1 Infímum, suprémum

1. 1.vlastnosť je splnená, lebo: $\frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1 \ \forall x \in R$

   2.vlastnosť je: *ak y spĺňa 1.vlastnosť, potom $y \leq 1$.* Dokážeme sporom: Nech y spĺňa 1.vlastnosť a $y > 1$. Potom

   $$1 + \frac{1}{x^2+1} \geq y \ \forall x \in R$$

   $$1 - y \geq -\frac{1}{x^2+1} \ \forall x \in R$$

   Predelíme $1-y$ a znamienko sa zmení na opačné, lebo $y > 1$:

   $$x^2 + 1 \leq \frac{-1}{1-y} \ \forall x \in R$$

   $$x^2 \leq \frac{1}{y-1} - 1 \ \forall x \in R$$

   Výraz napravo je kladný, môžeme odmocniť:

   $$x \leq \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1} \ \forall x \in R$$

   Toto má platiť pre všetky x, dosaďme za x číslo $100 + \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}$:

   $$100 + \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1} \leq \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}$$

   $$100 \leq 0$$

   To je zjavný spor.

2 Limity

Limity funkcií:

1. $\frac{m}{n}$

2. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ (Využijeme, že $s^m - t^m = (s-t)(s^{m-1} + s^{m-2}t + ... + st^{m-2} + t^{m-1})$, pričom $s = (1+ax)^{\frac{1}{m}}, t = 1$.)

Limity postupností:

1. -1

2. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

3. 2 (Použijeme vzorec pre súčet členov geometrickej postupnosti.)

4. 0 (Ohraničíme zhora postupnosťou napr. $b_n = 2(\frac{2}{3})^{n-2}$, ktorej limita je nula.)

Ďalšie limity:

1. 0 ($0 \leq \frac{2x+1}{3x-1} < \frac{3}{4}$ pre $x > 7$ a $(\frac{3}{4})^x$ má limitu nula.)

2. ∞ ($\frac{3x+1}{2x-1} > \frac{4}{3}$ pre $x > -7$ a $(\frac{4}{3})^x$ má limitu nekonečno.)

3. $e^{\frac{2}{3}}$