MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2017 BC. LENKA WASSERBAUEROVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Konstrukce kružítkem

Diplomová práce

Bc. Lenka Wasserbauerová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Šišma, Dr. **Brno 2017**

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Lenka Wasserbauerová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Konstrukce kružítkem
Studijní program:	Chemie
Studijní obor:	Učitelství chemie pro střední školy Učitelství matematiky pro střední školy
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Šišma, Dr.
Akademický rok:	2016/2017
Počet stran:	viii + 51
Klíčová slova:	kružítko; geometrie kružítka; Mohr-Mascheroniho tvrzení; Mascheroniho konstrukce, kruhová inverze

Bibliographic Entry

Author: Bc. Lenka Wasserbauerová
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Constructions with compass

Degree Programme: Chemistry

Field of Study: Upper Secondary School Teacher Training in Chemistry
Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics

Supervisor: RNDr. Pavel Šišma, Dr.

Academic Year: 2016/2017

Number of Pages: viii + 51

Keywords: compass; geometry of compass; Mohr-Mascheroni theorem; Mascheroni constructions; circle inversion

Abstrakt

Tato diplomová práce se věnuje geometrii kružítka, tedy konstrukcemi jenom kružítkem. Práce se v první části zaměřuje na důkaz tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení, tedy že všechny konstrukce řešitelné pravítkem a kružítkem se dají vyřešit pouze kružítkem. V následující části této práce jsou vyřešeny některé důležité a zajímavé konstrukce jen kružítkem. Závěr této práce popisuje definici a vlastnosti kruhové inverze, které jsou pak využity při řešení konstrukcí v geometrii kružítka. Poté se práce zabývá využitím kruhové inverze jako univerzální metody řešení konstrukcí pouze kružítkem.

Abstract

This diploma thesis deals with the geometry of the compass therefore with constructions made only by compass. The first part of the thesis is focused on the proof of the so-called Mohr-Mascheroni theorem which says that all constructions that are solvable by the ruler and the compass can be solved only by the compass. In the next part of the work there are some important and interesting constructions solved by the compass. The conclusion of the thesis describes the definition and properties of circle inversion that are then used for solving the construction in the geometry of the compass. Afterwards, the thesis discusses the use of circle inversion as a universal method of solving the constructions by the compass.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2015/2016

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Bc. Lenka Wasserbauerová
Program:	Chemie
Obor:	Učitelství chemie pro střední školy Učitelství matematiky pro střední školy

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Téma práce:	Konstrukce kružítkem
Téma práce anglicky:	Constructions with compass

Oficiální zadání:
Eukleidovské konstrukce proveditelné pravítkem a kružítkem je možno řešit samotným kružítkem. V diplomové práci bude dokázán tento fakt a budou řešeny některé elementární úkoly. Cílem práce bude vytvořit učební text, který by posloužil učiteli střední školy při práci s talentovanými žáky v matematice.

Literatura:
EUKLEIDES. *Eukleidovy Základy : Elementa*. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1907. 314 s.

Kostovskij, A. N.: Geometrical constructions using compasses only. New York 1961.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Šišma, Dr.
Datum zadání práce:	1. 9. 2015
V Brně dne:	26. 10. 2015

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Wasserbauerová	Pavel Šišma	v.z. Pavel Šišma
Bc. Lenka Wasserbauerová	RNDr. Pavel Šišma, Dr.	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
studentka	**vedoucí práce**	**ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat RNDr. Pavlu Šišmovi, Dr., za pomoc při psaní mé diplomové práce, za trpělivost, za cenné rady a připomínky a za čas, který věnoval vedení mé diplomové práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 15. května 2017

. . . .

Bc. Lenka Wasserbauerová

Obsah

Úvod

Běžně se setkáváme s konstrukcemi, které jsou řešeny pomocí pravítka a kružítka. Tato práce se zabývá geometrií kružítka, tedy řešením konstrukcí pouze pomocí kružítka.

Cílem této diplomové práce je dokázat tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení, tedy že každá eukleidovská konstrukce řešitelná pomocí pravítka a kružítka se dá vyřešit pouze kružítkem a vytvořit ucelenou práci o geometrii kružítka.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola zkoumá historický vývoj geometrie kružítka. Jsou zde blíže popsáni jednotliví matematici, kteří se tomuto tématu věnovali.

Druhá kapitola ze zabývá důkazem tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení. Pro tento důkaz je nejprve potřeba vyřešit několik základních konstrukcí, které jsou v této kapitoly popsány a vyřešeny.

Třetí kapitola ukazuje další důležité konstrukce řešitelné pouze kružítkem. Některé z těchto konstrukcí zde mají dokonce několik způsobů řešení.

Čtvrtá kapitola se věnuje kruhové inverzi a je členěna na dvě části. První z těchto částí se zaměřuje na samotnou definici kruhové inverze a její vlastnosti. Druhá část popisuje konstrukce obrazů bodů, přímek nebo kružnic v dané kruhové inverzi, přičemž využívá vlastností kruhové inverze z první části této kapitoly. V závěru celé kapitoly je čtenáři naznačeno využití kruhové inverze při řešení konstrukcí jenom kružítkem.

Tato práce je sázena programem LaTeX a obrázky jsou vypracovány v programu Geogebra.

Kapitola 1

Historie

Počátky geometrických konstrukcí s omezeným použití nástrojů sahají až do období starověku. Dobře známá eukleidovská geometrie je založena na geometrických konstrukcích provedených pomocí kružítka a pravítka. Tehdy byly nástroje kružítko a pravítko považovány za nástroje rovnocenné, tudíž nezáleželo na tom, jestli byla konstrukce provedena pomocí pravítka a kružítka nebo pomocí jenom jednoho z těchto nástrojů.

Již matematici tehdejší doby poukázali na to, že kružítko je dokonalejším nástrojem než pravítko. S kružítkem jsme totiž schopni při konstrukci dosáhnout větší přesnosti než s použitím pravítka. Proto se tedy geometři začali zabývat otázkou, jak provádět jednotlivé konstrukce pouze kružítkem.

1.1 Lorenzo Mascheroni

Tento text o Lorenzu Mascheronim vychází z literatury: [3], [4], [6], [7].

Obrázek 1.1: Lorenzo Mascheroni

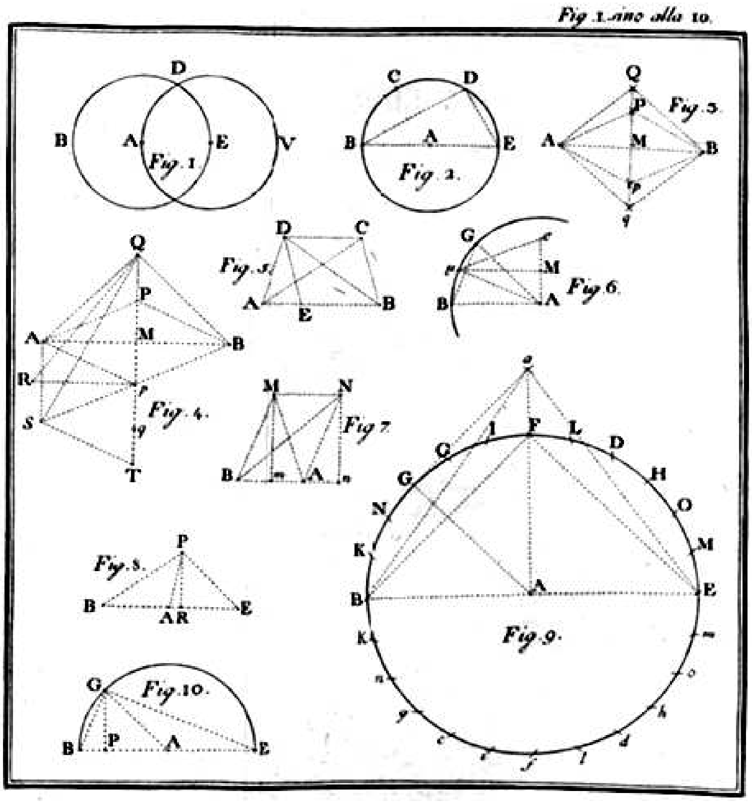
Lorenzo Mascheroni byl italský básník a matematik. Narodil se 13. května 1750 ve městě Bergamo jako první ze čtyř dětí matce Maria Ciribelli a otci Giovanni Paolo, který byl bohatým statkářem. Lorenzo již v mladém věku prokázal svoji inteligenci a předpoklady ke studiu. Proto v roce 1759 nastoupil do církevního semináře a poté byl ve svých 24 letech vysvěcen na kněze.

Již v roce 1773 začal svou učitelskou kariéru, kdy zpočátku vyučoval rétoriku. Ovšem zajímal se také o experimentální vědu a matematiku. Díky tomu nastoupil v roce 1775 na Akademii v Bergamu, kde studoval logiku, metafyziku a fyziku. Toto studium úspěšně ukončil roku 1778, kdy začal učil matematiku a fyziku a byl také zapojen do tvorby osnov. Krátce nato vydal učebnici matematiky o statice obloukových konstrukcí „Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte“, která obsahuje nové poznatky k teorii o statice staveb. Hlavně díky této práci byl v roce 1786 jmenován profesorem algebry a geometrie na univerzitě v Pavii, kde přišel do kontaktu s různými vědci a stal se tak jedním z předních vědců osvícenství.

V letech 1788–1791 byl vedoucím Akademie v Pavii a zároveň v letech 1789–1793 působil jako rektor univerzity. V roce 1790 publikoval práci s názvem „Adnotationes ad calculum integrale Euleri“, ve které uvedl výpočet tzv. Eulerovy konstanty (někdy nazývané také Euler-Mascheroniho konstanty) na 32 desetinných míst. I když se v roce 1809 zjistilo, že pouze prvních 19 desetinných míst bylo správně, přesto jeho práce ukazuje, jak hluboce chápal Eulerův kalkulus.

V roce 1797 vydal knihu s názvem „La Geometria del Compasso“, která byla později přeložena do francouzského a německého jazyka. Mascheroni velmi obdivoval Napoleona Bonaparte, proto také tuto práci věnoval ve verších právě jemu. V této publikaci dokázal tvrzení, které bývá často nazýváno tzv. Mascheroniho tvrzení, tedy že všechny konstrukce řešitelné pomocí kružítka a pravítka se dají vyřešit pouze pomocí kružítka.

Obrázek 1.2: La Geometria del Compasso



Obrázek 1.3: La Geometria del Compasso - ukázka z knihy

Za své vynikající příspěvky byl Mascheroni oceněn několika cenami, například členství v Akademii v Padově, Královské akademii v Manově nebo v „Società Italiana delle Scienze“. Mascheroni udělal kariéru také kupříkladu v politice. V roce 1797 byl zvolen zástupcem zákonodárného orgánu v Miláně a v roce 1798 byl poslán do Paříže, aby pomohl komisi rozhodnout o délce metra. Dne 10. prosince 1799 komise dokončila svou práci, bohužel ale díky rakouské okupaci probíhající v Itálii se Mascheroni nemohl vrátit zpět do Milána. Zůstal tedy v Paříži, kde ale 10. července 1800 zemřel po krátké nemoci způsobené komplikací při nachlazení.

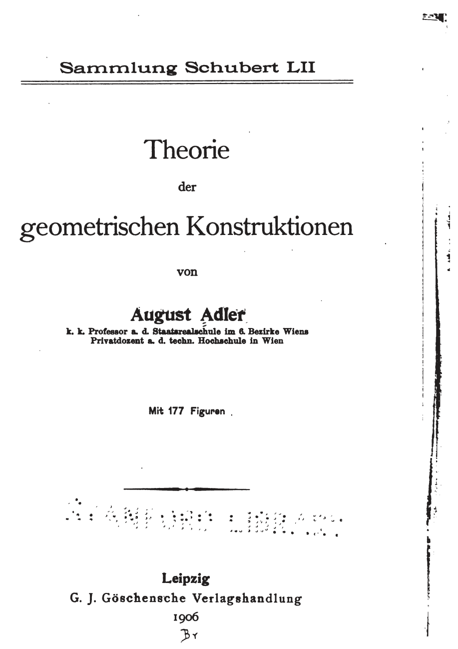
1.2 August Adler

Tato část kapitoly o Augustu Adlerovi vychází z literatury: [3], [5].

August Adler se narodil 24. ledna 1863 v Opavě, kde i vyrůstal. V roce 1879 dostudoval reálku v Opavě a nastoupil na univerzitu ve Vídni. V roce 1884 vykonal úspěšně zkoušku z učitelství matematiky a deskriptivní geometrie. Již v této době vydal několik knih o přímkových plochách a křivkách v prostoru. V roce 1885 byl jmenován asistentem sférické astronomie a geodézie na univerzitě ve Vídni. Tuto pozici zastával po dobu dvou let. Poté působil na středních školách ve Vídni, Klagenfurtu, Plzni a Praze. Byl také tehdy poslán na univerzitu do Berlína a na univerzitu v Göttingenu, aby zde pokračoval ve svých studiích. V roce 1901 se habilitoval pro deskriptivní geometrii na univerzitě ve Vídni.

V roce 1905 odešel na reálku v 6. vídeňském obvodu a v roce 1907 byl jmenován ředitelem reálky v 7. obvodu. Poté v roce 1909 získal na univerzitě ve Vídni titul profesora. Ze zdravotních důvodů musel pak v roce 1915 své působení na vídeňské univerzitě ukončit.

August Adler aplikoval teorii kruhové inverze na řešení Mascheroniho konstrukcí v knize „Theorie der geometrischen Konstruktionen“ vydané v edici Göschen Sammlung v roce 1906. Adler zjednodušil Mascheroniho důkaz, ovšem Adlerovy metody nebyly tak elegantní (ať už v jednoduchosti nebo v délce) jako metody Lorenza Mascheroniho. Adler zde kromě tohoto důkazu uvedl i univerzální metodu řešení geometrických konstrukcí jenom pomocí kružítka. Tato kniha z roku 1906 nebyla první, ve které Adler studoval tento problém. Již předtím v roce 1890 publikoval článek o teorii Mascheroniho konstrukcí, v roce 1895 vydal jiný článek o geometrických konstrukcích a dále také v roce 1902 zveřejnil článek o nástrojích pro geometrické konstrukce.



Sammlung Schubert LII

Theorie

der

geometrischen Konstruktionen

von

August Adler

k. k. Professor a. d. Staatsrealschule im 6. Bezirke Wiens
Privatdozent a. d. techn. Hochschule in Wien

Mit 177 Figuren

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1906

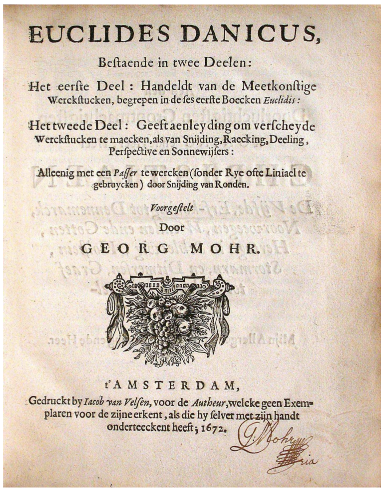
Obrázek 1.4: Theorie der geometrischen Konstruktionen

Všechny Adlerovy práce byly v němčině, ovšem publikoval také v několika českých časopisech. Stejně jako se zajímal Adler o deskriptivní geometrii, zajímal se také o matematické vzdělávání na středních školách. Adler začal na toto téma vydávat publikace kolem roku 1901 a do konce svého života vydal více knih o matematickém vzdělávání než o samotné geometrii. Adler napsal více než dvacet prací, které se zabývají problematikou vyučování deskriptivní geometrie na středních školách. V roce 1907 publikoval práci, která se věnovala moderním metodám výuky matematiky na rakouských středních školách. Adler vydal také mnoho různých učebních materiálů pro výuku geometrie. V roce 1909 vypracoval tabulky pětimístných logaritmů.

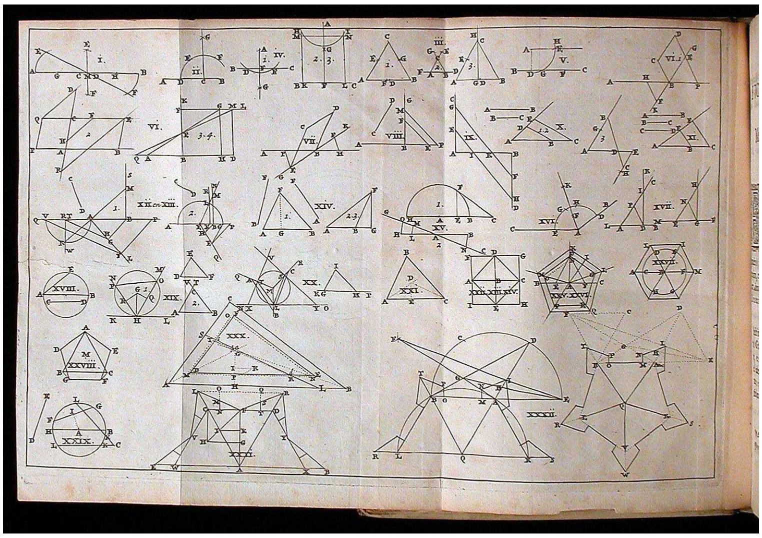
1.3 Georg Mohr

Tato podkapitola vychází z literatury: [3].

Až do roku 1927 byl Mascheroni považován za prvního matematika, který dokázal tzv. Mascheroniho tvrzení. Ovšem roku 1927 objevil dánský matematik Hjelmslev v knihovně v Copenhagenu knihu s názvem „Euclides Danicus“, kterou napsal Georg Mohr a vydal v roce 1672. V této knize byl nalezen jiný důkaz Mascheroniho tvrzení. Toto tvrzení tedy Mohr dokázal již 125 let před Mascheroniho důkazem. Proto se někdy toto tvrzení také nazývá tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení. Kniha Eukleides Danicus byla omylem považována za komentář k Eukleidovým Základům, proto se o tuto knihu nikdo hlouběji nezajímal. Tato kniha měla sice latinský název, ale její text byl v dánštině. To je taky možná dalším důvodem, proč této knize nikdo nevěnoval pozornost dříve.


EUCLIDES DANICUS,
Bestaende in twee Deelen:
Het eerste Deel : Handeldt van de Meetkonstige Werckstucken, begrepen in de ses eerste Boecken *Euclidis*:
Het tweede Deel : Geeft aenleyding om verscheyde Werckstucken te maecken, als van Snijding, Raecking, Deeling, Perspective en Sonnewijsers:
Alleenig met een *Passer* te wercken (sonder Rye ofte Liniael te gebruycken) door Snijding van Ronden.
Voorgestelt
Door
GEORG MOHR.
t'AMSTERDAM,
Gedruckt by *Jacob van Velsen*, voor de *Autheur*, welcke geen Exemplaren voor de zijne erkent, als die hy selver met zijn handt onderteeckent heeft; 1672.

Obrázek 1.5: Euclides Danicus



Obrázek 1.6: Euclides Danicus - ukázka z knihy

Kapitola 2

Mohr-Mascheroniho tvrzení

V této kapitole naznačíme důkaz tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení, tedy že každá konstrukce řešitelná pomocí pravítka a kružítka je řešitelná pouze kružítkem. Pro tento důkaz je ale nutné zabývat se řešením některých konkrétních konstrukcí pouze pomocí kružítka.

Předtím si musíme ale objasnit jednu důležitou věc. Je jasné, že nemůžeme jenom pomocí kružítka nakreslit souvislou čáru, tedy i přímku danou dvěma body, které na této přímce leží. Konstrukce přímky tedy není při klasickém pojetí plně pokryta Mohr-Mascheroniho teorií. Později v této kapitole si ale ukážeme (konstrukce 2.5), že pouze pomocí kružítka můžeme zkonstruovat libovolný počet bodů této přímky, tudíž jsme schopni sestrojit libovolný bod této přímky. V geometrii kružítka tedy považujeme přímku za sestrojenou, pokud máme sestrojeny dva různé body, které na této přímce leží.

V další části této kapitoly se budeme věnovat řešení konkrétních konstrukcí pouze pomocí kružítka. Tyto konstrukce pak využijeme k již zmiňovanému důkazu.

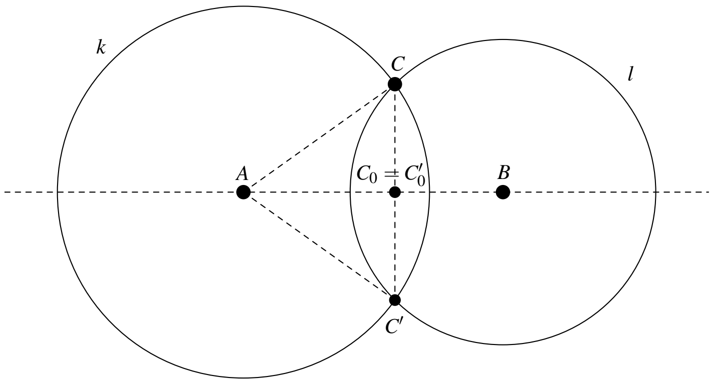
Konstrukce 2.1. Narýsujte bod souměrně sdružený s daným bodem podle dané přímky.

Rozbor. Mějme přímku danou dvěma body A, B. Nechť je dán bod C. Naším úkolem je sestrojit bod, který je souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB. Sestrojme kružnici k se středem A a poloměrem AC a kružnici l se středem B a poloměrem BC. Tyto dvě kružnice mají minimálně jeden společný bod, a to bod C. V případě, že tyto kružnice mají právě jeden společný bod, pak se jedná o dotyk (vnější nebo vnitřní). Bod dotyku dvou kružnic leží vždy na přímce spojující středy těchto kružnic. Bod C tedy leží na přímce AB a tudíž je i svým obrazem, tedy $C = C'$. V případě, že tyto kružnice mají dva společné body, pak jeden z nich je bod C a druhý bod označme C'. Pak trojúhelníky ABC a ABC' jsou shodné podle věty sss (viz obrázek 2.1). Platí tedy: $|Cp| = |C'p|$. Jestliže označíme patu kolmice z bodu C na přímku p jako bod C_0 a patu kolmice z bodu C' na přímku p jako bod C'_0, pak pravoúhlé trojúhelníky ACC_0 a $AC'C'_0$ jsou shodné, tedy $C_0 = C'_0$. Bod C' je pak obrazem bodu C v osové souměrnosti podle přímky dané body A, B.

Popis konstrukce.

0. body A, B, C, přímka $p = \leftrightarrow AB$
1. kružnice k; $k(A, |AC|)$
2. kružnice l; $l(B, |BC|)$

3. bod C'; $C' = k \cap l$ a platí $\mathscr{O}(p) : C \to C'$



Obrázek 2.1: Bod v osové souměrnosti

Poznámka. Pokud chceme ověřit, že tři zadané body A, B, C leží na jedné přímce, zvolíme bod X, který určitě na takové přímce neleží. Sestrojíme bod X' symetrický podle přímky určené body A, B (podle rozboru konstrukce 2.1). Pak pokud bod C leží na přímce AB, tedy ose úsečky XX', pak bod C má stejnou vzdálenost od bodu X jako od bodu X' (což se dá kružítkem snadno ověřit).

Konstrukce 2.2. Sestrojte úsečku, která má n-krát větší délku než daná úsečka AA_1, $|AA_1| = r$ (kde $n \in \mathbb{N}$ libovolné).

Poznámka. Na tuto konstrukci se budeme později mnohokrát odvolávat. Vždy budeme potřebovat nalézt bod, který má n-krát ($n = 2, 3, \dots$) větší délku než zadaná úsečka. Přitom vždy, pokud nebude uvedeno jinak, budeme hledat právě takový bod A_n, pro který platí, že bod A_1 leží na úsečce AA_n.

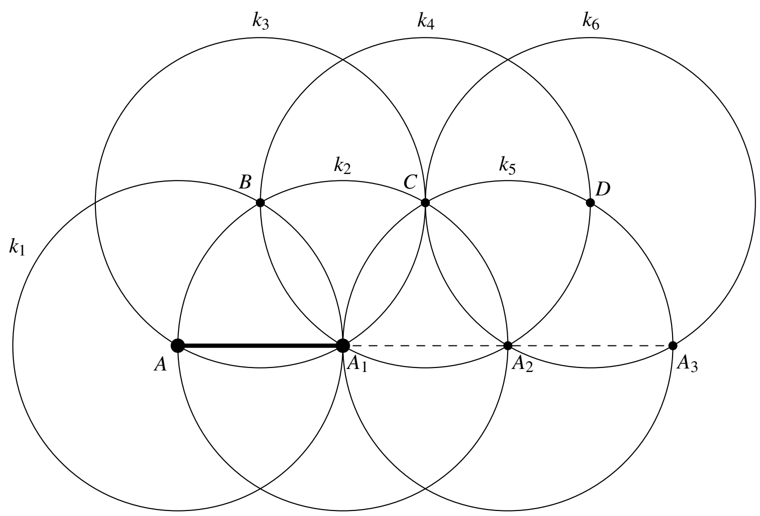
Rozbor. K této konstrukci využijeme vlastnosti rovnostranného trojúhelníka. Sestrojíme tedy rovnostranný trojúhelník AA_1B pomocí kružnic k_1 a k_2 (viz obrázek 2.2). Následně pomocí kružnic k_3 a k_4 sestrojíme rovnostranné trojúhelníky A_1BC a A_1CA_2. Víme, že každý rovnostranný trojúhelník má velikost všech vnitřních úhlů $60°$. Bod A_2 tedy leží na přímce AA_1 a $|AA_1| = |A_1A_2| = r$. Úsečka AA_2 má dvakrát větší délku než úsečka AA_1.

Pokud zopakujeme tento postup, narýsováním kružnic k_5 a k_6 dostaneme úsečku AA_3, která má třikrát větší délku než úsečka AA_1. Je zřejmé, že pokud tento postup zopakujeme $(n-1)$-krát (pro libovolné $n \in \mathbb{N}$), získáme úsečku AA_n, která má n-krát větší vzdálenost než zadaná úsečka AA_1.

Popis konstrukce.

0. úsečka AA_1; $|AA_1| = r$
1. kružnice k_1; $k(A, r)$
2. kružnice k_2; $k(A_1, r)$

3. bod B; $B = k_1 \cap k_2$
4. kružnice k_3; $k(B, r)$
5. bod C; $C = k_2 \cap k_3$
6. kružnice k_4; $k(C, r)$
7. bod A_2; $A_2 = k_2 \cap k_4$ a platí: $|AA_2| = 2r$
8. kružnice k_5; $k(A_2, r)$
9. bod D; $D = k_4 \cap k_5$
10. kružnice k_6; $k(D, r)$
11. bod A_3; $A_3 = k_5 \cap k_6$ a platí: $|AA_3| = 3r$
12. stejným způsobem sestrojíme body $A_4, A_5, \ldots, A_n$ (pro libovolné přirozené číslo n) takové, že platí: $|AA_n| = n \cdot r$



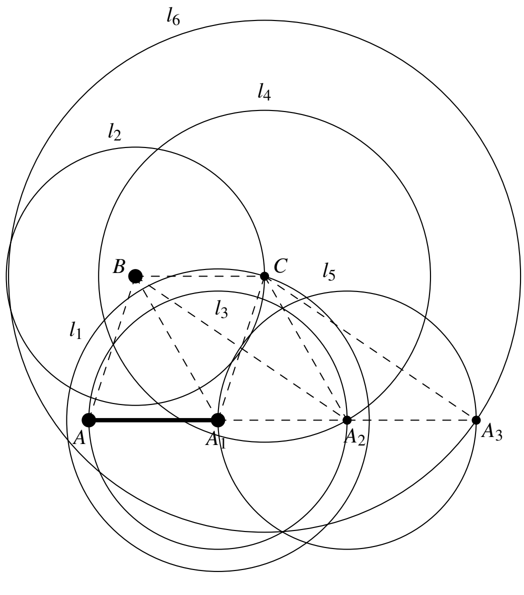
Obrázek 2.2: Násobek úsečky pomocí rovnostranných trojúhelníků

Poznámka. Uvedené řešení konstrukce není jediné možné, například předchozí konstrukce se dala vyřešit následujícím způsobem.

Rozbor. Zvolme libovolný bod B takový, že neleží na úsečce AA_1. Narýsujme kružnici l_1 se středem A_1 a poloměrem AB a kružnici l_2 se středem B a poloměrem $r = |AA_1|$. Průnik kružnic l_1 a l_2 označme jako bod C. Sestrojili jsme tedy rovnoběžník AA_1CB. Sestrojme nyní další rovnoběžník A_1A_2CB tak, že bod A_2 leží na průsečíku kružnice l_3 se středem A_1 a poloměrem r a kružnice l_4 se středem C a poloměrem BA_1. Sestrojili jsme tedy úsečku AA_2 takovou, že $|AA_2| = 2 \cdot |AA_1| = 2r$. Nyní sestrojíme rovnoběžník A_2A_3CB pomocí kružnic l_5 a l_6 (viz obrázek 2.3). Platí: $|AA_3| = 3r$. Opakováním tohoto postupu můžeme sestrojit libovolnou úsečku AA_n takovou, že $|AA_n| = n \cdot r$ (kde n je libovolné přirozené číslo).

Popis konstrukce.

0. úsečka AA_1; $|AA_1| = r$
1. bod B; $B \notin AA_1$
2. kružnice l_1; $l_1(A_1, |AB|)$
3. kružnice l_2; $l_2(B, r)$
4. bod C; $C = l_1 \cap l_2$
5. kružnice l_3; $l_3(A_1, r)$
6. kružnice l_4; $l_4(C, |BA_1|)$
7. bod A_2; $A_2 = l_3 \cap l_4$
8. úsečka AA_2; $|AA_2| = 2r$
9. kružnice l_5; $l_5(A_2, r)$
10. kružnice l_6; $l_6(C, |BA_2|)$
11. bod A_3; $A_3 = l_5 \cap l_6$
12. úsečka AA_3; $|AA_3| = 3r$
13. opakováním tohoto postupu sestrojíme body $A_4, A_5, \ldots, A_n$ (pro $n \in \mathbb{N}$ libovolné), tudíž i úsečky AA_n



Obrázek 2.3: Násobek úsečky pomocí rovnoběžníků

Konstrukce 2.3. Jsou dány úsečky a,b a c. Sestrojte úsečku d takovou, že platí: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (úsečka d je tzv. čtvrtá úměrná úseček a,b,c).

Rozbor. Popišme způsob konstrukce pro $a > b$. Pro $a < b$ je tento postup analogický. Pro $a = b$ je tento příklad triviální.

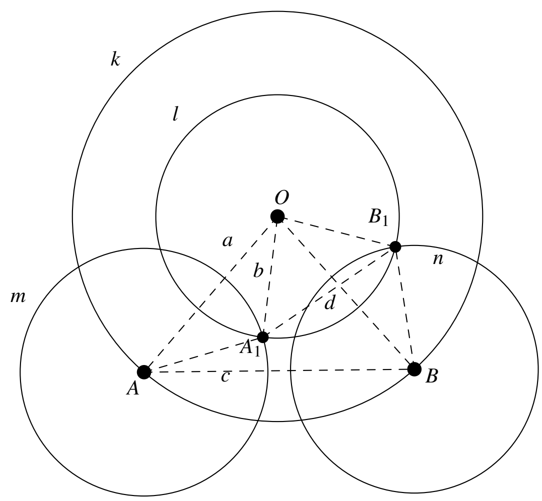
Tato konstrukce se nám rozdělí na dva případy.

a) $c < 2a$

Zvolme si libovolný bod a označme jej O. Sestrojme dvě soustředné kružnice k,l se středem v bodě O a poloměry po řadě a a b. Na kružnici $k(O,a)$ zvolíme dva body A,B tak, aby $|AB| = c$. Zvolme si libovolné pevné číslo r takové, že $a - b < r < a$. Sestrojme kružnici m se středem v bodě A a poloměrem r. Tato kružnice m protíná kružnici l ve dvou bodech. Jeden z nich si označme A_1 (na volbě nezáleží). Poté narýsujme kružnici n se středem B a poloměrem r. Kružnice n a l se protínají opět ve dvou bodech, z nich ale vybereme (a označíme jej B_1) takový, aby platilo, že $AB \nparallel A_1B_1$. Pak úsečka A_1B_1 je hledanou úsečkou d.

Popis konstrukce.

0. úsečky a,b,c
1. bod O libovolný
2. kružnice k; $k(O,a)$
3. kružnice l; $l(O,b)$
4. body A,B; $A \in k$, $B \in k$, $|AB| = c$
5. kružnice m; $m(A,r)$, $a - b < r < a$
6. bod A_1; $A_1 = m \cap l$ (zvolíme jeden ze dvou průsečíků)
7. kružnice n; $n(B,r)$
8. bod B_1; $B_1 = n \cap l$, $AB \nparallel A_1B_1$ a platí: $d = |A_1B_1|$



Obrázek 2.4: Konstrukce úsečky v poměru (pro $c < 2a$)

Důkaz. Trojúhelníky AOA_1 a BOB_1 jsou shodné (podle věty sss), tedy úhly AOA_1 a BOB_1 mají stejnou velikost. Pak ale $|\sphericalangle AOB| = |A_1OB_1|$, tudíž trojúhelníky AOB a A_1OB_1 jsou podobné. Z této podobnosti ale plyne vztah:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{|A_1B_1|}.$$

□

b) $c \geq 2a$

Sestrojme úsečku na (obrázek 2.2 nebo 2.3) takovou, že $c < 2na$. Nyní sestrojme úsečku y tak, že platí: $\frac{na}{b} = \frac{c}{y}$. Pokud nyní sestrojíme úsečku $x = ny$ (konstrukce 2.2), získali jsme hledanou úsečku d, protože platí: $\frac{a}{b} = \frac{c}{ny}$.

Popis konstrukce.

0. úsečky a, b, c
1. úsečka na; $c < 2na$ (obrázek 2.2 nebo 2.3)
2. úsečka y; $\frac{na}{b} = \frac{c}{y}$ (konstrukce 2.3 a))
3. úsečka d; $d = ny$ (konstrukce 2.2) a platí: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

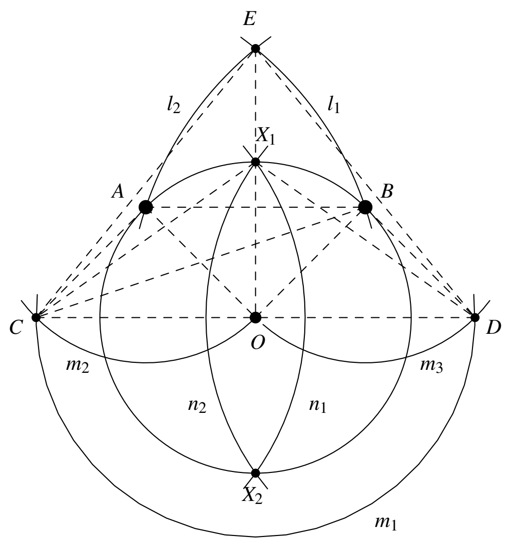
Konstrukce 2.4. Rozdělte kružnicový oblouk AB kružnice k na polovinu.

Rozbor. Předpokládejme, že umíme sestrojit střed kružnice k (v konstrukci 3.6 si ukážeme, jak jej sestrojit). Tento střed kružnice k označme O, dále označme $|OA| = |OB| = r$ a $|AB| = a$. Sestrojme kružnici m_1 se středem O a poloměrem a a kružnici m_2 se středem A a poloměrem r. Průsečíkem kružnic m_1 a m_2 je bod, který označme C. Nyní sestrojme kružnici m_3 se středem B a poloměrem r. Pak kružnice m_1 a m_3 se protínají v bodě, který označíme D. Sestrojme kružnici l_1 se středem C a poloměrem $|CB|$ a kružnici l_2 se středem D a poloměrem $|DA|$. Průsečíkem těchto dvou kružnic je bod, který označme E. Následně musíme sestrojit kružnici n_1 se středem C a poloměrem $|OE|$ a kružnici n_2 se středem D a poloměrem $|OE|$. Tyto kružnice se protínají ve dvou bodech, označme je X_1 a X_2. Pak X_1 a X_2 jsou body, které děli oba oblouky AB na polovinu.

Popis konstrukce.

0. kružnicový oblouk AB kružnice k
1. bod O; O je střed kružnice k (konstrukce 3.6)
2. kružnice m_1; $m_1(O, |AB| = a)$
3. kružnice m_2; $m_2(A, |OA| = |OB| = r)$
4. bod C; $C = m_1 \cap m_2$
5. kružnice m_3; $m_3(B, r)$
6. bod D; $D = m_1 \cap m_3$
7. kružnice l_1; $l_1(C, |CB|)$

8. kružnice l_2; $l_2(D, |DA|)$
9. bod E; $E = l_1 \cap l_2$
10. kružnice n_1; $n_1(C, |OE|)$
11. kružnice n_2; $n_2(D, |OE|)$
12. body X_1, X_2; $\{X_1, X_2\} = n_1 \cap n_2$ a platí: X_1, X_2 jsou středy obou oblouků AB



Obrázek 2.5: Rozdělení oblouku na polovinu

Důkaz. Útvary $ABOC$ a $ABDO$ jsou rovnoběžníky (plyne z rovnosti délek protějších stran těchto útvarů). Body C, O a D tedy leží na jedné přímce ($CO \parallel AB$, $OD \parallel AB$). Protože trojúhelníky CDE a CDX_1 jsou rovnoramenné, platí: $|\sphericalangle COE| = |\sphericalangle COX_1| = 90^\circ$. Pak ale úsečka OX_1 je kolmá k úsečce AB.

Nyní nám tedy k důkazu toho, že X_1 půlí jeden z oblouků AB, stačí jen dokázat, že bod X_1 leží na oblouku AB, tedy že $|OX_1| = r$.

Použitím kosinové věty v trojúhelníku COB dostaneme:

$$|CB|^2 = |OC|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OC| \cdot |OB| \cdot \cos|\sphericalangle COB| \tag{2.1}$$

a použitím kosinové věty tentokrát v trojúhelníku OBA získáme:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |OB| \cdot |AB| \cdot \cos|\sphericalangle OBA|. \tag{2.2}$$

Jelikož útvar $ABOC$ je rovnoběžník, pak platí: $|AB| = |CO|$. Potom vztah (2.2) můžeme upravit do tvaru:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 - 2 \cdot |OB| \cdot |OC| \cdot \cos|\sphericalangle OBA|, \tag{2.3}$$

navíc platí, že $|\sphericalangle OBA| = 180^\circ - |\sphericalangle COB|$, tedy:

$$\cos|\sphericalangle OBA| = \cos(180^\circ - |\sphericalangle COB|) = -\cos|\sphericalangle COB|$$

a vztah (2.3) upravíme do tvaru:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 + 2\cdot|OB|\cdot|OC|\cdot\cos|\sphericalangle COB|. \tag{2.4}$$

Sečtením rovnic (2.1) a (2.4) dostáváme:

$$|CB|^2 + |OA|^2 = 2|OC|^2 + 2|OB|^2.$$

Při našem značení získáváme rovnici:

$$|CB|^2 + r^2 = 2a^2 + 2r^2,$$

$$|CB|^2 = 2a^2 + r^2.$$

Poněvadž body B, E leží na kružnici $l_1(C, |CB|)$, pak $|CB| = |CE|$. Dále víme, že v pravoúhlém $\triangle COE$ platí Pythagorova věta: $|CE|^2 = |OC|^2 + |OE|^2$. Potom zřejmě platí:

$$|CB|^2 = |OC|^2 + |OE|^2,$$

$$2a^2 + r^2 = a^2 + |OE|^2,$$

$$|OE|^2 = a^2 + r^2 \tag{2.5}$$

Neboť bod X_1 leží na kružnici $n_1(C, |OE|)$, platí: $|CX_1| = |OE|$. V pravoúhlém $\triangle COX_1$ platí Pythagorova věta: $|CX_1|^2 = |OC|^2 + |OX_1|^2$. Odtud ale plyne:

$$|OE|^2 = |OC|^2 + |OX_1|^2,$$

$$|OX_1|^2 = |OE|^2 - |OC|^2. \tag{2.6}$$

Pak ale dosazením vztahu (2.5) do rovnice (2.6) získáváme:

$$|OX_1|^2 = a^2 + r^2 - a^2,$$

$$|OX_1|^2 = r^2.$$

Protože $|OX_1| > 0$ a $r > 0$, pak platí:

$$|OX_1| = r.$$

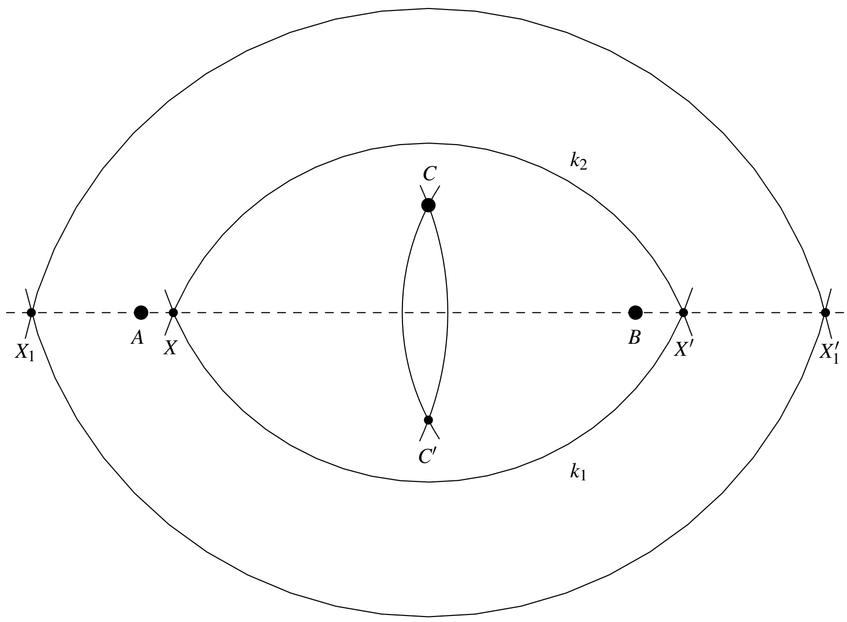
□

Konstrukce 2.5. Na přímce p dané dvěma body A, B sestrojte libovolný počet bodů.

Rozbor. Zvolme libovolný bod C, který určitě neleží na přímce p. Nyní můžeme sestrojit bod C', který je souměrně sdružený s bodem C podle přímky p (konstrukce 2.1). Následně sestrojme kružnici k_1 se středem C a poloměrem r a kružnici k_2 se středem C' a poloměrem r, kde r je libovolné číslo větší než je vzdálenost bodů C a C' od přímky p. Pak se kružnice k_1 a k_2 protínají ve dvou bodech X a X'. Je zřejmé, že tyto body leží na přímce p. Pokud zvolíme jiný poloměr r kružnic k_1 a k_2, pak získáme jiné body, které budou opět ležet na přímce p.

Popis konstrukce.

0. body A, B, přímka p; $p = \leftrightarrow AB$
1. bod C; $C \notin p$ libovolný
2. bod C'; $\mathscr{O}(p) : C \to C'$ (konstrukce 2.1)
3. kružnice k_1; $k_1(C, r)$, $r > |Cp|$ libovolné
4. kružnice k_2; $k_2(C', r)$
5. body X, X'; $\{X, X'\} = k_1 \cap k_2$ a platí: $\{X, X'\} \in p$
6. postup opakujeme pro jiné $r > |Cp|$, dostaneme jiné dva body přímky p



Obrázek 2.6: Sestrojení libovolného bodu úsečky

Konstrukce 2.6. Narýsujte průsečík dané kružnice $k(S, r)$ a přímky p dané dvěma body A, B.

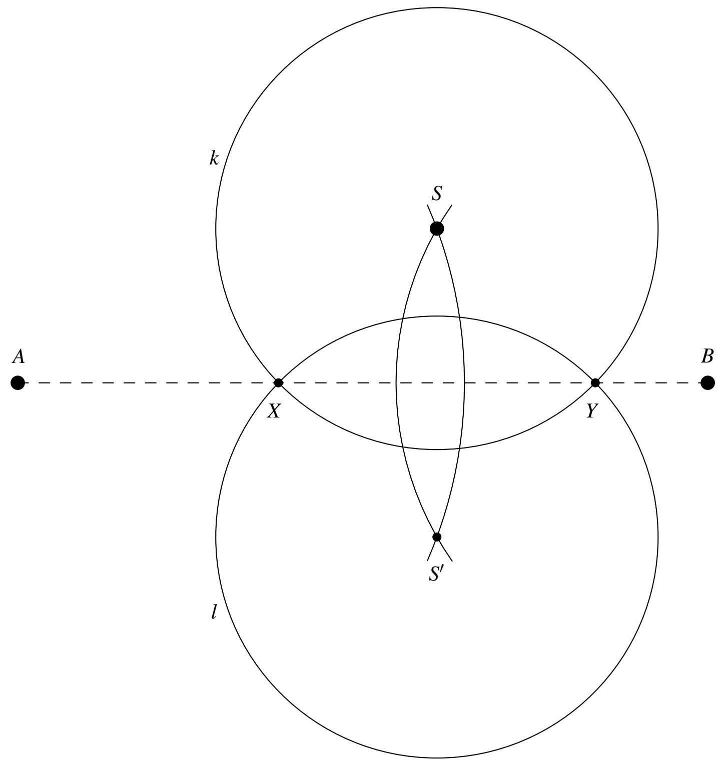
Rozbor. Řešení této konstrukce se nám rozdělí do dvou variant: jestli bod S leží nebo neleží na přímce p, která je určená body A a B (ověření, zda tři body A, B, S leží na jedné přímce, najdeme v poznámce na straně 7).

- $S \notin p$

  Sestrojme bod S' souměrně sdružený s bodem S podle přímky p (konstrukce 2.1). Nyní narýsujme kružnici l se středem v bodě S' a poloměrem r. Kružnice k a l se protínají v bodech X a Y, což jsou hledané průsečíky kružnice k s přímkou p.

Popis konstrukce.

0. kružnice $k(S,r)$, body A,B, přímka $p = \leftrightarrow AB$
1. bod S'; $\mathscr{O}(p) : S \to S'$ (konstrukce 2.1)
2. kružnice l; $l(S',r)$
3. body X,Y; $\{X,Y\} = k \cap l$ a platí: $\{X,Y\} = k \cap p$



Obrázek 2.7: Průsečík kružnice a úsečky (střed kružnice neleží na úsečce)

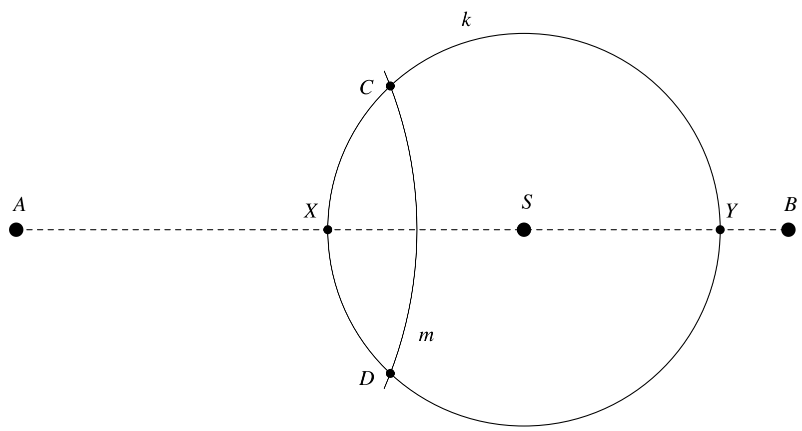
Důkaz. Platnost konstrukce plyne ze symetrie celé této konstrukce podle přímky $p = \leftrightarrow AB$. □

- $S \in p$

  Nejprve sestrojme kružnici m se středem A a poloměrem t, kde t je takový poloměr, že kružnice m a k se protínají ve dvou bodech, tedy platí $|AS| - r < t < |AS| + r$. Tyto body označme C a D. Dostali jsme tedy dva oblouky CD kružnice k. Nyní ale pomocí konstrukce 2.4 sestrojíme středy X,Y obou těchto oblouků. Tyto středy jsou hledanými průsečíky kružnice k a přímky p.

Popis konstrukce.

0. kružnice $k(S,r)$, body A,B, přímka $p = \leftrightarrow AB$
1. kružnice m; $m(A,t)$, $|AS| - r < t < |AS| + r$
2. body C,D; $\{C,D\} = k \cap m$
3. body X,Y; X,Y jsou středy obou oblouků CD kružnice k (konstrukce 2.4) a platí: $X,Y = k \cap p$



Obrázek 2.8: Průsečík kružnice a úsečky (střed kružnice leží na úsečce)

Důkaz. Trojúhelníky ASC a ASD jsou shodné (podle věty sss), proto bod S leží na ose úhlu CAD. Jelikož ale trojúhelníky AXC a AXD jsou shodné (podle věty sus), pak platí: $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle XAD|$, tedy bod X leží na ose úhlu CAD. Z toho ale vyplývá, že bod X leží na přímce AS (nebo taky na přímce AB, protože S leží na přímce $p = \leftrightarrow AB$).
Podobně se dá dokázat, že bod Y leží na přímce p, která je dána body AB. □

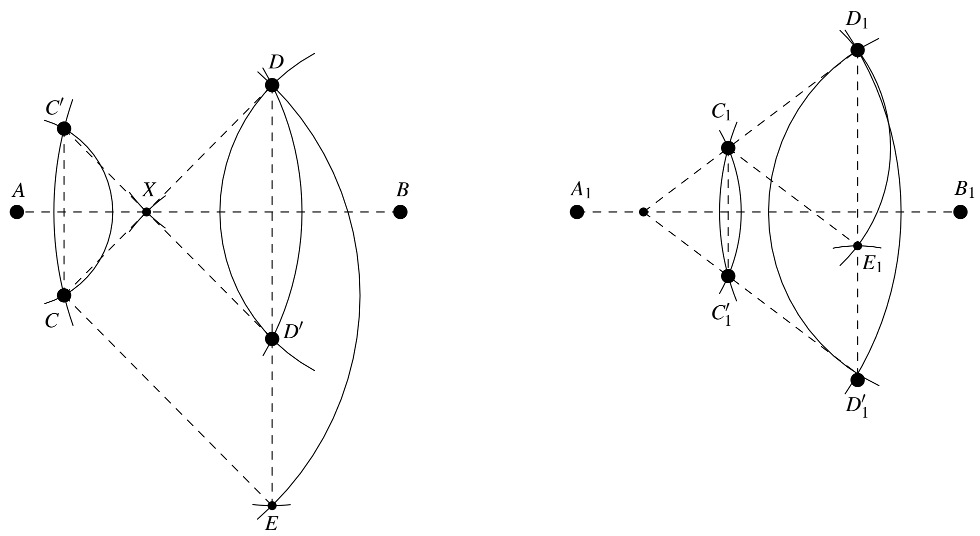
Konstrukce 2.7. Sestrojte průsečík dvou přímek p a q daných dvojicemi bodů A,B a C,D.

Rozbor. Sestrojme bod C', který je souměrně sdružený s bodem C podle přímky $p = \leftrightarrow AB$, a bod D', který je souměrně sdružený s bodem D podle přímky p (kostrukce 2.1). Nyní narýsujme kružnici k se středem v bodě D' a poloměrem $|CC'|$. Dále narýsujme kružnici l se středem v bodě C a poloměrem $|CD|$. Průsečík těchto dvou kružnic k a l označme jako bod E (ten, který leží na polopřímce DD'). Tato situace může dopadnout dvěma způsoby (viz obrázek 2.9).

Nyní potřebujeme najít úsečku x takovou, že platí: $\frac{|DE|}{|DD'|} = \frac{|CD|}{x}$ (konstrukce 2.3). Pokud tedy narýsujeme kružnici m se středem v bodě D a poloměrem x a kružnici n se středem v bodě D' a poloměrem x, bude průsečíkem těchto dvou kružnic m a n bod X, který je hledaným průsečíkem přímek p a q.

Popis konstrukce.

0. body A, B, přímka $p = \leftrightarrow AB$, přímka $q = \leftrightarrow CD$
1. bod C'; C' je souměrně sdružený s bodem C podle přímky p (konstrukce 2.1)
2. bod D'; D' je souměrně sdružený s bodem D podle přímky p (konstrukce 2.1)
3. kružnice k; $k(D', |CC'|)$
4. kružnice l; $l(C, |CD|)$
5. bod E; $E = k \cap l$, E leží na polopřímce DD'
6. úsečka x; $\frac{|DE|}{|DD'|} = \frac{|CD|}{x}$ (konstrukce 2.3)
7. kružnice m; $m(D, x)$
8. kružnice n; $n(D', x)$
9. bod X; $X = m \cap n$ a platí: $X = p \cap q$



Obrázek 2.9: Průsečík dvou úseček AB a CD

Důkaz. Jelikož je bod C' souměrně sdružený s bodem C podle přímky p a bod D' souměrně sdružený s bodem D podle přímky p, pak hledání průsečíku přímky p a q můžeme převést na hledání průsečíku přímek CD a $C'D'$.

Útvar $CC'D'E$ je rovnoběžník a platí: $DE \parallel CC'$, $DD' \parallel CC'$, pak tedy body D, D', E leží na jedné přímce. Trojúhelníky CDE a XDD' jsou podobné, proto platí:

$$\frac{|DE|}{|DD'|} = \frac{|CE|}{|D'X|}.$$

Dále ale platí:

$$|CE| = |CD| = |C'D'|.$$

Úsečka $D'X = x$ je tedy hledanou úsečkou, která splňuje vztah:

$$\frac{|DE|}{|DD'|} = \frac{|CD|}{x}.$$

$\square$

Nyní si tedy naznačme důkaz tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení. Každá eukleidovská konstrukce (konstrukce pomocí kružítka a pravítka) se dá převést na posloupnost řešení následujících základních konstrukcí:

1. sestrojení přímky procházející dvěma danými body,
2. sestrojení kružnice s daným středem a daným poloměrem,
3. sestrojení průsečíků dvou daných kružnic,
4. sestrojení průsečíků dané kružnice a dané přímky,
5. sestrojení průsečíků dvou daných přímek (každá je dána dvěma svými body).

V případě, že chceme dokázat, že každá konstrukce řešitelná pomocí kružítka a pravítka se dá vyřešit pouze pomocí kružítka, stačí tedy dokázat, že každou z těchto základních konstrukcí lze vykonat jenom pomocí kružítka.

Na začátku této kapitoly jsme si vysvětlovali, kdy se v geometrii kružítka pokládá konstrukce přímky za dokončenou. Z toho nám jasně plyne splnění první základní konstrukce. Druhá a třetí konstrukce jsou taktéž pomocí kružítka snadno vyřešitelné. Čtvrtou a pátou konstrukci jsme si objasnili v této kapitole (viz konstrukce 2.6 a 2.7). Všechny konstrukce řešené pomocí kružítka a pravítka se tudíž dají vyřešit jenom pomocí kružítka, dokázali jsme tedy tzv. Mohr-Mascheroniho tvrzení.

Kapitola 3

Důležité konstrukce kružítkem

V předchozí kapitole jsme dokázali, že každá konstrukce řešitelná pomocí pravítka a kružítka se dá vyřešit pouze kružítkem. K tomuto důkazu jsme si potřebovali ukázat řešení některých konstrukcí.

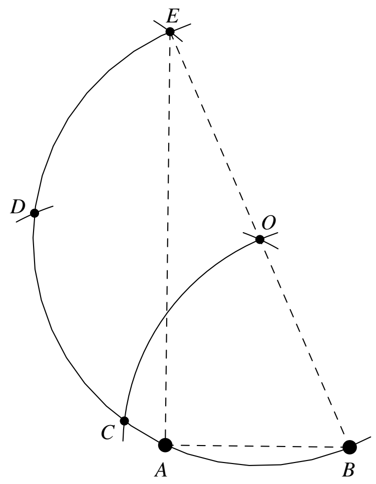
V této kapitole si ukážeme řešení některých zajímavých konstrukcí pouze pomocí kružítka, která jsme nepotřebovali k důkazu v předchozí kapitole. Těmito konstrukcemi se také zabývali Mohr, Mascheroni a Adler. Řešení některých konstrukcí použijeme pak v dalších částech této práce.

Konstrukce 3.1. Sestrojte kolmici k dané úsečce AB v bodě A.

Rozbor. Nejprve sestrojme kružnici k se středem A a poloměrem r (kde r je libovolné číslo takové, že $r > \frac{|AB|}{2}$) a kružnici l se středem B a stejným poloměrem r. V průsečíku těchto dvou kružnic k a l leží bod O. Sestrojili jsme tedy rovnoramenný trojúhelník ABO se základnou AB. Nyní narýsujme kružnici m se středem O a poloměrem r. Na této kružnici musíme najít bod E takový, že úsečka BE je průměrem kružnice m. Pro tento bod platí, že $|BE| = 2 \cdot |BO|$ (viz konstrukce 2.2). Pak ale kružnice m je Thaletova kružnice nad průměrem BE, tedy trojúhelník BEA je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A. Úsečka AE je tedy hledanou kolmicí na stranu AB v bodě A.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. kružnice k;$k(A,r)$, $r > \frac{|AB|}{2}$) libovolné
2. kružnice l; $l(B,r)$
3. bod O; $O = k \cap l$
4. kružnice m; $m(O,r)$
5. bod E; $E \in m$, $|BE| = 2 \cdot |BO|$, $O \in BE$ (konstrukce 2.2) a platí: $AE \perp AB$



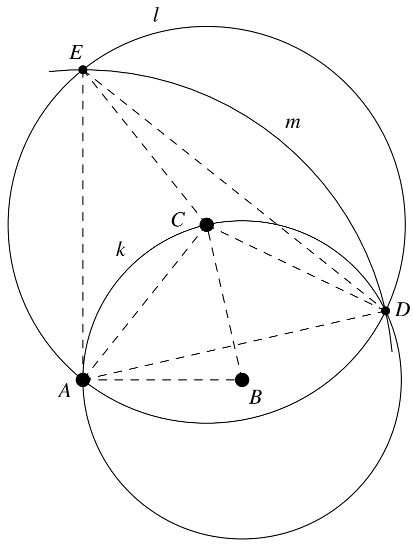
Obrázek 3.1: Kolmice k úsečce AB v bodě A

Poznámka. U této konstrukce si ukážeme ještě jeden způsob řešení.

Rozbor. Nejprve sestrojme kružnici k se středem v bodě B a poloměrem $|BA|$. Nyní zvolme libovolný bod kružnice k a označme jej C. Pak sestrojme kružnici l se středem C a poloměrem $|CA|$. Označme průsečík kružnic k a l jako bod D. Následně sestrojme kružnici m se středem v bodě A a poloměrem $|AD|$. Pokud průsečík kružnic l a m označíme E, pak hledaná kolmice je právě úsečka AE.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. kružnice k; $k(B, |BA|)$
2. bod C; $C \in k$ libovolný
3. kružnice l; $l(C, |CA|)$
4. bod D; $D = k \cap l$
5. kružnice m; $m(A, |AD|)$
6. bod E; $E = l \cap m$ a platí: $AE \perp AB$



Obrázek 3.2: Kolmice k úsečce AB v bodě A (2. způsob)

Důkaz. Víme, že součet velikostí všech tří vnitřních úhlů v trojúhelníku je vždy 180°, proto pro $\triangle ABC$ platí:

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ.$$

Trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AC, tudíž:

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACB|$$

a tedy dostáváme vztah:

$$2 \cdot |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ.$$

Trojúhelník ADC je rovnoramenný se základnou AD. Body A, C dělí kružnici k na dva oblouky. Menšímu z oblouků přísluší středový úhel $\sphericalangle ABC$ a obvodový úhel $\sphericalangle ADC$. Z těchto vlastností plyne:

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADC| = \frac{|\sphericalangle ABC|}{2},$$

$$|\sphericalangle ABC| = 2 \cdot |\sphericalangle CAD|.$$

Trojúhelníky CAD a CAE jsou shodné (podle věty sss), tedy:

$$|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle CAD|.$$

Z výše uvedených vztahů získáme:

$$|\sphericalangle ABC| = 2 \cdot |\sphericalangle CAE|$$

a dále:

$$2 \cdot |\sphericalangle CAB| + 2 \cdot |\sphericalangle CAE| = 180^\circ,$$

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CAE| = 90^\circ.$$

Složením úhlů CAB a CAE dostaneme úhel BAE, potom platí:

$$|\sphericalangle BAE| = 90^\circ.$$

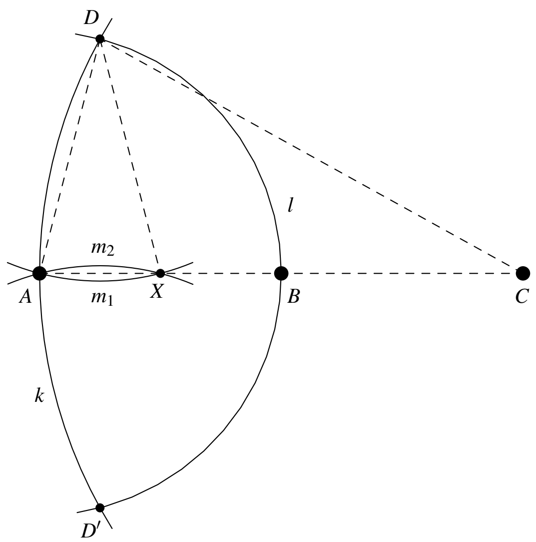
$\square$

Konstrukce 3.2. Nechť je dána úsečka AB, $|AB| = n$. Sestrojte úsečku, která má délku $\frac{1}{n}$, tedy rozdělte úsečku AB na n stejných dílů (kde $n = 2, 3, \dots$).

Rozbor. Sestrojme úsečku AC takovou, že platí: $|AC| = n \cdot |AB|$ (konstrukce 2.2). Pak sestrojme kružnici k se středem C a poloměrem $|CA|$ a kružnici l se středem A a poloměrem $|AB|$. Tyto dvě kružnice se protínají v bodech, které označíme D a D'. Potom sestrojením kružnice m_1 se středem v bodě D a poloměrem $|DA|$ a kružnice m_2 se středem v bodě D' a poloměrem $|D'A|$ získáme 2 průsečíky těchto kružnic. Jeden z nich je bod A a druhý označme X. Pak ale platí: $|AX| = \frac{|AB|}{n}$. Sestrojením dvojnásobku, trojnásobku,..., až n-násobku úsečky AX (viz konstrukce 2.2) získáme ty body úsečky AB, které tuto úsečku rozdělí na n stejných dílků.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. úsečka AC; $|AC| = n \cdot |AB|, B \in AC, n = 2, 3, \dots$ libovolné (konstrukce 2.2)
2. kružnice k; $k(C, |CA|)$
3. kružnice l; $l(A, |AB|)$
4. body D, D'; $\{D, D'\} = k \cap l$
5. kružnice m_1; $m_1(D, |DA|)$
6. kružnice m_2; $m_2(D', |D'A|)$
7. bod X; $X = m_1 \cap m_2$, X leží na úsečce AB a platí: $|AX| = \frac{|AB|}{n}$



Obrázek 3.3: Rozdělení úsečky

Důkaz. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ACD a XDA (úhel u vrcholu A je společný, tedy má stejnou velikost) plyne:

$$\frac{|AD|}{|AX|} = \frac{|AC|}{|AD|},$$

$$|AD|^2 = |AC| \cdot |AX|.$$

Body B, D leží na kružnici $l(A, |AB|)$. Úsečka AC je n-násobkem úsečky AB. Pak tedy platí:

$$|AB| = |AD|,$$

$$|AC| = n \cdot |AB|.$$

Z výše uvedených vztahů dostaneme:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AX|,$$

$$|AC| = n \cdot |AB|,$$

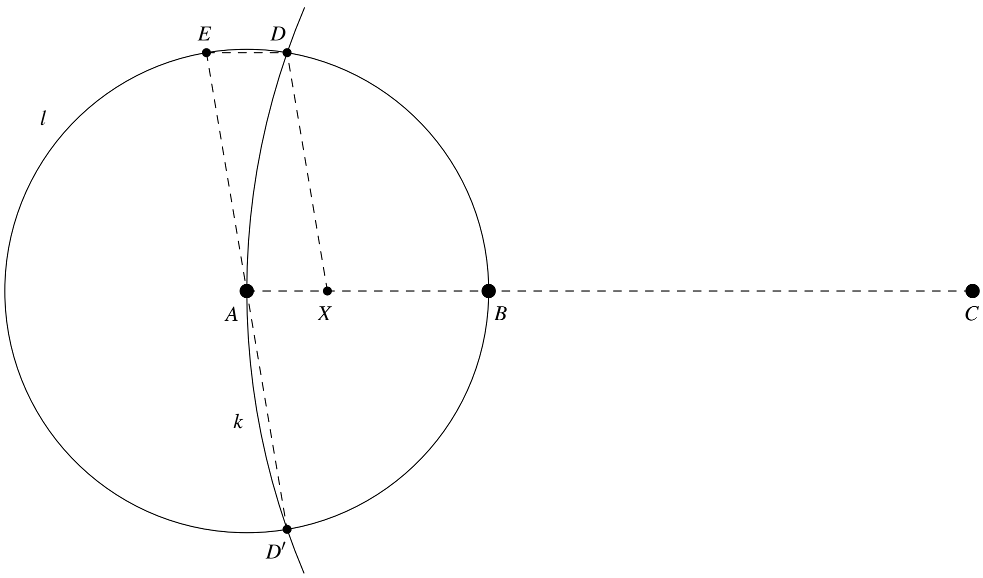
$$|AB|^2 = n \cdot |AB| \cdot |AX|,$$

$$|AB| = n \cdot |AX|$$

$$|AX| = \frac{|AB|}{n}.$$

□

Poznámka. Pro velké hodnoty n se stává tato konstrukce nepřesnou (díky konstrukci bodu X pomocí kružnic m a n). V takovém případě můžeme bod X sestrojit pomocí rovnoběžníku $AXDE$, kde úsečka ED' je průměrem kružnice l.



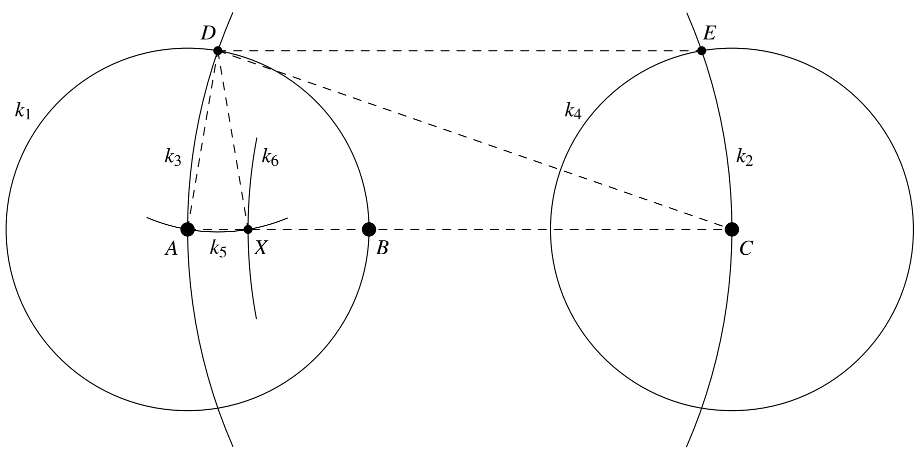
Obrázek 3.4: Rozdělení úsečky (při velkém n)

Tato konstrukce se dá provést i následujícím způsobem.

Rozbor. Zkonstruujme úsečku AC takovou, že $|AC| = n \cdot |AB|$ (konstrukce 2.2). Pak sestrojme kružnici k_1 se středem A a poloměrem $|AB|$, kružnici k_2 se středem A a poloměrem $|AC|$, kružnici k_3 se středem C a poloměrem $|CA|$ a kružnici k_4 se středem C a poloměrem $|AB|$. Dále sestrojme bod D jako průsečík kružnic k_1 a k_3 (vybereme jeden ze dvou průsečíků) a bod E jako průsečík kružnic k_2 a k_4 (zvolíme ten průsečík, který vzhledem k přímce AC leží ve stejné polorovině jako bod D. Nyní narýsujme kružnici k_5 se středem D a poloměrem $|DA|$ a kružnici k_6 se středem C a poloměrem DE. Tyto dvě kružnice k_5 a k_6 se protínají ve dvou bodech, z nichž ale vybereme (a označíme jej X) ten, pro který platí, že leží na úsečce AC. Pro úsečku AX platí: $|AX| = \frac{|AB|}{n}$.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. úsečka AC; $|AC| = n \cdot |AB|$, $B \in AC$, $n = 2, 3, \dots$ libovolné (konstrukce 2.2)
2. kružnice k_1; $k_1(A, |AB|)$
3. kružnice k_2; $k_2(A, |AC|)$
4. kružnice k_3; $k_3(C, |CA|)$
5. kružnice k_4; $k_4(C, |AB|)$
6. bod D; $D = k_1 \cap k_3$ (zvolíme jeden ze dvou průsečíků)
7. bod E; $E = k_2 \cap k_4$, bod E leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod D
8. kružnice k_5; $k_5(D, |DA|)$
9. kružnice k_6; $k_6(C, |DE|)$
10. bod X; $X = k_5 \cap k_6$, X leží na úsečce AC a platí: $|AX| = \frac{|AB|}{n}$



Obrázek 3.5: Rozdělení úsečky (2. způsob)

Důkaz. Bod X leží na přímce AC, protože přímka AC je rovnoběžná s přímkou DE a tedy přímka XC je rovnoběžná s přímkou DE (útvar $CEDX$ je rovnoběžník). Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ACD a XDA (úhel u vrcholu A je společný) plyne:

$$|AX| = \frac{|AB|}{n}$$

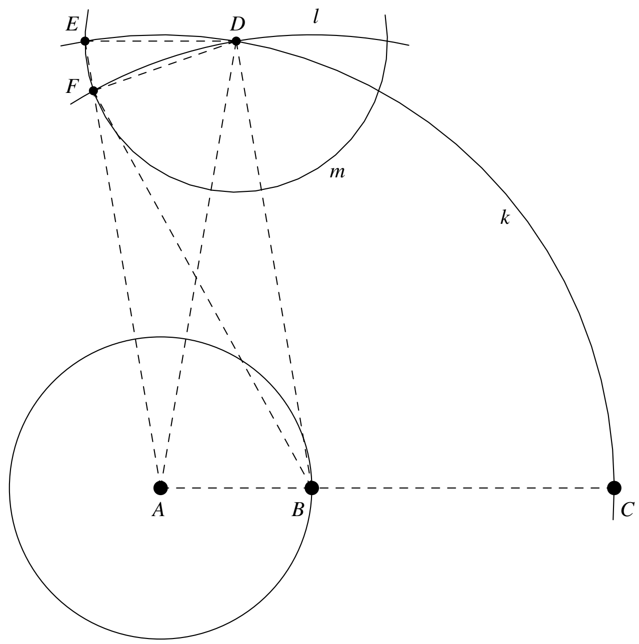
(viz předchozí důkaz). □

Nyní si ukážeme jiné řešení tohoto problému, kdy najdeme úsečku délky $\frac{1}{n}$, která ovšem neleží na zadané úsečce AB.

Rozbor. Sestrojme úsečku AC, pro kterou platí $|AC| = n \cdot |AB|$ (konstrukce 2.2). Dále narýsujme kružnici k se středem A a poloměrem $|AC|$ a kružnici l se středem v bodě B a stejným poloměrem $|AC|$. Tyto dvě kružnice k a l se protínají ve dvou bodech, zvolme libovolně jeden z nich a označme jej D. Sestrojme kružnici m se středem D a poloměrem $|AB|$. Tato kružnice m protíná kružnici k ve dvou bodech, zvolme ten bod, který má od bodu C větší vzdálenost, a označme jej E. Kružnice m však protíná i kružnici l ve dvou bodech, z nichž označíme F ten bod, který leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AD) jako bod E. Vznikla nám úsečka EF taková, že platí: $|EF| = \frac{|AB|}{n}$.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. úsečka AC; $|AC| = n \cdot |AB|$, $B \in AC$, $n = 2, 3, \dots$ libovolné (konstrukce 2.2)
2. kružnice k; $k(A, |AC|)$
3. kružnice l; $l(B, |AC|)$
4. bod D; $D = k \cap l$ (zvolíme jeden ze dvou průsečíků)
5. kružnice m; $m(D, |AB|)$
6. bod E; $E = m \cap k$, zvolíme ten průsečík, který má větší vzdálenost od bodu C
7. bod F; $F = m \cap l$, bod F leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AD) jako bod E a platí: $|EF| = \frac{|AB|}{n}$



Obrázek 3.6: Rozdělení úsečky (3.způsob)

Důkaz. Rovnoramenné trojúhelníky ABD, DEA a DFB jsou shodné podle věty sss. Rovnoramenný trojúhelník DEA je podobný s rovnoramenným trojúhelníkem FED (úhel při vrcholu E je společný). Odtud tedy plyne:

$$\frac{|EF|}{|ED|} = \frac{|ED|}{|EA|}.$$

Protože platí: $|ED| = |AB|$, $|EA| = |AD| = |AC| = n \cdot |AB|$, dostaneme:

$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{|AB|}{n \cdot |AB|},$$

$$|EF| = \frac{|AB|}{n}.$$

□

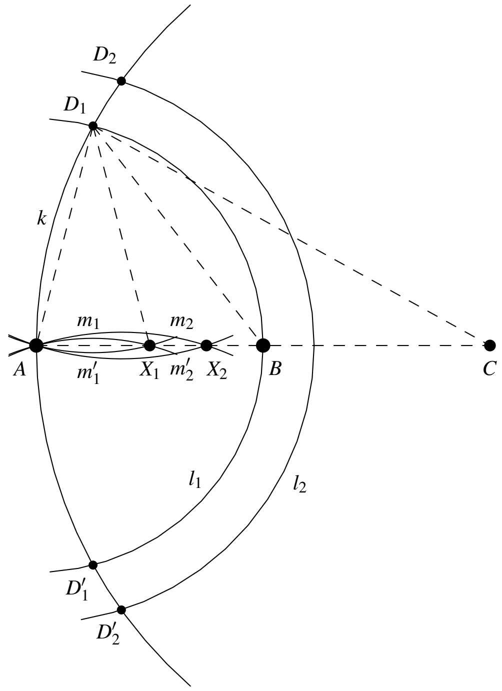
Konstrukce 3.3. Nechť je dána úsečka AB. Sestrojte úsečku, která má délku $\frac{|AB|}{2^n}$, tedy rozdělte danou úsečku na 2^n stejných částí ($n = 2, 3, \ldots$).

Rozbor. Nejprve sestrojme úsečku AC, která má dvojnásobnou délku než úsečka AB, tedy $|AC| = 2 \cdot |AB|$ (konstrukce 2.2). Dále zkonstruujme kružnici k se středem v bodě C a poloměrem $|CA|$ a kružnici l_1 se středem A a poloměrem $|AB|$. Tyto kružnice k a l_1 se

protínají ve dvou bodech, které označme D_1 a D'_1. Nyní narýsujme kružnici m_1 se středem D_1 a poloměrem $|D_1A|$ a kružnici m'_1 se středem D'_1 a poloměrem $|D'_1A|$. Průsečík těchto kružnic, který je různý od bodu A, nazvěme X_1. Platí: $|BX_1| = |AX_1| = \frac{|AB|}{2}$.
Poté sestrojme kružnici l_2 se středem v bodě A a poloměrem $|BD_1|$. Průsečíky této kružnice l_2 s kružnicí k pojmenujme D_2 a D'_2. Pak narýsujme kružnici m_2 se středem D_2 a poloměrem $|D_2A|$ a kružnici m'_2 se středem D'_2 a poloměrem D'_2A. Kružnice m_2 a m'_2 se protínají ve dvou bodech, z nichž jeden je bod A a druhý pojmenujme X_2. Pro úsečku BX_2 platí: $|BX_2| = \frac{|AB|}{2^2}$.
Pokud bychom stejný postup zopakovali, získáme úsečku BX_n, pro kterou platí: $|BX_n| = \frac{|AB|}{2^n}$ $(n = 3, 4, 5, \dots)$.
V případě, že bychom chtěli úsečku AB rozdělit na 2^n stejných částí, musíme sestrojit násobek úsečky BX_n (konstrukce 2.2).

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. úsečka AC; $|AC| = 2 \cdot |AB|$, $B \in AC$ (konstrukce 2.2)
2. kružnice k; $k(C, |CA|)$
3. kružnice l_1; $l_1(A, |AB|)$
4. body D_1, D'_1; $\{D_1, D'_1\} = k \cap l_1$
5. kružnice m_1; $m_1(D_1, |D_1A|)$
6. kružnice m'_1; $m'_1(D'_1, |D'_1A|)$
7. bod X_1; $X_1 = m_1 \cap m'_1$, $X_1 \neq A$
8. úsečka BX_1; $|BX_1| = \frac{|AB|}{2}$
9. kružnice l_2; $l_2(A, |BD_1|)$
10. body D_2, D'_2; $\{D_2, D'_2\} = k \cap l_2$
11. kružnice m_2; $m_2(D_2, |D_2A|)$
12. kružnice m'_2; $m'_1(D'_2, |D'_2A|)$
13. bod X_2; $X_2 = m_2 \cap m'_2$, $X_2 \neq A$ a platí: $|BX_2| = \frac{|AB|}{2^2}$
14. postup opakujeme a získáme body X_n; $|BX_n| = \frac{|AB|}{2^n}$ $(n = 3, 4, \dots)$



Obrázek 3.7: Rozdělení úsečky na 2^n stejných částí

Důkaz. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ACD_1 a AD_1X_1 (úhel při vrcholu A je shodný) plyne:

$$\frac{|AX_1|}{|AD_1|} = \frac{|AD_1|}{|AC|}.$$

Protože $|AC| = 2 \cdot |AB|$ a $|AD_1| = |AB|$, potom:

$$\frac{|AX_1|}{|AB|} = \frac{|AB|}{2 \cdot |AB|},$$

$$|AX_1| = \frac{|AB|}{2}.$$

Úsečka BD_1 je těžnicí trojúhelníku ACD_1, tedy podle Apolloniovy věty platí:

$$4 \cdot |BD_1|^2 + |AC|^2 = 2 \cdot |AD_1|^2 + 2 \cdot |CD_1|^2,$$

$$4 \cdot |BD_1|^2 = 2 \cdot |AD_1|^2 + 2 \cdot |CD_1|^2 - |AC|^2.$$

Dále z následujících vztahů: $|AD_1| = |AB|$, $|CD_1| = |AC|$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$ plyne:

$$4 \cdot |BD_1|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AC|^2 - |AC|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + |AC|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 4 \cdot |AB|^2,$$

$$4 \cdot |BD_1|^2 = 6 \cdot |AB|^2,$$

$$|BD_1|^2 = \frac{3}{2} \cdot |AB|^2. \tag{3.1}$$

Jelikož jsou rovnoramenné trojúhelníky ACD_2 a AD_2X_2 podobné (mají shodný úhel u vrcholu A), platí:

$$\frac{|AX_2|}{|AD_2|} = \frac{|AD_2|}{|AC|}$$

a neboť platí: $|AD_2| = |BD_1|$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$, získáme:

$$\frac{|AX_2|}{|BD_1|} = \frac{|BD_1|}{2 \cdot |AB|},$$

$$|AX_2| = \frac{|BD_1|^2}{2 \cdot |AB|}.$$

Použitím vztahu (3.1) dostaneme:

$$|AX_2| = \frac{\frac{3}{2} \cdot |AB|^2}{2 \cdot |AB|} = \frac{3}{4} \cdot |AB|$$

a tedy pro velikost úsečky $|BX_2|$ platí následují vztah:

$$|BX_2| = \frac{1}{4} = \frac{|AB|}{2^2}.$$

Podobně bychom mohli odvodit vztahy pro další úsečky BX_3, BX_4. . . .
Obecně tedy platí:

$$|BX_n| = \frac{|AB|}{2^n}.$$

□

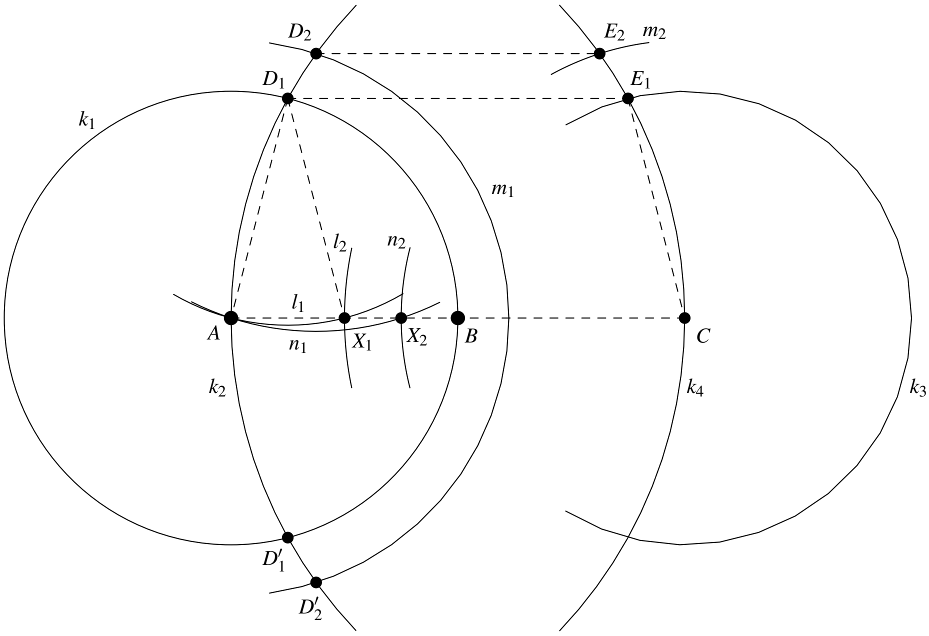
Pokud budou hodnoty n vyšší, může nastat situace, že bod X_n nebude jasně definován (kružnice m_n a m'_n, které definují tento bod, budou splývat s ostatními kružnicemi). V takovém případě použijeme následující způsob konstrukce.

Rozbor. Sestrojme úsečku AC takovou, že platí: $|AC| = 2 \cdot |AB|$ (konstrukce 2.2). Narýsujme kružnici k_1 se středem A a poloměrem $|AB|$ a kružnici k_2 se středem C a poloměrem $|CA|$. Tyto dvě kružnice k_1 a k_2 se protínají ve dvou bodech, označme je D_1 a D'_1. Poté narýsujme kružnici k_3 se středem C a poloměrem $|CB|$ a kružnici k_4 se středem v bodě A a poloměrem $|AC|$. Jeden z průsečíků kružnic k_3 a k_4 označme E_1. Tento bod ale nevybereme libovolně, nýbrž vybereme právě ten z průsečíků, který leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod D_1. Dále zkonstruujme kružnici l_1 se středem v bodě D_1 a poloměrem $|D_1A|$ a kružnici l_2 se středem C a poloměrem $|D_1E_1|$. Kružnice l_1 a l_2 se protínají ve dvou bodech. Ten, který leží na úsečce AB, pojmenujme X_1. Pro úsečku BX_1 platí: $|BX_1| = \frac{|AB|}{2}$. Navíc po sestrojení kružnice m_1 se středem A a poloměrem $|BD_1|$ a kružnice m_2 se středem v bodě C a poloměrem $|BD_1|$ získáme průsečíky kružnice m_1 a k_2 a průsečíky kružnic m_2 a k_4. Průsečíky kružnic m_1 a k_2 označíme D_2 a D'_2 tak, že bod, který leží ve stejné polorovině

jako body D_1 a E_1 (vzhledem k přímce AC), označíme D_2. Z průsečíků kružnic m_2 a k_4 vybereme ten, který leží ve stejné polorovině jako body D_1 a E_1 (vzhledem k přímce AC) a nazveme jej E_2. Nyní máme zkonstruovány úsečky AD_2, CE_2 a BD_1, které mají všechny stejnou délku. Pak sestrojme kružnici n_1 se středem v bodě D_2 a poloměrem $|D_2A|$ a kružnici n_2 se středem C a poloměrem $|D_2E_2|$. Jedním z průsečíků kružnic n_1 a n_2 je bod, který leží na úsečce AB, a ten označme X_2. Zkonstruovali jsme nyní úsečku BX_2, pro kterou platí: $|BX_2| = \frac{|AB|}{2^2}$.
Podobně můžeme tento postup opakovat a získáme úsečku BX_n takovou, že: $|BX_n| = \frac{|AB|}{2^n}$ $(n = 3, 4, \dots)$.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. úsečka AC; $|AC| = 2 \cdot |AB|$, $B \in AC$ (konstrukce 2.2)
2. kružnice k_1; $k_1(A, |AB|)$
3. kružnice k_2; $k_2(C, |CA|)$
4. body D_1, D'_1; $\{D_1, D'_1\} = k_1 \cap k_2$
5. kružnice k_3; $k_3(C, |CB|)$
6. kružnice k_4; $k_4(A, |AC|)$
7. bod E_1; $E_1 = k_3 \cap k_4$, E_1 leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod D_1
8. kružnice l_1; $l_1(D_1, |D_1A|)$
9. kružnice l_2; $l_2(C, |D_1E_1|$
10. bod X_1; $X_1 = l_1 \cap l_2$, $X_1 \in AB$
11. úsečka BX_1; $|BX_1| = \frac{|AB|}{2}$
12. kružnice m_1; $m_1(A, |BD_1|)$
13. body D_2, D'_2; $\{D_2, D'_2\} = m_1 \cap k_2$, D_2 leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako body D_1 a E_1
14. kružnice m_2; $m_2(C, |BD_1|)$
15. bod E_2; $D_2 = m_2 \cap k_4$, E_2 leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako body D_1 a E_1
16. kružnice n_1; $n_1(D_2, |D_2A|)$
17. kružnice n_2; $n_2(C, |D_2E_2|)$
18. bod X_2; $X_2 = n_1 \cap n_2$, $X_2 \in AB$ a platí: $|BX_2| = \frac{|AB|}{2^2}$
19. postup opakujeme a dostaneme body X_n; $|BX_n| = \frac{|AB|}{2^n}$ $(n = 3, 4, \dots)$



Obrázek 3.8: Rozdělení úsečky na 2^n stejných částí (při velkém n)

Důkaz. Protože úsečka AC je rovnoběžná s úsečkou D_1E_1 (útvar ACE_1D_1 je lichoběžník) a úsečka X_1C je rovnoběžná s úsečkou D_1E_1 (útvar $X_1CE_1D_1$ je rovnoběžník), pak úsečka X_1C je rovnoběžná s úsečkou AC, tedy bod X_1 leží na úsečce AC. Stejným způsobem můžeme dokázat, že body $X_2, X_3, \ldots, X_n$ leží na úsečce AC.
Z předešlých úvah plyne, že $|D_1X_1| = |D_1'X_1|$, $|D_2X_2| = |D_2'X_2|, \ldots$. S využitím toho, co bylo dokázáno v důkazu prvního způsobu této konstrukce, získáme: $|BX_1| = \frac{|AB|}{2}$, $|BX_2| = \frac{|AB|}{2^2}, \ldots, BX_n$; $|BX_n| = \frac{|AB|}{2^n}$ $(n = 3, 4, \ldots)$. □

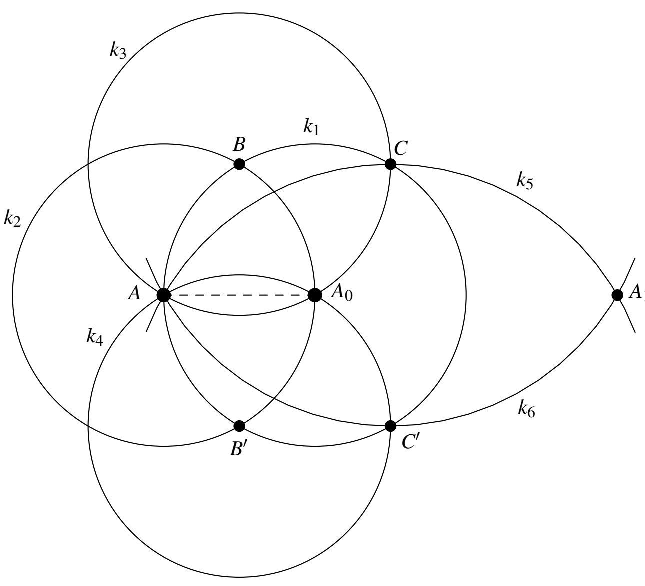
Konstrukce 3.4. Sestrojte úsečku, která je 3^n-krát delší než zadaná úsečka AA_0 $(n = 2, 3, \ldots)$.

Rozbor. Nejprve narýsujeme kružnici k_1 se středem v bodě A_0 a poloměrem $r_1 = |A_0A|$. Poté pomocí kružnice k_2 se středem A a poloměrem r_1 nalezneme body B a B', což jsou průsečíky této kružnice k_2 s kružnicí k_1. Dále zkonstruujme kružnici k_3 se středem B a poloměrem r_1 a kružnici k_4 se středem B' a poloměrem r_1. Průsečík kružnic k_1 a k_3, který je různý od bodu A, pojmenujme C. Kružnice k_1 a k_4 se protínají ve dvou bodech, z nichž jeden je bod A a druhý označme C'. Sestrojili jsme tedy úsečky AB a BC, pro které platí: $|AB| = |BC|$, a úsečky AB', $B'C'$, pro které rovněž platí: $|AB'| = |B'C'|$. Nyní sestrojme kružnici k_5 se středem C' a poloměrem $|C'A|$ a kružnici k_6 se středem C a poloměrem $|CA|$. Tyto dvě kružnice k_5 a k_6 se protínají ve dvou bodech, jeden z nich je bod A a druhý pojmenujme A_1. Získali jsme úsečku AA_1, pro kterou platí: $|AA_1| = 3 \cdot |AA_0|$.

Nyní pokud stejný postup, který jsme aplikovali na úsečku AA_0, použijeme pro úsečku AA_1, dostaneme úsečku AA_2 takovou, že: $|AA_2| = 3 \cdot |AA_1| = 3 \cdot 3 \cdot |AA_0| = 3^2 \cdot |AA_0|$. Opakováním stejného postupu dostaneme libovolnou úsečku AA_n, pro kterou platí: $|AA_n| = 3^n \cdot |AA_0|$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

Popis konstrukce.

0. úsečka AA_0, $|AA_0| = r_1$
1. kružnice k_1; $k_1(A_0, r_1)$
2. kružnice k_2; $k_2(A, r_1)$
3. body B, B'; $\{B, B'\} = k_1 \cap k_2$
4. kružnice k_3; $k_3(B, r_1)$
5. kružnice k_4; $k_4(B', r_1)$
6. bod C; $C = k_1 \cap k_3$, $C \neq A$
7. bod C'; $C' = k_1 \cap k_4$, $C' \neq A$
8. kružnice k_5; $k_5(C', |C'A|)$
9. kružnice k_6; $k_6(C, |CA|)$
10. bod A_1; $A_1 = k_5 \cap k_6$, $A_1 \neq A$ a platí: $|AA_1| = 3 \cdot |AA_0|$
11. opakováním stejného postupu s úsečkou AA_1 získáme bod A_2; $|AA_2| = 3^2 \cdot |AA_0|$
12. postup opakujeme a dostaneme body A_n; $|AA_n| = 3^n \cdot |AA_0|$ $(n = 3, 4, \ldots)$



Obrázek 3.9: Úsečka 3^n-krát delší $(n = 1, 2, \ldots)$

Důkaz. Trojúhelníky AA_0B a BA_0C jsou rovnostranné, tedy: $|\sphericalangle AA_0C| = 120^\circ$. Pak v trojúhelníku AA_0C použijeme kosinovu větu a získáme:

$$|AC|^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot \cos 120^\circ,$$

$$|AC|^2 = 2 \cdot r_1^2 - 2 \cdot r_1^2 \cdot (-\frac{1}{2}),$$

$$|AC|^2 = 3 \cdot r_1^2.$$

Dále víme, že trojúhelníky ACC' a A_1CC' jsou shodné rovnostranné trojúhelníky (podle věty sss) a tedy trojúhelník AA_1C je rovnoramenný se základnou AA_1 a platí:

$$|\sphericalangle A_1AC| = |\sphericalangle AA_1C| = 30^\circ, |\sphericalangle ACA_1| = 120^\circ.$$

Pokud v tomto rovnoramenném trojúhelníku AA_1C použijeme kosinovu větu, získáme:

$$|AA_1|^2 = |AC|^2 + |A_1C|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |A_1C| \cdot \cos 120^\circ,$$

$$|AA_1|^2 = |AC|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AC| \cdot (-\frac{1}{2}),$$

$$|AA_1|^2 = 3 \cdot |AC|^2.$$

Z výše uvedených vztahů potom dostaneme:

$$|AA_1| = 3 \cdot 3 \cdot r_1^2, |AA_1| = 9 \cdot r_1^2,$$

a jelikož jsou čísla $x, y, r_1 > 0$, pak platí:

$$y = 3 \cdot r_1.$$

□

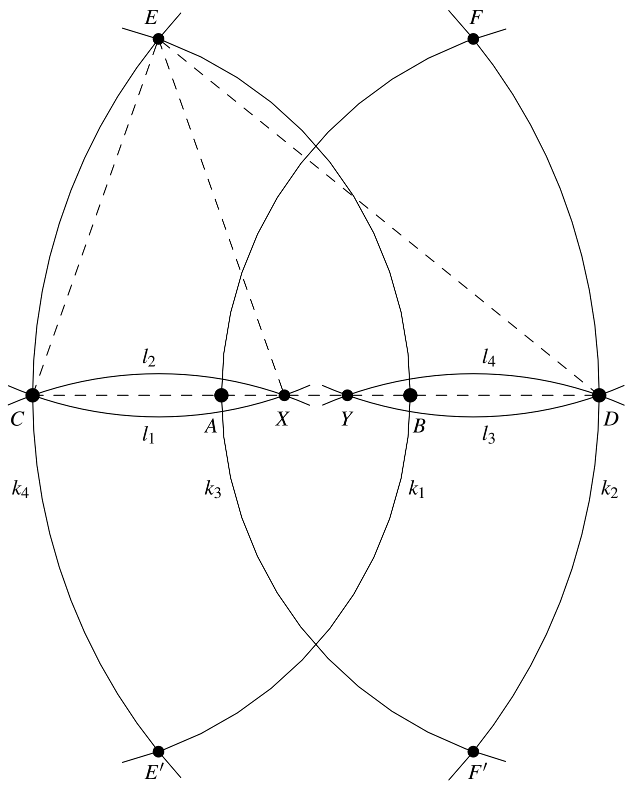
V následujícím problému si ukážeme elegantní způsob řešení této konstrukce podle Mascheroniho.

Konstrukce 3.5. Rozdělte zadanou úsečku AB na tři stejné části.

Rozbor. Nejprve sestrojme úsečku AD takovou, že $|AD| = 2 \cdot |AB|$, a dále sestrojme úsečku BC, pro kterou platí: $|BC| = 2 \cdot |BA|$ (viz konstrukce 2.2). Poté narýsujme kružnici k_1 se středem C a poloměrem $|CB|$, kružnici k_2 se středem v bodě C a poloměrem $|CD|$, kružnici k_3 se středem D a poloměrem $|DA|$ a kružnici k_4 se středem D a poloměrem $|DC|$. Průsečíky kružnic k_1 a k_4 označme E a E' a průsečíky kružnic k_2 a k_3 označme F a F'. Pak konstruujme kružnici l_1 se středem v bodě E a poloměrem $|EC|$ a kružnici l_2 se středem E' a poloměrem $|E'C|$. Tyto dvě kružnice l_1 a l_2 se protínají ve dvou bodech, z nichž jeden je bod C a druhý pojmenujme X. Potom sestrojme kružnici l_3 se středem F a poloměrem $|FD|$ a kružnici l_4 se středem F' a poloměrem $|F'D|$. Jedním z průsečíků je bod D a druhý průsečík označme Y. Body X, Y rozdělují úsečku AB na tři stejné části.

Popis konstrukce.

0. úsečka AB
1. úsečka BC; $|BC| = 2 \cdot |BA|$, $A \in BC$ (kostrukce 2.2)
2. úsečka AD; $|AD| = 2 \cdot |AB|$, $B \in AD$ (kostrukce 2.2)
3. kružnice k_1; $k_1(C, |CB|)$
4. kružnice k_2; $k_2(C, |CD|)$
5. kružnice k_3; $k_3(D, |DA|)$
6. kružnice k_4; $k_4(D, |DC|)$
7. body $\{E, E'\} = k_1 \cap k_4$
8. body $\{F, F'\} = k_2 \cap k_3$
9. kružnice l_1; $l_1(E, |EC|)$
10. kružnice l_2; $l_2(E', |E'C|)$
11. bod X; $X = l_1 \cap l_2$, $X \neq C$
12. kružnice l_3; $l_3(F, |FD|)$
13. kružnice l_4; $l_4(F', |F'D|)$
14. bod Y; $Y = l_3 \cap l_4$, $Y \neq D$ a platí: $|AX| = |XY| = |YB|$



Obrázek 3.10: Rozdělení úsečky na 3 části

Důkaz. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků CEX a CDE plyne:

$$\frac{|CX|}{|CE|} = \frac{|CE|}{|CD|}$$

a protože platí: $|CE| = |CB| = 2 \cdot |AB|$ a $|CD| = 3 \cdot |AB|$, dostaneme:

$$\frac{|CX|}{2 \cdot |AB|} = \frac{2 \cdot |AB|}{3 \cdot |AB|},$$

$$|CX| = \frac{4}{3} \cdot |AB|,$$

$$|AX| = |CX| - |AC| = \frac{4}{3} \cdot |AB| - |AB| = \frac{|AB|}{3}.$$

□

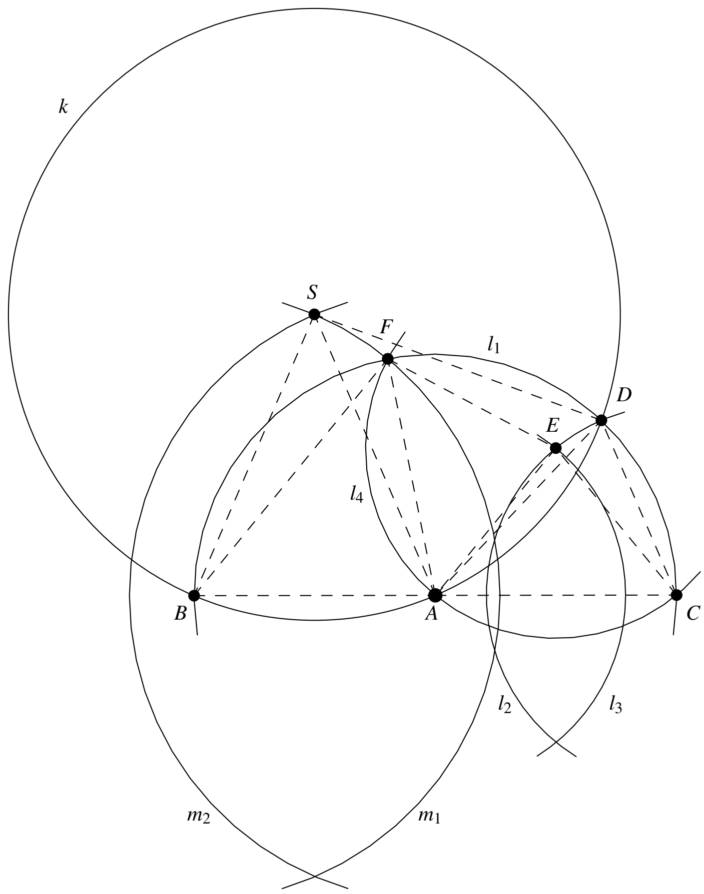
Konstrukce 3.6. Sestrojte střed dané kružnice k.

Rozbor. Na zadané kružnici k zvolte libovolně bod a označme jej A. Nyní zkonstruujme kružnici l_1 se středem v bodě A a libovolným poloměrem r takovým, že tento poloměr r je větší než polovina poloměru zadané kružnice k. Kružnice k a l_1 se protínají ve dvou bodech, které pojmenujme B a D. Sestrojme bod C takový, že bod C je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem A. Na nalezení tohoto bodu využijeme konstrukci 2.2, kdy vlastně nalezneme úsečku BC, pro kterou platí: $|BC| = 2 \cdot |BA|$. Dále narýsujeme kružnici l_2 se středem C a poloměrem $|CD|$ a kružnici l_3 se středem A a poloměrem $|CD|$. Průsečíky kružnice l_2 a l_3 jsou dva body, z nichž vyberme ten, který leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod D a označme jej E. Pak sestrojme kružnici l_4 se středem E a poloměrem $|CD|$, jejíž průsečík s kružnicí l_1, který není bodem C, nazveme F. Délka úsečky BF je rovna délce poloměru zadané kružnice k. Zkonstruujme tedy kružnici m_1 se středem B a poloměrem $|BF|$ a kružnici m_2 se středem A a poloměrem $|BF|$, které se protínají ve dvou bodech. Ten průsečík, který leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod F, označme S. Bod S je hledaným středem zadané kružnice k.

Popis konstrukce.

0. kružnice k
1. bod A; $A \in k$ libovolný
2. kružnice l_1; $l_1(A, r)$, r větší než polovina poloměru kružnice k
3. body B, D; $\{B, D\} = k \cap l_1$
4. bod C; $|BC| = 2 \cdot |BA|$, $A \in BC$ (konstrukce 2.2)
5. kružnice l_2; $l_2(C, |CD|)$
6. kružnice l_3; $l_3(A, |CD|)$
7. bod E; $E = l_2 \cap l_3$, E leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod D
8. kružnice l_4; $l_4(E, |CD|)$

9. bod F; $F = l_4 \cap l_1$, $F \neq C$
10. kružnice m_1; $m_1(B, |BF|)$
11. kružnice m_2; $m_2(A, |BF|)$
12. bod S; $S = m_1 \cap m_2$, S leží ve stejné polorovině (vzhledem k přímce AC) jako bod F a platí: S je střed kružnice k



Obrázek 3.11: Střed kružnice

Důkaz. Rovnoramenné trojúhelníky ACE a AFE jsou shodné (podle věty sss), tudíž dostaneme:

$$|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle ACE|.$$

Dále platí:

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle CAE| = 180^\circ - |\sphericalangle CAE|. \tag{3.2}$$

Protože součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je roven 180°, pro rovnoramenný trojúhelník ACE získáme rovnost:

$$2 \cdot |\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle AEC| = 180^\circ. \tag{3.3}$$

Z platných vztahů 3.2 a 3.3 plyne:

$$|\sphericalangle BAE| = 2 \cdot |\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle AEC| - |\sphericalangle CAE|,$$

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle AEC|. \tag{3.4}$$

Navíc je zřejmé, že platí:

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle FAE|,$$

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle CAE|, \tag{3.5}$$

tedy ze vztahů 3.4 a 3.5 získáme:

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle AEC|.$$

Proto rovnoramenné trojúhelníky BAF a AEC jsou podobné, z čehož dostaneme:

$$\frac{|FB|}{|BA|} = \frac{|AC|}{|CE|}$$

a jelikož platí: $|FB| = |SB|$, $|CE| = |CD|$, získáme:

$$\frac{|SB|}{|BA|} = \frac{|AC|}{|CD|}.$$

Z posledního vztahu vyplývá, že rovnoramenné trojúhelníky SBA a ACD jsou podobné, platí tedy:

$$|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle ACD|. \tag{3.6}$$

Dále pro oblouk BD kružnice l_1 platí vztah středového $\sphericalangle BAD$ a obvodového $\sphericalangle ACD$:

$$\frac{|\sphericalangle BAD|}{2} = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ACD|.$$

Nyní získáme:

$$|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle ACD| = \frac{|\sphericalangle BAD|}{2},$$

$$|\sphericalangle BAS| = \frac{|\sphericalangle BAD|}{2} = |\sphericalangle SAD|.$$

Z posledního vztahu plyne, že rovnoramenné trojúhelníky BAS a DAS jsou shodné. Potom ale platí:

$$|BS| = |AS| = |DS|.$$

Bod S je tedy hledaným středem zadané kružnice k. □

Kapitola 4

Kruhová inverze

Koncem 19. století aplikoval August Adler principy kruhové inverze na geometrické konstrukce pouze kružítkem. S pomocí kruhové inverze vybudoval obecnou metodu řešení geometrických konstrukcí pouze pomocí kružítka.

V této kapitole se budeme nejprve věnovat definici kruhové inverze, poté si probereme její základní vlastnosti. V další části si ukážeme konkrétní řešení některých konstrukcí, ve kterých se vyskytuje kruhová inverze.

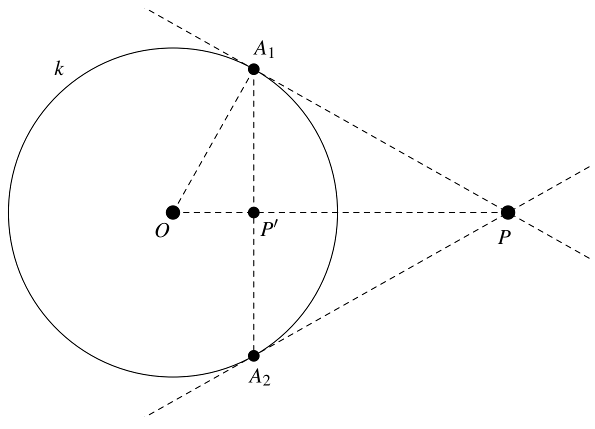
Závěr této kapitoly čtenáři popíše využití kruhové inverze při řešení konstrukcí pouze kružítkem.

