

Autonomní systémy v rovině

Geometrické vlastnosti trajektorií, nelineární systémy

Petr Liška

Masarykova univerzita

27.02.2025

Lineární autonomní systém

Uvažujme lineární autonomní systém, tj.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Věta

Nechť A je regulární matice systému (1) a necht' λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A . Stacionární bod $[0, 0]$ je

- *nestabilní uzel, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$;*
- *stabilní uzel, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$;*
- *sedlo, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;*
- *nestabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ a $\alpha > 0$;*
- *stabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ a $\alpha < 0$;*
- *střed, jsou-li $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$.*

Malá odbočka - asymptotická stabilita

Definice

Řešení rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ tak, že pro každé řešení \mathbf{x} rovnice (2) splňující nerovnost $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| = 0.$$

Věta

Nulové řešení rovnice (1) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice A má zápornou reálnou část.

Nelineární systém

Věta

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a že $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Nechť

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak je bod $[x_0, y_0]$ izolovaným singulárním bodem systému

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Přitom je bod $[x_0, y_0]$ stabilní/nestabilní uzel/ohnisko nebo sedlo pro systém (3), je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro systém

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y \\ y' &= \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} y. \end{aligned} \tag{4}$$

Je-li však počátek střed pro systém (4), je bod $[x_0, y_0]$ buď bod rotace nebo ohnisko pro systém (3)

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - a) + \\ + \frac{1}{2}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - a) + f_{yy}(a, b)(y - a)^2] + \dots$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \dots$$

$$\left| \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right| \leq C (\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots,$$

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

Uvažujme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je hladká a necht' \mathbf{x}^* je stac. bod, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, pak

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots$$

a

$$\mathbf{x}' \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y} \quad (6)$$

Uvažujme systémy

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + P(x, y) \\ y' &= cx + dy + Q(x, y)\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy\end{aligned}\tag{8}$$

Věta (Grobman-Hartman)

Nemá-li matice systému (8) čistě imaginární vlastní čísla a P a Q mají spojitě parciální derivace, pak existuje bijektivní zobrazení mezi trajektoriemi rovnice (7) a trajektoriemi rovnice (8) z okolí stacionárního bodu (7) do okolí bodu (0, 0).

Hartman, P; *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*. Proc. A.M.S. 11 (4), 1960. 610–620.