Dodefinujte funkci

$$f(x)=(x^2-1)\sin\frac{2x-1}{x^2-1},\qquad x\neq\pm1$$

tak, aby byla spojitá ve všech bodech $x\in\mathbb{R}$.

Příklad 3.7: [5.74] Zderivujte a upravte

(i) $x \sin x$,

(ii) $\frac{\sin x}{x}$,

(iii) $\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$, $a \neq 0$, $|x| \geq |a|$,

(iv) $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$,

(v) x^x.

Příklad 3.8: [5.82] Určete parametr $c \in \mathbb{R}$ tak, aby tečna ke grafu funkce $\frac{\ln(cx)}{\sqrt{x}}$ v bodě $[1, 0]$ procházela bodem $[2, 2]$.

Příklad 3.9: Ověřte, že elementární Hermiteovy polynomy pro interpolaci v bodech $x_1, \dots, x_n$ s předepsanými hodnotami a prvními derivacemi v těchto bodech jsou dány vztahy

$$
\begin{aligned}
h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{\ell''(x_i)}{\ell'(x_i)}(x - x_i)\right](\ell_i(x))^2, \\
h_i^2(x) &= (x - x_i)\ell_i(x),
\end{aligned}
$$

kde $\ell(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ a $\ell_i(x)$ jsou elementární Lagrangeovy interpolační polynomy. Teda je třeba ověřit

$$
h_i^1(x_j) = \delta_i^j, \quad (h_i^1)'(x_j) = 0, \quad h_i^2(x_j) = 0, \quad (h_i^2)'(x_j) = \delta_i^j.
$$

Příklad 3.10: [5.93] Určete x-ovou souřadnici bodu x_A na parabole $y = x^2$, který je nejblíž bodu $A = [1, 2]$.

4 4. týden – L'Hospitalovo pravidlo

Cvičení konané 22. 3. 2025.

Příklad 4.1: [5.97] Spočtěte limity

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$,

(ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$,

(iii) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,

(iv) $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(x - 1)$,

(v) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Příklad 4.2: [5.102, 5.104. 5.106] Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n}.$$

5 5. týden – Nekonečné řady a mocninné řady

Cvičení konané 29. 3. 2025.

Příklad 5.1: [5.102] Určete součet řad:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^{2n-1}}+\frac{2}{4^{2n}}\right)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$,

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

Příklad 5.2: [5.107, 5.106, odjinud] Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$,

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Příklad 5.3: [5.108, 5.109] Vyšetřete konvergenci mocninných řad

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}x^n$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-4n)^n x^n$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(2+(-1)^n)^n}x^n$.

6 6. týden – Taylorův rozvoj, průběh funkce

Cvičení konané 12. 4. 2025.

Příklad 6.1: [6.12, 6.14]

(i) Určete Taylorův rozvoj T_1^3 v bodě 1 pro funkci $\frac{e^x}{x}$.

(ii) Funkci $\ln(x+1)$ rozviňte do mocninné řady v bodech 0 a 1 a určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které tyto řady konvergují.

Příklad 6.2: [6.30, 6.36]

(i) Určete obor hodnot funkce $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

(ii) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{|x|^3+1}$.

7 7. týden – Integrování I.

Cvičení konané 19. 4. 2025.

Příklad 7.1: [6.39, 6.40] Spočtěte integrály:

(i) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, $x \neq 0$,

(ii) $\int \tan^2 x\,dx$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

(iii) $\int \left(6\sin 5x + \cos\frac{x}{2} + 2e^{\frac{2x}{3}}\right)dx$,

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $x \in (-2, 2)$,

(v) $\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$.

Příklad 7.2: [6.42, 6.43] Spočtěte integrály metodou per partes:

(i) $\int (x^2+1)e^{-x}\,dx$,

(ii) $\int \arctan x\,dx$,

(iii) $\int e^x \sin x\,dx$.

Příklad 7.3: [6.44, 6.45] Spočtěte integrály substituční metodou:

(i) $\int \cos^5 x \sin x \, dx$,

(ii) $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$,

(iii) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \, dx$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

(iv) $\int \frac{(7+\ln x)^7}{x} \, dx$, $x > 0$.

8 8. týden – Integrování II.

Cvičení konané 26. 4. 2025.

Příklad 8.1: [6.51, 6.52] Spočtěte integrály:

(i) $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} \, dx$, $x \neq 1$,

(ii) $\int \frac{30x-77}{x^2-6x+13} \, dx$.

Příklad 8.2: [6.55] Spočtěte integrály:

(i) $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx$,

(ii) $\int \frac{5 \ln x}{x \ln^3 x + x \ln^2 x - 2x} \, dx$.

Příklad 8.3: [6.59] Spočtěte určité integrály:

(i) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$,

(ii) $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$.

Příklad 8.4: [6.63, 6.64] Určete nevlastní integrály:

(i) $\int_1^\infty \sin x \, dx$,

(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4+x^2} \, dx$,

(iii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}, dx$,

(iv) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^5} \, dx$,

(v) $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} \, dx$

9 9. týden – Aplikace integrálu

Cvičení konané 3. 5. 2025.

Příklad 9.1: [6.69] Určete délku křivky dané parametricky:

$$x = t^2, \qquad y = t^3,$$

kde $t \in [0, \sqrt{5}]$.

Příklad 9.2: [6.70, 6.72]

(i) Určete plochu ležící napravo od přímky $x = 3$ a dále ohraničenou grafem funkce $y = \frac{1}{x^3-1}$ a osou x.

(ii) Určete obsah S obrazce složeného ze dvou vymezených přímkami $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$, osou x a grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Příklad 9.3: [6.76] Hyperbolu $xy = 1$ pro $x \geq a > 0$ rotujeme kolem osy x. Ukažte, že toto těleso má konečný objem a nekonečný obsah.

Příklad 9.4: [6.77, 6.82]

(i) Rozhodněte konvergenci/divergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(ii) Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ použitím vztahu $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$.

10 10. týden – Diferenciální rovnice

Cvičení konané 10. 5. 2025.

Příklad 10.1: [6.83] Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Určete

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx.$$

Příklad 10.2: [8.118, 8.121]

(i) Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\cos^2 x}(1+\cos^2 x).$$

(ii) Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2+1}{x+1},$$

pro které je $y(0) = 1$.

Příklad 10.3: [7.1] V prostoru reálných funkcí na intervalu $[1, 2]$ je dán vektorový podprostor $\langle x^2, 1/x\rangle$.

(i) Doplňte funkci $1/x$ na jeho ortogonální bázi.

(ii) Určete kolmou projekci funkce x na tento podprostor.

(iii) Spočtěte vzdálenost funkce x od tohoto podprostoru.

11 11. týden – Diferenciální rovnice

Cvičení konané 17. 5. 2025.

Příklad 11.1: [7.5, 7.6] Najděte Fourierovu řadu pro

(i) $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$ pro $x \in [-\pi, \pi]$,

(ii) periodické prodloužení funkce $g(x) = 0$ pro $x \in [-\pi, 0)$ a $g(x) = \sin x$ pro $x \in (0, \pi]$,

(iii) periodické prodloužení funkce $g(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi)$.

Příklad 11.2: [7.9] Určete kosinovou Fourierovu řadu pro periodické prodloužení funkce

$$g(x) = 1,\ x \in [0, 1], \qquad g(x) = 0,\ x \in [1, 4).$$

12 12. týden – Metrické prostory, konvoluce

Cvičení konané 24. 5. 2025.

Příklad 12.1: [7.22] Nechť je

$$d(x,y) = \frac{|x+y|}{1+|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že d je metrika na $\mathbb{R}$.

Příklad 12.2: [7.23] Určete vzdálenost funkcí

$$f(x) = x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in [1,2]$$

jako prvků normovaného vektorového prostoru $\mathcal{S}[1,2]$ po částech spojitých funkcí na intervalu $[1,2]$ s normou

(i) $||f||_1 = \int_1^2 |f(x)| dx$,

(ii) $||f||_\infty = \max\{|f(x)| \,|\, x \in [1,2]\}$.

Příklad 12.3: [7.31, 7.32] Určete konvoluci funkcí $f_1 * f_2$, kde

(i)

$$f_1(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{pro } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \text{a} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0,1] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(ii)

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0 \quad \text{a} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$