

# Autonomní systémy v rovině

## Definice, trajektorie, nulkliny, stacionární body

Petr Liška

Masarykova univerzita

20.02.2024

# Autonomní systém v rovině

## Definice

Vektorová diferenciální rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t))^T$$

a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T$$

je definovaná na oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , se nazývá *autonomní systém v rovině*.  
Oblast  $\Omega$  se nazývá *fázový prostor*, proměnná  $t$  se nazývá *čas*.

## Úmluva

Pokud nebude řečeno jinak, tak  $f_1$  i  $f_2$  jsou spojité funkce a počáteční problém (1),  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  je jednoznačný pro libovolné  $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$ .  
Řešením se rozumí úplné řešení.

# Trajektorie a základní vlastnost

Řešení  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  systému (1) můžeme interpretovat jako

1. graf funkce  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  v prostoru  $\mathbb{R} \times \Omega$ ;
2. křivku v prostoru  $\Omega$  danou parametricky  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ .

V druhém případě se tato křivka nazývá *trajektorie*. Jedná se vlastně o kolmý průmět grafu funkce  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  z  $\mathbb{R} \times \Omega$  do  $\Omega$ .

Uzavřená trajektorie se nazývá *cyklus*.

## Lemma

*Je-li  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  řešení rovnice (1), pak i  $\mathbf{x} = \varphi(t + c)$  je řešení rovnice (1).*

# Tři základní otázky

1. Existují rovnovážné hodnoty

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$$

takové, že  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^*$  je řešením (1)?

2. Necht'  $\varphi(t)$  je řešení (1). Předpokládejme, že  $\psi(t)$  je druhé řešení (1) takové, že  $\psi(0)$  je velmi blízko  $\varphi(0)$ . Zůstane  $\psi(t)$  blízko  $\varphi(t)$  i v budoucnu nebo se  $\psi(t)$  odchýlí od  $\varphi(t)$  pro  $t \rightarrow \infty$ ?
3. Co se stane s řešením  $\mathbf{x}(t)$  pro  $t \rightarrow \infty$ ? Bude se blížit nějakému rovnovážnému stavu? Nebo alespoň třeba nějakému periodickému řešení?

# První otázka = stacionární bod

## Definice

Bod  $\mathbf{x}^*$  takový, že  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , se nazývá *stacionární bod* (kritický, singulární, rovnovážný). Příslušné řešení  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$  se pak nazývá *stacionární řešení* (rovnovážné).

Stacionární bod je tedy řešením soustavy rovnic

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Množina řešení každé libovolné rovnice  $f_k(x_1, x_2) = 0$  se nazývá *k-tá nulklina*.

## Druhá otázka = stabilita

### Definice

Řešení  $\mathbf{x}_0$  rovnice (1) se nazývá stabilní, když ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tak, že každé řešení  $\mathbf{x}$  rovnice (1) vyhovující podmínce

$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0(0)| < \delta$$

splňuje

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon.$$

Není-li řešení  $\mathbf{x}_0$  stabilní, řekneme, že je nestabilní.

Plně vyřešeno pro

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (2)$$

kde  $A$  je konstantní matice.

## Věta

- a) Každé řešení rovnice (2) je stabilní, když všechna vlastní čísla matice  $A$  mají zápornou reálnou část.
- b) Předpokládejme, že všechna vlastní čísla matice  $A$  mají nezápornou reálnou část a  $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$ , jsou kořeny s nulovou reálnou částí, přičemž kořen  $\lambda_j$  má násobnost  $k_j$ . Potom každé řešení rovnice (2) je stabilní, když matice  $A$  má  $k_j$  lineárně nezávislých vlastních vektorů pro každé vlastní číslo  $\lambda_j$ .

## Třetí otázka = vlastnosti trajektorií a charakteristika stacionárních bodů

### Věta

*Nechť  $\varphi$ ,  $\psi$  jsou řešení rovnice (1). Pak jejich trajektorie buď splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.*

### Věta

*Nechť  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  je řešení (1). Jestliže  $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$  pro nějaké  $t_0$  a  $T > 0$ , potom  $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$ .*

Autonomní systém (1) tedy může mít trajektorie trojího typu:

1. Singulární body (odpovídají konstantním řešením).
2. Cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením).
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.



# Typy singulárních bodů

Singulární bod  $x_0$  rovnice (1) se nazývá

*střed*, když existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $x_0$  takové, že každým  $a \in U$  prochází jediná uzavřená trajektorie, která obsahuje  $x_0$  ve svém vnitřku;

*ohnisko*, když existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $x_0$  takové, že bod  $x(t)$  trajektorie  $x$  vycházející z libovolného bodu  $a \in U$  má tu vlastnost, že konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  nebo  $t \rightarrow -\infty$  k  $x_0$ , a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru  $\overrightarrow{x_0 x(t)}$  od nějakého pevného vektoru  $\overrightarrow{x_0 x_1}$  má nevlastní limitu;

*uzel*, když existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $x_0$  takové, že pro bod  $x(t)$  trajektorie  $x$  vycházející z libovolného bodu  $a \in U$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$$

a velikost orientovaného úhlu vektoru  $\overrightarrow{x_0 x(t)}$  od nějakého pevného vektoru  $\overrightarrow{x_0 x_1}$  má vlastní limitu;

*sedlo*, když existuje jen konečný počet trajektorií  $x(t)$  takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$$

*bod rotace*, jestliže v libovolném okolí bodu  $x_0$  existuje alespoň jeden cykl obsahující ve svém vnitřku bod  $x_0$ .

# Lineární autonomní systém

Uvažujme lineární autonomní systém, tj.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3)$$

## Věta

*Nechť  $A$  je regulární matice systému (3) a necht'  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou vlastní čísla matice  $A$ . Stacionární bod  $[0, 0]$  je*

- *nestabilní uzel, jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ ;*
- *stabilní uzel, jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ ;*
- *sedlo, jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ;*
- *nestabilní ohnisko, jsou-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  a  $\alpha > 0$ ;*
- *stabilní ohnisko, jsou-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  a  $\alpha < 0$ ;*
- *střed, jsou-li  $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ .*