7. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

7.1. Definice: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.
a) Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i, když existuje $n \geq 1$ tak, že $p_{ij}(n) > 0$. Pokud $p_{ij}(n) = 0$ pro všechna $n \geq 1$, pak řekneme, že stav j není dosažitelný ze stavu i.
b) Řekneme, že stav j je sousledný se stavem i, jestliže j je dosažitelný z i a i je dosažitelný z j.

7.2. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů

$J = \{1, 2, ..., 5\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

7.3. Definice: Neprázdná množina stavů $C \subseteq J$ se nazývá třída trvalých stavů, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný ze žádného stavu uvnitř C. Množina stavů, která není třídou trvalých stavů, se nazývá třída přechodných stavů.

7.4. Příklad: Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 7.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

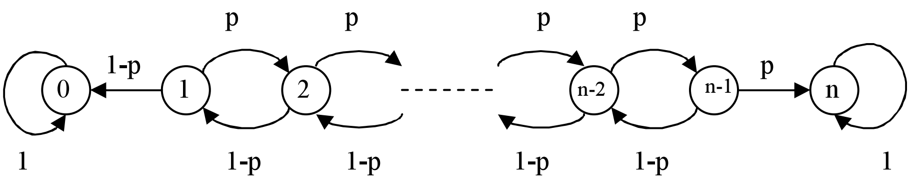
7.5. Poznámka: Jestliže v matici přechodu **P** vynecháme ty řádky a sloupce, které odpovídají stavům nepatřícím do třídy trvalých stavů C, dostaneme opět stochastickou matici. Lze ji považovat za matici přechodu homogenního markovského řetězce s množinou stavů C. Nazývá se podřetězec původního řetězce. Např. pro homogenní markovský řetězec z příkladu 7.2. dostaneme podřetězec s maticí přechodu $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.6. Důsledek:
a) Řetězec nikdy neopustí třídu trvalých stavů, jakmile do ní jednou vstoupí.
b) Řetězec se nikdy nevrátí do třídy přechodných stavů, jakmile ji jednou opustí.

7.7. Věta: Množina stavů $C \subseteq J$ je třída trvalých stavů, právě když $p_{ij} = 0$ pro $\forall i \in C, j \notin C$.

7.8. Definice: Homogenní markovský řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže všechny jeho stavy jsou sousledné, tj. kromě množiny stavů J v něm neexistuje žádná jiná třída stavů.
V opačném případě říkáme, že řetězec je rozložitelný.

7.9. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., N-1, N} a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

7.10. Definice: Řekneme, že stavy $i, j \in J$ homogenního markovského řetězce jsou stejného typu, jestliže jsou oba
a) přechodné
b) trvalé nenulové
c) trvalé nulové
d) neperiodické
e) periodické s touž periodou.

7.11. Věta: Jsou-li stavy i a j sousledné, pak jsou stejného typu.

7.12. Důsledek: V nerozložitelném homogenním markovském řetězci jsou všechny stavy stejného typu. Má-li nerozložitelný homogenní markovský řetězec konečnou množinu stavů, pak jsou všechny stavy trvalé nenulové.

7.13. Věta: Nechť stav i je dosažitelný z nějakého trvalého stavu j. Pak platí:
a) stav i je trvalý stav stejného typu jako stav j
b) i a j jsou sousledné stavy
c) $f_{ji} = f_{ij} = 1$ (tj. pravděpodobnost, že řetězec vycházející ze stavu j resp. i vůbec někdy vstoupí do stavu i resp. j, je rovna 1).
(Znamená to, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu j je množina trvalých stavů a tvoří nerozložitelný podřetězec původního řetězce.)

7.14. Poznámka: Věta 7.13. umožní rozložit množinu stavů J takto:
Nechť j_1 je trvalý stav s nejnižším indexem a J_1 je množina všech stavů dosažitelných z j_1.
Nechť j_2 je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do J_1 a nechť J_2 je množina všech stavů dosažitelných z j_2 atd.
Lze tedy psát $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_P$, kde J_1, J_2, ... jsou neslučitelné množiny trvalých stavů a J_P je množina stavů přechodných. Je-li J konečná množina, pak matici přechodu **P** lze psát v tzv. kanonickém tvaru (po eventuálním přečíslování stavů).

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">J</td><td colspan="4">J_T</td><td rowspan="2">J_P</td></tr>
<tr><td>J_1</td><td>J_2</td><td>...</td><td>J_r</td></tr>
<tr><td rowspan="4">J_r</td><td>J_1</td><td>$\mathbf{P_1}$</td><td>Ø</td><td>...</td><td>Ø</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td>J_2</td><td>Ø</td><td>$\mathbf{P_2}$</td><td>...</td><td>Ø</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>J_r</td><td>Ø</td><td>Ø</td><td>...</td><td>$\mathbf{P_r}$</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td colspan="2">J_P</td><td>$\mathbf{P_1}$</td><td>$\mathbf{P_2}$</td><td>...</td><td>$\mathbf{P_r}$</td><td>Ø</td></tr>
</table>

$\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_r$ jsou matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami trvalých stavů J_1, ..., J_r. Matice $\mathbf{R}_1$, ..., $\mathbf{R}_r$ obsahují pravděpodobnosti přechodu mezi třídami přechodných a trvalých stavů. Matice **Q** obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy.

