# Řešené úlohy ke cvičení č. 12

**Úloha 1.** Nechť lineární zobrazení $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je dáno svou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi

$$\mathbf{f}_1 = (2, 3, 3),\ \mathbf{f}_2 = (1, 2, 3),\ \mathbf{f}_3 = (1, 1, 2)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ a bázi

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_1 = (1, 2, 2, 2),\ \mathbf{g}_2 = (0, 1, 2, 2), \\ &\mathbf{g}_3 = (0, 0, 1, 2),\ \mathbf{g}_4 = (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

prostoru $\mathbb{R}^4$. Nechť lineární transformace $\vartheta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je dána svými hodnotami

$$\begin{aligned} &\vartheta((1, 0, 0, 0)) = (0, -1, -1, -1), \\ &\vartheta((0, 1, 0, 0)) = (1, 0, -1, -1), \\ &\vartheta((0, 0, 1, 0)) = (1, 1, 0, -1), \\ &\vartheta((0, 0, 0, 1)) = (1, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

na vektorech kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$. Přesvědčte se, že $\vartheta$ je izomorfismus prostoru $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{R}^4$, najděte matici složeného lineárního zobrazení

$$\vartheta^{-1} \circ \eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ a napište vztahy, podle nichž se pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ vypočtou složky jeho obrazu $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ v $\mathbb{R}^4$ při uvedeném složeném zobrazení.

**Řešení.** Lineární transformace $\vartheta$ má vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Metodou elementárních řádkových úprav zjistíme, zda k této matici existuje matice inverzní:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

K matici $B$ je tedy inverzní maticí matice

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $B$ je tedy regulární, což znamená, že lineární transformace $\vartheta$ je izomorfismus. Maticí inverzního izomorfismu $\vartheta^{-1}$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ je matice $B^{-1}$.

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^3$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f_3}$ je matice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f_3}$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je tedy inverzní matice $S^{-1}$. Metodou elementárních řádkových úprav

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

zjistíme, že

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ je matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ je tedy inverzní matice $T^{-1}$. Lineární zobrazení $\eta$ má tudíž vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ matici

$$\left(T^{-1}\right)^{-1} \cdot A \cdot S^{-1} = T \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Takže maticí složeného lineárního zobrazení $\vartheta^{-1} \circ \eta$ vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ je pak součin matic

$$B^{-1} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Jinou možností, jak k tomuto zjištění dospět, je následující postup využívající násobení matic nad vektorovými prostory $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ maticemi nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Fakt, že uvedená matice $B$ je maticí lineární transformace $\vartheta$ vzhledem ke kanonické bázi $\underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^4$, znamená, že platí rovnost

$$\vartheta(\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{c}} \cdot B.$$

Výše bylo zjištěno, že matice $B$ je regulární, takže lineární transformace $\vartheta$ je izomorfismem, existuje inverzní izomorfismus $\vartheta^{-1}$ a z předchozí rovnosti plyne, že pak

$$\underline{\mathbf{c}} = \vartheta^{-1}(\vartheta(\underline{\mathbf{c}})) = \vartheta^{-1}(\underline{\mathbf{c}} \cdot B) = \vartheta^{-1}(\underline{\mathbf{c}}) \cdot B,$$

odkud vyplývá rovnost

$$\vartheta^{-1}(\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{c}} \cdot B^{-1}.$$

Fakt, že maticí přechodu od kanonické báze $\underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ k bázi $\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix}$ je výše uvedená matice $S$, znamená, že platí rovnost

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} \cdot S,$$

odkud plyne rovnost

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}} \cdot S^{-1}.$$

Fakt, že maticí přechodu od kanonické báze $\underline{\mathbf{c}}$ prostoru $\mathbb{R}^4$ k bázi $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_4\end{pmatrix}$ je matice $T$, znamená, že platí rovnost

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{c}} \cdot T.$$

Dále fakt, že maticí lineárního zobrazení $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vzhledem k bázím $\underline{\mathbf{f}}$ a $\underline{\mathbf{g}}$ prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ je matice $A$, znamená, že platí rovnost

$$\eta(\underline{\mathbf{f}}) = \underline{\mathbf{g}} \cdot A.$$

Z těchto rovností pak s využitím linearity zobrazení $\eta$ a $\vartheta^{-1}$ postupně dostáváme

$$\begin{aligned}(\vartheta^{-1} \circ \eta)(\mathbf{e}) &= \vartheta^{-1}(\eta(\mathbf{e})) = \vartheta^{-1}(\eta(\underline{\mathbf{f}} \cdot S^{-1})) = \vartheta^{-1}(\eta(\underline{\mathbf{f}}) \cdot S^{-1}) \\ &= \vartheta^{-1}(\underline{\mathbf{g}} \cdot A \cdot S^{-1}) = \vartheta^{-1}(\underline{\mathbf{c}} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1}) \\ &= \vartheta^{-1}(\underline{\mathbf{c}}) \cdot T \cdot A \cdot S^{-1} = \underline{\mathbf{c}} \cdot B^{-1} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1},\end{aligned}$$

takže opět vychází, že maticí složeného lineárního zobrazení $\vartheta^{-1} \circ \eta$ vzhledem ke kanonickým bazím $\mathbf{e}$ a $\mathbf{c}$ prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ je součin matic $B^{-1} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1}$.