4.1 Základní vlastnosti

Definice 1. Nechť je v euklidovské rovině dána kružnice k se středem v bodě O a poloměrem r a nechť je dán bod P různý od bodu O. Na polopřímce OP nalezneme takový bod P', pro který platí, že součin délek úseček OP a OP' je roven druhé mocnině poloměru r zadané kružnice k, tedy:

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2.$$

Zobrazení, které každému bodu P různému od bodu O přiřadí bod P' s výše uvedenými vlastnostmi, nazýváme *kruhová inverze*. Kružnice k se nazývá *kružnice inverze*, bod S se nazývá *střed kruhové inverze*.



Obrázek 4.1: Kruhová inverze

Věta 4.1.1. Nechť je dána kruhová inverze kružnicí $k(O,r)$. Jestliže je bod P' obrazem bodu $P \neq O$ v kruhové inverzi dané kružnicí k, pak je i bod P obrazem bodu P' ve stejné kruhové inverzi.

Důkaz. Nechť P je libovolný bod takový, že $P \neq O$. Pak obraz bodu P v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ označme P' a obraz bodu P' ve stejné kruhové inverzi označme P''. Nyní chceme dokázat, že $P = P''$. Z definice 1 plyne, že polopřímky OP a OP'' jsou totožné. Dále dostáváme rovnosti:

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2 \qquad \text{a} \qquad |OP'| \cdot |OP''| = r^3,$$

z nichž plyne:

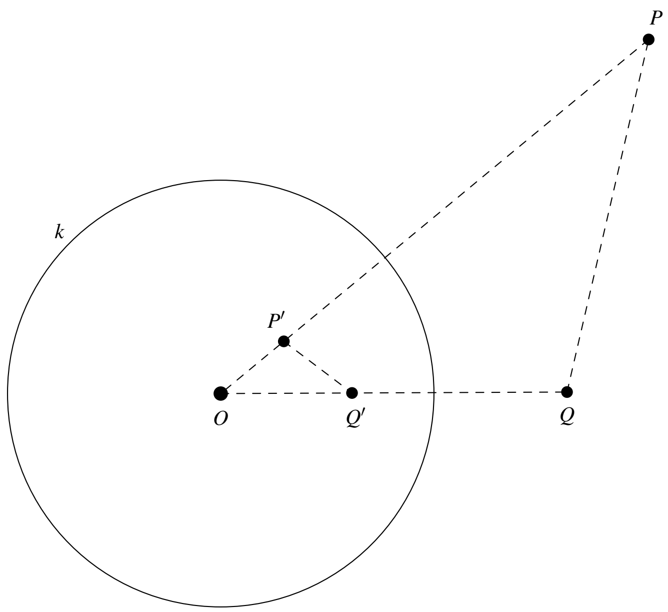
$$|OP| = |OP''|.$$

Protože polopřímky OP a OP'' jsou totožné, musí tedy platit, že: $P = P''$. □

Poznámka. Nechť bod P je vnějším bodem kružnice inverze $k(O,r)$. Pak sestrojením tečen z bodu P ke kružnici k získáme dva body dotyku A_1 a A_2. Průsečík úseček OP a A_1A_2 označme P'. Jelikož jsou tyto dvě úsečky na sebe kolmé, získáme pro pravoúhlý trojúhelník OA_1P s pomocí euklidovy věty o odvěsně vztah: $|OP| \cdot |OP'| = |OA_1| = r^2$, tedy bod P' je obrazem bodu P v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$.

Věta 4.1.2. Jestliže body P' a Q' jsou obrazy různých bodů P a Q v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$, kde $P \neq O \neq Q$, pak platí:

$$|\sphericalangle OQ'P'| = |\sphericalangle OPQ| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle OP'Q'| = |\sphericalangle OQP|.$$



Obrázek 4.2: Věta 4.1.2

Důkaz. Ze vztahu:

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2 = |OQ| \cdot |OQ'|$$

plyne:

$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|},$$

tedy trojúhelníky $OQ'P'$ a OPQ jsou podobné a platí:

$$|\sphericalangle OQ'P'| = |\sphericalangle OPQ| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle OP'Q'| = |\sphericalangle OQP|.$$

□

Věta 4.1.3. Nechť je dána kruhová inverze kružnicí $k(O,r)$. Jestliže se dvě křivky protínají v bodě $P \neq O$, pak obrazy těchto křivek v dané kruhové inverzi se protínají v bodě P', který je obrazem bodu P.

Důkaz. Plyne přímo z definice 1. □

Věta 4.1.4. Nechť je dána kruhová inverze kružnicí $k(O,r)$. Jestliže přímka p prochází středem O kružnice k, pak je samodružná, tedy pro obraz p' platí: $p = p'$.

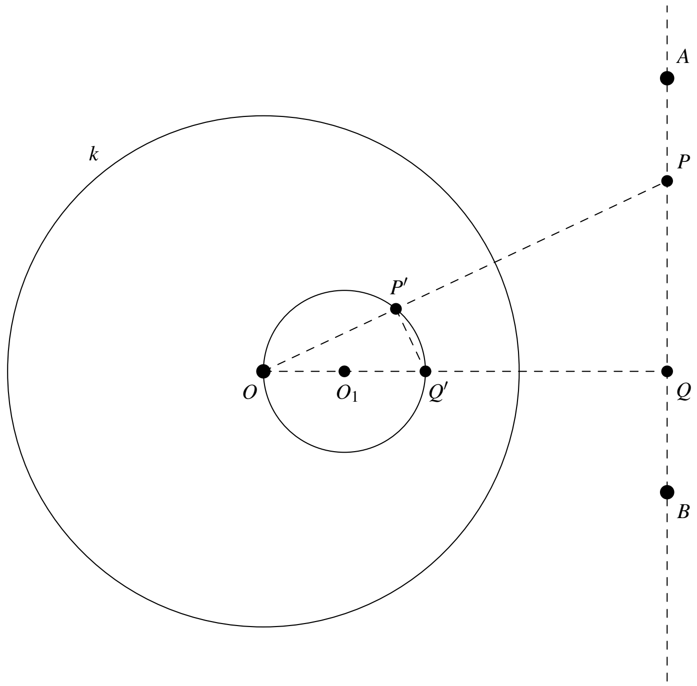
Důkaz. Plyne přímo z definice 1. □

Věta 4.1.5. Nechť je dána kruhová inverze kružnicí $k(O,r)$. Jestliže přímka p daná body A,B neprochází středem O kružnice k, pak jejím obrazem je kružnice l se středem v bodě O_1 a poloměrem $|OO_1|$ a platí: $O \in l \wedge OO_1 \perp AB$.

Důkaz. Mějme kruhovou inverzi danou kružnicí $k(O,r)$. Nechť Q je pata kolmice z bodu O na přímku p danou body A,B. Obraz bodu Q v kruhové inverzi dané kružnicí k nazvěme Q'. Zvolme libovolný bod na přímce p, který je různý od Q, označme jej P a jeho obraz v kruhové inverzi dané kružnicí k označme P'. Podle věty 4.1.2 platí: $|\sphericalangle OP'Q'| = |\sphericalangle OQP$, v tomto případě platí:

$$|\sphericalangle OP'Q'| = |\sphericalangle OQP| = 90^\circ.$$

Tudíž pokud budeme posouvat bodem P po přímce p, bude obraz P' tohoto bodu v kruhové inverzi dané kružnicí k opisovat Thaletovu kružnici nad průměrem OQ'.



Obrázek 4.3: Věta 4.1.5

□

Věta 4.1.6. Nechť je dána kruhová inverze kružnicí $k(O,r)$. Jestliže kružnice l_1 neprochází bodem O (středem kruhové inverze), pak jejím obrazem l_2 je také kružnice. Navíc bod O je středem stejnolehlosti kružnic l_1 a l_2.

Důkaz. Nechť je dána kruhová inverze kružnicí $k(O,r)$ a nechť $l_1(O_1,r_1)$ je kružnice, která neprochází bodem O. Pak průsečíky kružnice k a přímky dané body O a O_1 označme A a B. Obrazy těchto bodů A a B v kruhové inverzi dané kružnicí k nazveme po řadě A' a B'. Zvolme libovolný bod na kružnici l_1 různý od bodů A,B a pojmenujme jej P. Pak jeho obraz v kruhové inverzi dané kružnicí k označme P'. Podle věty 4.1.2 platí:

$$|\sphericalangle OA'P'| = |\sphericalangle OPA| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle OB'P'| = |\sphericalangle OPB|. \tag{4.1}$$

V trojúhelníku $A'B'P'$ platí pro součet vnitřních úhlů následující rovnost:

$$|\sphericalangle A'B'P'| + |\sphericalangle A'P'B'| + |\sphericalangle B'A'P'| = 180^\circ,$$

$$|\sphericalangle A'P'B'| + |\sphericalangle B'A'P'| = 180^\circ - |\sphericalangle A'B'P'|.$$

Dále platí:

$$|\sphericalangle OB'P'| = |\sphericalangle OB'A'| - |\sphericalangle A'B'P'|,$$
$$|\sphericalangle OB'P'| = 180^\circ - |\sphericalangle A'B'P'|.$$

Z výše uvedených vztahů a díky rovnosti: $|\sphericalangle B'A'P'| = |\sphericalangle OA'P'|$ dostaneme:

$$|\sphericalangle A'P'B'| + |\sphericalangle B'A'P'| = |\sphericalangle OB'P'|,$$

$$|\sphericalangle A'P'B'| + |\sphericalangle OA'P'| = |\sphericalangle OB'P'|,$$
$$|\sphericalangle A'P'B'| = |\sphericalangle OB'P'| - |\sphericalangle OA'P'|. \quad (4.2)$$

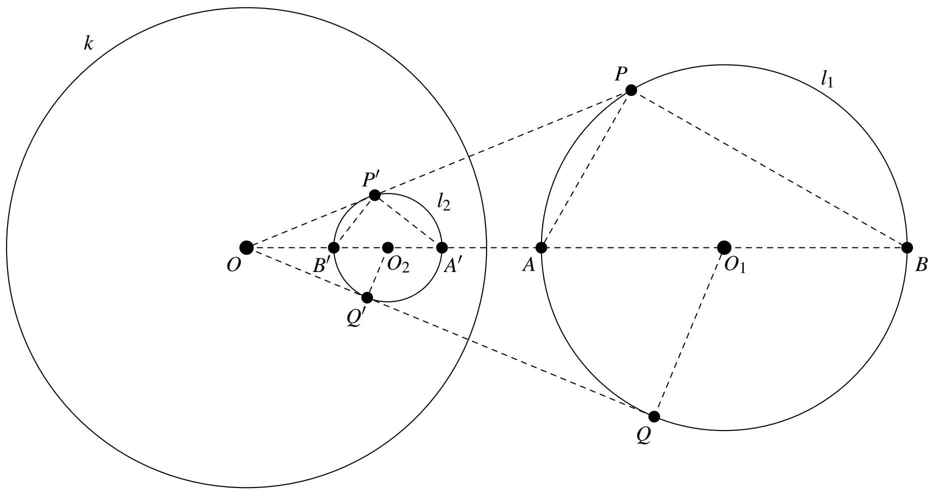
V trojúhelníku OBP platí:

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle OPB| - |\sphericalangle OPA|. \quad (4.3)$$

Pak ze vztahů (4.1), (4.2) a (4.3) plyne:

$$|\sphericalangle A'P'B'| = |\sphericalangle APB| = 90^\circ.$$

Pokud tedy bod P zvolíme libovolně na kružnici l_1, bude jeho inverze P' ležet na kružnici l_2 se středem O_2 a poloměrem $|O_2P'|$, kde $A'B'$ bude průměr této kružnice.



Obrázek 4.4: Věta 4.1.6

□

4.2 Konstrukce

Uplatnění metody kruhové inverze poskytuje obecnější pohled na konstrukce jenom pomocí kružítka a jejich řešení. I když jsou tato řešení velmi elegantní, Mohr a Mascheroni je získali umělými postupy, tudíž se nabízí otázka, jak byla tato řešení nalezena.

Konstrukce 4.1. Sestrojte bod X takový, že je obrazem daného bodu C v kruhové inverzi určené danou kružnicí $k(O,r)$.

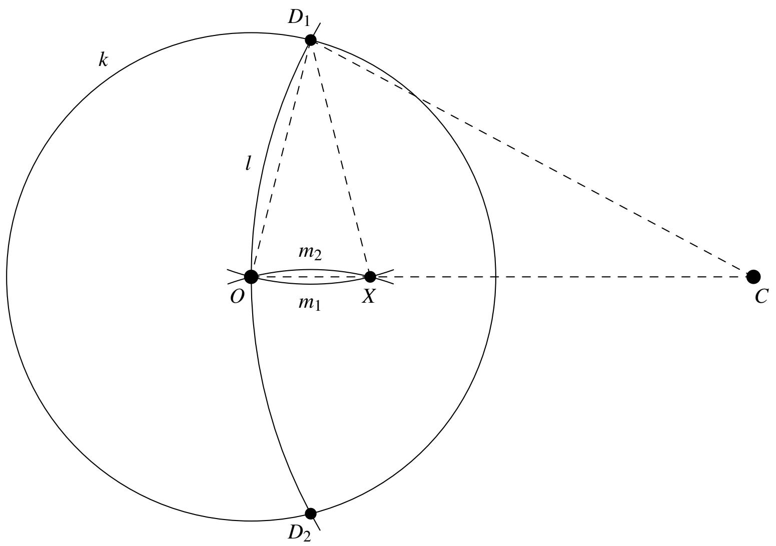
Rozbor. Tato konstrukce se nám rozpadne na dva případy, tedy buď $|OC| > \frac{r}{2}$ nebo $|OC| \leq$ $\leq \frac{r}{2}$.

a) $|OC| > \frac{r}{2}$

Nechť je dána kružnice k se středem v bodě O a poloměrem r. Pak sestrojme kružnici l se středem C a poloměrem $|CO|$. Tato kružnice l má s kružnicí k dva společné body, průsečíky, které nazveme D_1 a D_2. Nyní sestrojme kružnici m_1 se středem D_1 a poloměrem $|D_1O|$ a kružnici m_2 se středem D_2 a poloměrem $|D_2O|$. Tyto dvě kružnice m_1 a m_2 se protínají ve dvou bodech, z nichž jeden je bod O a druhý pojmenujme X. Tento bod X je obrazem bodu C v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$.

Popis konstrukce.

0. kružnice k; $k(O,r)$, bod C; $|OC| > \frac{r}{2}$
1. kružnice l; $l(C,|CO|)$
2. body D_1, D_2; $\{D_1, D_2\} = k \cap l$
3. kružnice m_1; $m_1(D_1, |D_1O|)$
4. kružnice m_2; $m_2(D_2, |D_2O|)$
5. bod X; $X = m_1 \cap m_2$, $X \neq O$ a platí: X je obrazem bodu C v kruhové inverzi dané kružnicí k



Obrázek 4.5: Obraz bodu v kruhové inverzi ($|OC| > \frac{r}{2}$)

Důkaz. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků CDO a DOX (úhel u vrcholu O je společný) plyne:

$$\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|OD|}{|OX|},$$

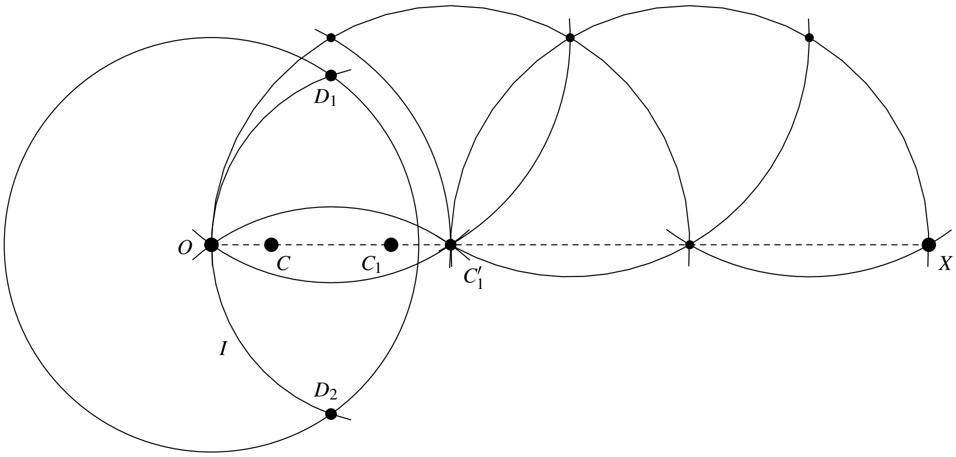
$$|OC| \cdot |OX| = |OD|^2 = r^2,$$

tedy bod X je obrazem bodu C v kruhové inverzi dané kružnici $k(O,r)$. $\square$

b) $|OC| \leq \frac{r}{2}$
V tomto případě by kružnice l se středem C a poloměrem $|CO|$ neprotnula s kružnicí k. Proto musíme sestrojit úsečku OC_1 takovou, že $|OC_1| = n \cdot |OC|$, $C \in OC_1$ (kde n je takové přirozené číslo, pro které platí: $|OC_1| > \frac{r}{2}$) (viz konstrukce 2.2). Nyní nalezneme bod C_1', který je obrazem bodu C_1 v kruhové inverzi dané kružnicí $k(0,r)$ (část a) této konstrukce). Potom sestrojíme úsečku OX, pro kterou platí: $|OX| = n \cdot \cdot |OC_1'|$ (viz konstrukce 2.2). Bod v kruhové inverzi dané kružnicí k se bod C zobrazí na bod X.

Popis konstrukce.