7.15. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů

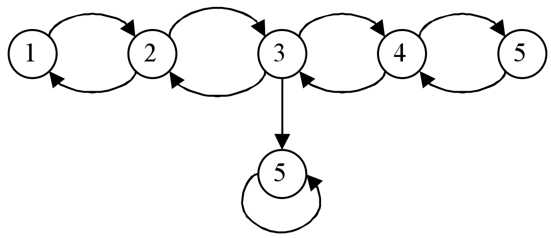
$J = \{0,1, ..., 5\}$ a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$. Najděte kanonický tvar matice **P**.

7.16. Definice: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Limitní matici přechodu označme **A**. Fundamentální matici **Z** tohoto řetězce definujeme vztahem: $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$.

7.17. Věta: Označme m_{ij} střední hodnotu doby 1. vstupu řetězce do stavu j za předpokladu, že vychází ze stavu i. Sestavíme matici $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j \in J}$. Pak $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\widehat{\mathbf{Z}})\widehat{\mathbf{M}}$, kde **E** je matice ze samých jedniček, matice $\widehat{\mathbf{Z}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **Z** a matice $\widehat{\mathbf{M}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **M**.

Příklady k 7. přednášce

Příklad 1.: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Jeho přechodový diagram (bez ohodnocení hran) má tvar:



Sestrojte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů. Najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Příklad 2.: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, 1, 2} a maticí přechodu $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Ukažte, že tento řetězec je nerozložitelný. Najděte střední hodnoty dob prvních návratů do stavů 0, 1, 2.

Příklad 3.: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, ..., 5} a maticí přechodu $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$. Najděte kanonický tvar **P**.

Příklad 4.: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, 1, 2, 3} a maticí přechodu $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný nebo ne. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Příklad 5.: Při analýze situace na trhu práce jednotliví pracovníci mohou „pracovat ve své profesi" (stav 1), „pracovat v jiné profesi" (stav 2), „být nezaměstnaní" (stav 3). Při sledování velkého souboru pracovníků se ukázalo, že během jednotlivých měsíců došlo ke změnám mezi uvedenými stavy následovně: ve své profesi pracovalo i v následujícím měsíci 80% pracovníků, 10% přešlo k jiné profesi a 10% se stalo nezaměstnanými. Z pracovníků pracujících mimo svou profesi 10% přešlo v následujícím měsíci ke své profesi, 70% zůstalo nadále pracovat mimo svou profesi a 20% se stalo nezaměstnanými. Z nezaměstnaných našlo práci ve své profesi 5% osob, 30% nezaměstnaných získalo práci mimo svou profesi a 65% osob zůstalo i v dalším měsíci nezaměstnanými. Najděte matici přechodu **P**, limitní matici **A**, fundamentální matici **Z** a matici **M** středních hodnot dob prvního vstupu do stavů 1, 2, 3.

Příklady k 8. přednášce

Příklad 1.: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do třicetidenních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5}, kde stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti, stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti, stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti, stav 4 splacené pohledávky a stav 5 nedobytné pohledávky. Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou: $p_{12} = 0{,}77$, $p_{14} = 0{,}23$, $p_{23} = 0{,}34$, $p_{24} = 0{,}66$, $p_{34} = 0{,}73$ a $p_{35} = 0{,}27$.
a) Sestavte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.
c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.
e) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých třicetidenních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Příklad 2.: Máme populaci diploidní cizosprašné rostliny, v níž sledujeme gen se dvěma alelami a, A. Z populace náhodně vybereme jedince, sprášíme ho homozygotním jedincem typu AA a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jejich potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, 2}, kde stav 0 = aa, stav 1 = Aa = aA, stav 2 = AA.
a) Sestavte matici přechodu a ukažte, že řetězec je absorpční.
b) Najděte kanonický tvar matice přechodu
c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.
e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Příklad 3.: Máme populaci diploidní samosprašné rostliny, v níž sledujeme gen se dvěma alelami a, A. Z populace náhodně vybereme jedince, samosprášíme ho a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jejich potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, 2}, kde stav 0 = aa, stav 1 = Aa = aA, stav 2 = AA. Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 2.

Příklad 4.: Student vysoké školy během studia úspěšně ukončí ročník a postoupí do dalšího ročníku s pravděpodobností p, opakuje ročník s pravděpodobností r a zanechá studia s pravděpodobností q, p + q + r = 1. Pro jednoduchost předpokládáme, že pravděpodobnosti p, q, r jsou konstantní. Výsledky studia v jednotlivých ročnících lze popsat homogenním markovským řetězcem $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, ..., 7}, přičemž stav 1 - zanechání studia, stav 2 – úspěšné ukončení studia, stav 3 – studium 1. ročníku , ... , stav 7 – studium 5. ročníku.
a) Sestavte matici přechodu a ukažte, že řetězec je absorpční.
b) Najděte kanonický tvar matice přechodu
c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
d) Jaká je pravděpodobnost, že student, který je v 1. ročníku, zanechá studia?