Vynásobením uvedených matic pak vychází, že

$$B^{-1} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Znamená to, že pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a jeho obraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ v $\mathbb{R}^4$ při zobrazení $\vartheta^{-1} \circ \eta$ platí:

$$\begin{aligned} y_1 &= \qquad -4x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= 3x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ y_3 &= x_1 - 9x_2 + 6x_3, \\ y_4 &= \qquad 4x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

**Úloha 2.** Nechť lineární zobrazení $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je dáno svými hodnotami

$$\begin{aligned} \xi((1, -1, 0)) &= (0, -1, -1, 0), \\ \xi((0, 1, -2)) &= (2, 2, 2, 1), \\ \xi((0, 0, 2)) &= (1, 2, 3, 3) \end{aligned}$$

a nechť lineární zobrazení $\chi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami

$$\begin{aligned} \chi((1, 0, 0, 0)) &= (1, 1, 0), \\ \chi((1, 1, 0, 0)) &= (0, 2, 1), \\ \chi((1, 1, 1, 0)) &= (1, 0, 1), \\ \chi((1, 1, 1, 1)) &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Zjistěte, zda složené lineární zobrazení, tedy lineární transformace $\chi \circ \xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je izomorfismus prostoru $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$, a je-li tomu tak, najděte matici inverzní lineární transformace $(\chi \circ \xi)^{-1}$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

**Řešení.** Vektory

$$\mathbf{f}_1 = (1, -1, 0),\ \mathbf{f}_2 = (0, 1, -2),\ \mathbf{f}_3 = (0, 0, 2)$$

tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a vektory

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0, 0),\ \mathbf{g}_2 = (1, 1, 0, 0), \\ &\mathbf{g}_3 = (1, 1, 1, 0),\ \mathbf{g}_4 = (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Lineární zobrazení $\xi$ má vzhledem k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lineární zobrazení $\chi$ má vzhledem k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ prostoru $\mathbb{R}^4$ a kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^3$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ je matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je tedy inverzní matice $P^{-1}$. Elementárními řádkovými úpravami

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

zjistíme, že

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ je matice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ je tedy inverzní matice $Q^{-1}$. Elementárními řádkovými úpravami

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

zjistíme, že

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí lineárního zobrazení $\xi$ vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ je pak matice $A \cdot P^{-1}$ a maticí lineárního zobrazení $\chi$ vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ je matice $B \cdot Q^{-1}$. Maticí lineární transformace $\chi \circ \xi$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je tudíž součin matic

$$B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}.$$

Jinak, postupem využívajícím násobení matic nad vektorovými prostory $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ maticemi nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, lze k témuž zjištění dospět následovně. To, že výše uvedené matice $A$ a $B$ jsou maticemi lineárních zobrazení $\xi$ a $\chi$, první z nich vzhledem k bázi $\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a kanonické bázi $\underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^4$ a druhá z nich vzhledem k bázi $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_4 \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^4$ a kanonické bázi $\underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^3$, znamená, že platí rovnosti

$$\xi(\underline{\mathbf{f}}) = \underline{\mathbf{c}} \cdot A \qquad \text{a} \qquad \chi(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{e}} \cdot B.$$

Dále to, že výše uvedené matice $P$ a $Q$ jsou maticemi přechodu, první z nich od kanonické báze $\underline{\mathbf{e}}$ k bázi $\underline{\mathbf{f}}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a druhá z nich od kanonické báze $\underline{\mathbf{c}}$ k bázi $\underline{\mathbf{g}}$ prostoru $\mathbb{R}^4$, znamená, že platí rovnosti

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} \cdot P \qquad \text{a} \qquad \underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{c}} \cdot Q.$$

Odtud plynou rovnosti

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}} \cdot P^{-1} \qquad \text{a} \qquad \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{g}} \cdot Q^{-1}.$$

Z těchto rovností pak s využitím linearity zobrazení $\xi$ a $\chi$ postupně dostáváme

$$\begin{aligned}(\chi \circ \xi)(\underline{\mathbf{e}}) &= \chi(\xi(\underline{\mathbf{e}})) = \chi(\xi(\underline{\mathbf{f}} \cdot P^{-1})) = \chi(\xi(\underline{\mathbf{f}}) \cdot P^{-1}) \\ &= \chi(\underline{\mathbf{c}} \cdot A \cdot P^{-1}) = \chi(\underline{\mathbf{g}} \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}) \\ &= \chi(\underline{\mathbf{g}}) \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1} = \underline{\mathbf{e}} \cdot B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1},\end{aligned}$$

takže tímto způsobem opět vychází, že maticí lineární transformace $\chi \circ \xi$ vzhledem ke kanonické bázi $\underline{\mathbf{e}}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ je součin matic $B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}$.

Vynásobením uvedených matic vyjde, že

$$B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metodou elementárních řádkových úprav zjistíme, zda k této matici existuje matice inverzní:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -4 \end{array}\right).$$

K matici $B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}$ je tedy inverzní maticí matice

$$\left(B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matice $B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}$ je tedy regulární, což znamená, že lineární transformace $\chi \circ \xi$ je izomorfismus. Maticí inverzního izomorfismu $(\chi \circ \xi)^{-1}$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je pak uvedená inverzní matice $\left(B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}\right)^{-1}$.