0. kružnice k; $k(O,r)$, bod C; $|OC| \leq \frac{r}{2}$
1. úsečka OC_1; $|OC_1| = n \cdot |OC|, C \in OC_1, n \in \mathbb{N}$ takové, že: $|OC_1| > \frac{r}{2}$ (konstrukce 2.2)
2. bod C_1'; C_1' je obrazem bodu C' v kruhové inverzi dané kružnicí k (konstrukce 4.1 a))
3. úsečka OX; $|OX| = n \cdot |OC_1'|$ a platí: X je obrazem bodu C v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$



Obrázek 4.6: Obraz bodu v kruhové inverzi ($|OC| \leq \frac{r}{2}$)

Důkaz. Využitím vztahů: $|OC_1| = n \cdot |OC|$ a $|OC_1'| = \frac{|OX|}{n}$ v rovnosti: $|OC_1| \cdot |OC_1'| = = r^2$ získáme:

$$r^2 = |OC_1| \cdot |OC_1'| = n \cdot |OC| \cdot \frac{|OX|}{n} = |OC| \cdot |OX|,$$

$$|OC| \cdot |OX| = r^2,$$

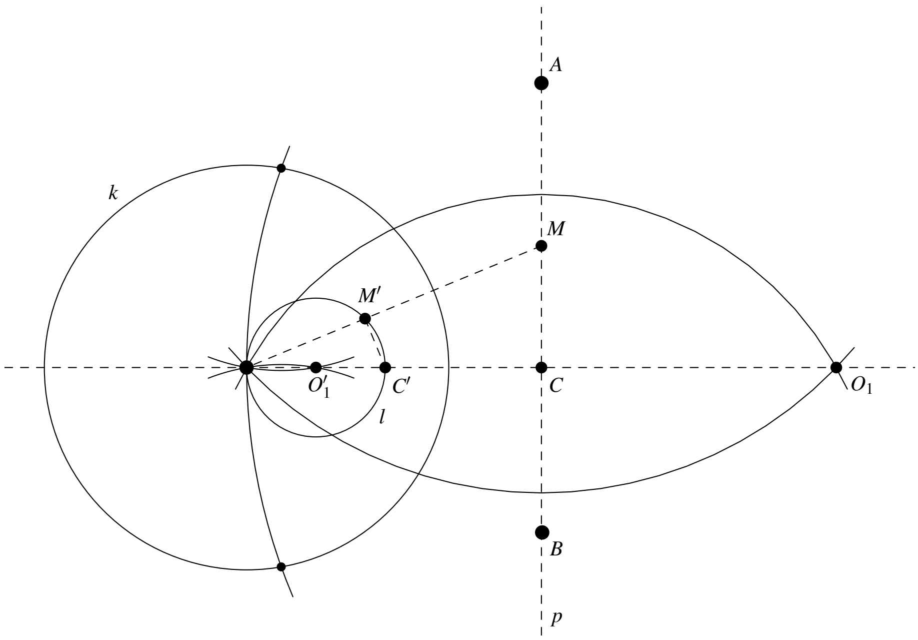
tedy bod X je obrazem bodu C v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$. $\square$

Konstrukce 4.2. Nechť je dána kružnice k se středem O a poloměrem r a přímka p (daná dvěma body A, B), která neprochází bodem O. Sestrojte kružnici, která je obrazem přímky p v kruhové inverzi dané kružnicí k.

Rozbor. Nejprve sestrojme bod O_1, který je souměrně sdružený s bodem O podle přímky $p = \leftrightarrow AB$ (konstrukce 2.1). Nyní zkonstruujme bod O_1', který je obrazem bodu O_1 v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ (konstrukce 4.1). Narýsujme kružnici l se středem v bodě O_1' a poloměrem $|O_1'O|$. Tato kružnice l je hledaným obrazem přímky p v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$.

Popis konstrukce.

0. kružnice k; $k(O,r)$, body A,B, přímka $p = \leftrightarrow AB$, $O \notin p$
1. bod O_1; O, O_1 jsou body sdružené podle přímky p (konstrukce 2.1)
2. bod O_1'; O_1' je obrazem bodu O_1 v kruhové inverzi dané kružnicí k (konstrukce 4.1)
3. kružnice l; $l(O_1', |O_1'O|)$ a platí: kružnice l je obrazem přímky p v kruhové inverzi dané kružnicí k



Obrázek 4.7: Obraz přímky v kruhové inverzi (přímka neprochází středem kruhové inverze)

Důkaz. Nechť bod C je průsečík přímky $p = \leftrightarrow AB$ a přímky $q = \leftrightarrow OO_1$ a průsečík přímky q a s kružnicí l označme C'. Z uvedené konstrukce plynou následující vztahy:

$$|OO_1| \cdot |OO_1'| = r^2,$$

$$|OO_1| = 2 \cdot |OC|,$$

$$|OC'| = 2 \cdot |OO_1'|,$$

$$OC \perp AB.$$

Pak z těchto vztahů dostaneme:

$$r^2 = |OO_1| \cdot |OO_1'| = 2 \cdot |OC| \cdot \frac{|OC'|}{2} = |OC| \cdot |OC'|,$$

$$|OC| \cdot |OC'| = r^2.$$

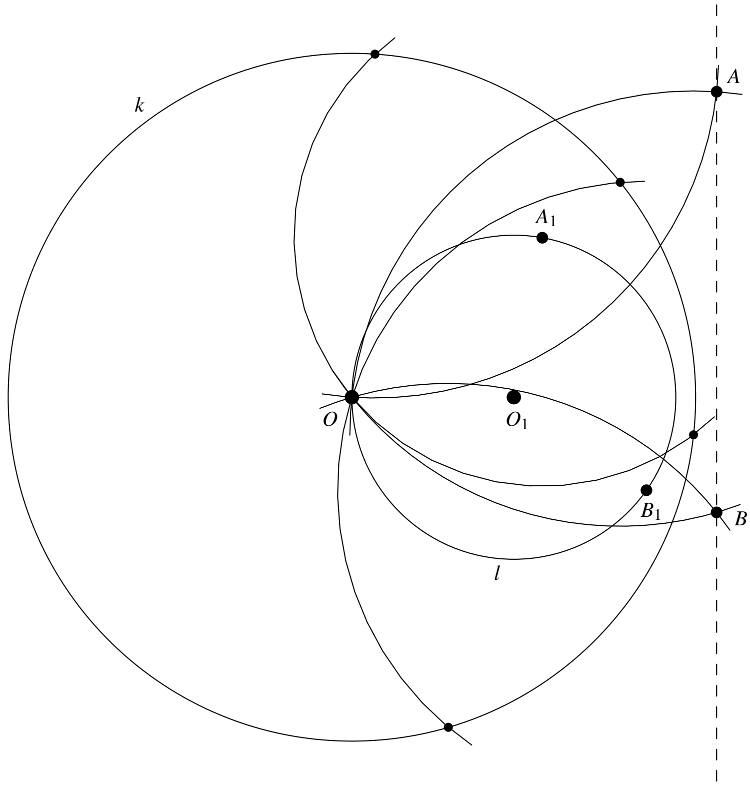
Podle věty 4.1.5 je kružnice l se středem v bodě O_1' a poloměrem $|O_1'|$ obrazem přímky p v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$. □

Konstrukce 4.3. Buď dána kružnice k se středem O a poloměrem r a kružnice l se středem O_1 a poloměrem R taková, že bod O leží na kružnici l. Sestrojte přímku p, která je obrazem kružnice $l(O_1,R)$ v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$.

Rozbor. Jestliže kružnice l protíná kružnici k ve dvou bodech (označme je A a B), pak přímka $p = \leftrightarrow AB$. Pokud se kružnice k a l dotýkají, tedy mají právě jeden společný bod (který pojmenujme T), pak přímka p je tečnou k těmto kružnicím v bodě T (viz konstrukce 3.1). Tyto případy jsou triviální. Dále již řešme situaci, kdy kružnice k a l nemají žádný společný bod.
Zvolme si libovolné dva různé body na kružnici l, které jsou různé od bodu O. Tyto body označme A_1 a B_1. Pak sestrojme bod A, který je obrazem bodu A_1 v kruhové inverzi dané kružnicí $k(0,r)$ (konstrukce 4.1). Potom narýsujme obraz bodu B_1 v kruhové inverzi dané stejnou kružnicí, tedy kružnicí $k(O,r)$, a nazvěme jej B (konstrukce 4.1). Hledaná přímka p je přímka, která je dána body A,B ($p = \leftrightarrow AB$).

Popis konstrukce.

0. kružnice k; $k(O,r)$, kružnice l; $l(O_1,R)$, $O \in l$, $k \cap l = \emptyset$
1. bod A_1; $A_1 \in l$, $A_1 \neq O$ libovolný
2. bod B_1; $B_1 \in l$, $B_1 \neq O$, $B_1 \neq A_1$ libovolný
3. bod A; A je obrazem v kruhové inverzi dané kružnicí k (konstrukce 4.1)
4. bod B; B je obrazem v kruhové inverzi dané kružnicí k (konstrukce 4.1) a platí: přímka $p = AB$ je obrazem kružnice l v kruhové inverzi dané kružnicí k



Obrázek 4.8: Obraz kružnice v kruhové inverzi (kružnice prochází středem kruhové inverze)

Důkaz. Plyne z věty 4.1.5. □

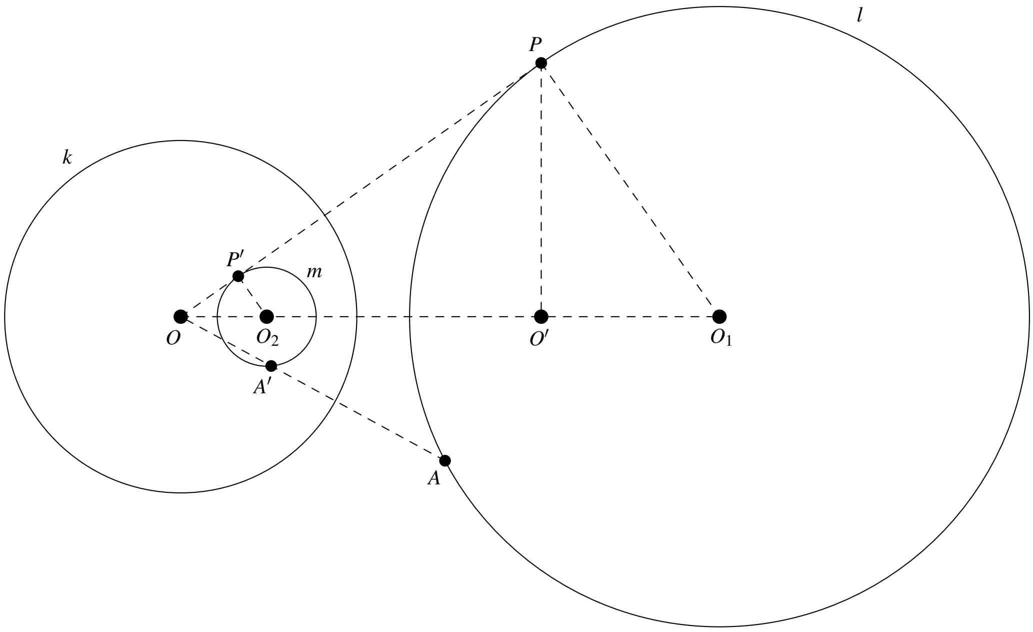
Konstrukce 4.4. Sestrojte kružnici m, která je obrazem dané kružnice l se středem O_1 a poloměrem R v kruhové inverzi dané kružnicí k se středem O a poloměrem r, jestliže kružnice l neprochází bodem O.

Rozbor. Uvažujme kruhovou inverzi danou kružnicí $l(O_1,R)$ a sestrojme bod O', který bude obrazem bodu O v této kruhové inverzi (konstrukce 4.1). Poté sestrojme obraz bodu O' v původní kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ a pojmenujme jej O_2. Bod O_2 je střed hledané kružnice m. Nyní nám k sestrojení této kružnice m zbývá nalézt jeden bod této kružnice. Zvolme si libovolný bod na kružnici $l(O_1,R)$ a označme jej A. Pak zkonstruujme obraz tohoto bodu A v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ a nazvěme jej A'. Pak hledaná kružnice m má střed O_2 a poloměr $|O_2A'|$.

Popis konstrukce.

0. kružnice k; $k(O,r)$, kružnice l; $l(O_1,R)$, $O \notin l$
1. bod O'; O' je obrazem bodu O v kruhové inverzi dané kružnicí $l(O_1,R)$ (konstrukce 4.1)
2. bod O_2; O_2 je obrazem bodu O' v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ (konstrukce 4.1)

3. bod A; $A \in l$
4. bod A'; A' je obrazem bodu A v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ (konstrukce 4.1)
5. kružnice m; $m(O_2, |O_2A'|)$ a platí: kružnice m je obrazem kružnice l v kruhové inverzi dané kružnicí k



Obrázek 4.9: Obraz kružnice v kruhové inverzi (kružnice neprochází středem kruhové inverze)

Důkaz. Nechť přímka daná body P a P' je společná tečna kružnic $l(O_1,R)$ a $m(O_2,|O_2A|)$ a nechť úsečka PO' je kolmá na úsečku OO_1. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $OO'P$ a $OP'O_2$ (úhel u vrcholu O je společný) plyne:

$$\frac{|OP|}{|OO'|} = \frac{|OO_2|}{|OP'|},$$

$$r^2 = |OP| \cdot |OP'| = |OO_2| \cdot |OO'|,$$

protože bod P' je obrazem bodu P v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$. Z tohoto vztahu plyne, že bod O' je obrazem bodu O_2 v kruhové inverzi dané stejnou kružnicí $k(O,r)$.
V pravoúhlém trojúhelníku OO_1P je úsečka $O'P$ výškou na stranu OO_1, potom podle Euklidovy věty o výšce platí:

$$|O_1O| \cdot |O_2O| = |O_1P|^2 = R^2.$$

Pak tedy bod O' je obrazem bodu O v kruhové inverzi dané kružnicí $l(O_1,R)$. Kružnice m je tedy obrazem kružnice $l(O_1,R)$ v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$. □

V konstrukcích uvedených v této kapitole jsme si ukázali, jak sestrojit pouze kružítkem obraz bodu, přímky nebo kružnice v kruhové inverzi. Nyní si vysvětlíme univerzální metodu, kterou popsal v 19. století August Adler.

Každá konstrukce řešitelná pomocí kružítka a pravítka nám dává rovinný útvar, který se skládá ze samostatných bodů, přímek a kružnic. Udělejme obraz tohoto útvaru v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$, přičemž střed O neleží na žádné přímce ani kružnici daného útvaru. Tento obraz se ovšem skládá jen z bodů a kružnic. A na tomto principu funguje univerzální metoda řešení konstrukcí v geometrii kružítka s využitím kruhové inverze.

Ukažme si tento způsob řešení na konkrétním příkladu, například tedy konstrukce 2.7. V této konstrukci je naším úkolem sestrojit průsečík dvou přímek p a q, které obě zadány dvojicí různých bodů ($p = \leftrightarrow AB$ a $q = \leftrightarrow CD$). Nejprve si zvolíme kružnici k se středem O a poloměrem r tak, aby bod O určitě neležel ani na jedné z přímek p a q. Nyní uvažujme kruhovou inverzi danou kružnicí $k(O,r)$ a v této kruhové inverzi sestrojme obrazy přímek p a q (konstrukce 4.2). Obrazy těchto dvou přímek jsou jistě kružnice, které se protínají ve dvou bodech, z nichž jeden je bod O a druhý z průsečíků označme X'. Pokud teď sestrojíme obraz bodu X' v kruhové inverzi dané kružnicí $k(O,r)$ (konstrukce 4.1) a tento obraz pojmenujeme X, bude právě bod X hledaným průsečíkem přímek p a q. Důkaz správnosti této konstrukce plyne z věty 4.1.3.

Na uvedeném příkladu si můžeme potvrdit, že využitím kruhové inverze se může řešení některých konstrukcí jenom pomocí kružítka výrazně usnadnit a zkrátit.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit ucelenou práci v českém jazyce, která se zabývá geometrií kružítka. Úroveň této práce odpovídá znalostem studentů střední školy, popř. zdatnějším žákům 9. ročníků základní školy, kteří mají o danou problematiku zájem. Práce může být například využita v rámci hodin geometrie ke zpestření výuky, případně k individuálnímu rozšíření znalostí o tomto tématu.

Práce byla vytvořena z anglicky, francouzsky a italsky psaných textů. Tato práce je prvním obsáhlejším materiálem v českém jazyce, který se věnuje konstrukcím pouze kružítkem.

Tato diplomová práce mě naučila vyjadřovat se lépe v psaném textu pracovat s odborně psanými texty v cizích jazycích. Dále se mi značně prohloubily znalosti práce s programem LaTeX a také s programem Geogebra.

Seznam použité literatury

[1] KOSTOVSKII, A. N. *Geometrical constructions using compasses only*. New York: Blaisdell Pub. Co., 1961. 79 s.

[2] MASCHERONI, Lorenzo. *Géométrie du compas*. Překlad: Carette, A. M., Paris, 1798. 263 s.

[3] O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *MacTutor History of Mathematics archive* [online] [cit. 14.5.2017].
Dostupné z http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/.

[4] PEPE, Luigi. *MASCHERONI, Lorenzo*. [online] [cit. 14.5.2017].
Dostupné z http://www.treccani.it/enciclopedia/.

[5] ŠIŠMA, Pavel. *Významní matematici v českých zemích*. [online] [cit. 14.5.2017].
Dostupné z http://web.math.muni.cz/biografie/.

[6] *Lorenzo Mascheroni*. [online] [cit. 14.5.2017].
Dostupné z http://matematica.unibocconi.it/autore/lorenzo-mascheroni.

[7] *Lorenzo Mascheroni (1750–1800)*. [online] [cit. 14.5.2017].
Dostupné z http://mathematica.sns.it/autori/1351/.