Duální vektorový prostor

Vektorové prostory lineárních zobrazení

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem $(T, +, \cdot)$. Připomeňme, že pak symbolem $\mathbf{W}^{\mathbf{V}}$ značíme množinu všech zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Na této množině $\mathbf{W}^{\mathbf{V}}$ můžeme definovat binární operaci $+$ sčítání zobrazení a vnější operaci $\cdot$ skalárního násobení zobrazení pro libovolná zobrazení $f, g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ a pro libovolný prvek $s \in T$ předpisy:

$$\text{pro všechna } \mathbf{u} \in \mathbf{V}: \quad \begin{aligned} (f+g)(\mathbf{u}) &= f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), \\ (s \cdot f)(\mathbf{u}) &= s \cdot f(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Pak přímo z této definice se bezprostředně ověří, že $(\mathbf{W}^{\mathbf{V}}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Označme dále symbolem $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ množinu všech lineárních zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Pak se opět přímým ověřením zjistí, že $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ je podprostor ve vektorovém prostoru $(\mathbf{W}^{\mathbf{V}}, +, \cdot)$. Dostáváme tak vektorový prostor $(\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), +, \cdot)$ všech lineárních zobrazení prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Jde ovšem zase o vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Nechť nadále $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí n a m nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Připomeňme, že symbolem $\mathrm{Mat}_{mn}(T)$ jsme označili množinu všech matic typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak množina $\mathrm{Mat}_{mn}(T)$ spolu s binární operací $+$ sčítání matic a s vnější operací $\cdot$ skalárního násobení matic tvoří vektorový prostor $(\mathrm{Mat}_{mn}(T), +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Je jasné, že je to nenulový vektorový prostor dimenze $m \cdot n$.

Zvolme nyní pevně báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ ve vektorových prostorech $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Označme opět $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \ldots & \mathbf{g}_n\end{pmatrix}$ a $\underline{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \ldots & \mathbf{h}_m\end{pmatrix}$. Potom zobrazení

$\chi_{\underline{\mathbf{g}},\underline{\mathbf{h}}} : \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}) \to \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ přiřazující každému lineárnímu zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jeho matici A v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m$ je zjevně izomorfismem vektorového prostoru $(\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}), +, \cdot)$ na vektorový prostor $(\mathrm{Mat}_{mn}(T), +, \cdot)$. V první větě z minulé kapitoly jsme totiž viděli, že $\chi_{\underline{\mathbf{g}},\underline{\mathbf{h}}}$ je bijekce množiny $\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ na množinu $\mathrm{Mat}_{mn}(T)$, a fakt, že tato bijekce zachovává operace $+$ a $\cdot$ v příslušných vektorových prostorech, se opět ověří přímočaře. Je tedy i $(\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}), +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor dimenze $m{\cdot}n$.

Lineární formy a duální vektorový prostor

Nechť nyní $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Poznamenejme, že samo těleso $(T, +, \cdot)$ je vektorovým prostorem dimenze 1 nad sebou samým, tedy rovněž nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Lze proto uvažovat lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to T$. Takové lineární zobrazení f vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do tělesa $(T, +, \cdot)$ se nazývá **lineární forma** na $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Vektorový prostor $(\mathcal{L}(\mathbf{V}, T), +, \cdot)$ všech lineárních forem na $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se pak nazývá **duální vektorový prostor** k prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ anebo krátce **duál** prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Důvody pro zavedení této terminologie budou patrny z dalšího textu této kapitoly. Pro množinu $\mathcal{L}(\mathbf{V}, T)$ všech zmíněných lineárních forem se v této souvislosti užívá též označení $\mathbf{V}^*$, takže duální vektorový prostor k prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se pak zapisuje ve tvaru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$.

Zvolme dále opět pevně bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a označme ji tak jako dříve $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \dots & \mathbf{g}_n \end{pmatrix}$. Poznamenejme, že jednotkový prvek 1 tělesa $(T, +, \cdot)$ chápaného jako jednorozměrný vektorový prostor sám tvoří bázi tohoto vektorového prostoru. Můžeme tedy uvažovat matice lineárních forem $f : \mathbf{V} \to T$ vzhledem k bázím $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ a 1. Každá taková matice je typu $1/n$, čili je to vlastně uspořádaná n-tice prvků z T, neboli je to prvek kartézské mocniny T^n. Podle předchozích zjištění pak víme, že zobrazení $\chi_{\underline{\mathbf{g}},1} : \mathcal{L}(\mathbf{V}, T) \to T^n$ přiřazující každé lineární formě $f : \mathbf{V} \to T$ její matici v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a 1, což je vektor $(f(\mathbf{g}_1), f(\mathbf{g}_2), \ldots, f(\mathbf{g}_n))$, je izomorfismem duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ na vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$.

Na konci kapitoly o bázích a dimenzích vektorových prostorů jsme viděli, že rovněž původní nenulový vektorový prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ konečné dimenze n je izomorfní vektorovému prostoru $(T^n, +, \cdot)$. Příslušný izomorfismus $\mathtt{C}_{\underline{\mathbf{g}}} : \mathbf{V} \to T^n$ přiřazuje každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ uspořádanou n-tici $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ jeho souřadnic v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Potom však složené zobrazení $\chi_{\underline{\mathbf{g}},1}^{-1} \circ \mathtt{C}_{\underline{\mathbf{g}}} : \mathbf{V} \to \mathcal{L}(\mathbf{V}, T)$ je izomorfismem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ s vektorovým prostorem $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$, který je k němu duální. Nenulový vektorový prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ konečné dimenze n je tedy izomorfní svému duálnímu vektorovému prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$. Poznamenejme ovšem, že výše nalezený izomorfismus těchto dvou vektorových prostorů závisel na volbě báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Připomeňme z poslední věty v předminulé kapitole, že pro danou bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a pro libovolné prvky $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ existuje jediná lineární forma $f : \mathbf{V} \to T$ taková, že $f(\mathbf{g}_1) = t_1$, $f(\mathbf{g}_2) = t_2$, $\ldots$, $f(\mathbf{g}_n) = t_n$. Uvažujme nyní ke zmíněné bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ n-tici lineárních forem $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbf{V} \to T$ zadanou následujícím předpisem pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$g_i(\mathbf{g}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Pak lineární formy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tvoří bázi duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$. Skutečně, poněvadž duální vektorový prostor $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ je izomorfní výchozímu vektorovému prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a má tudíž stejnou dimenzi n, stačí ukázat, že lineární formy $g_1, g_2, \dots, g_n$ generují celý tento duální vektorový prostor. Ovšem pro libovolnou lineární formu $f : \mathbf{V} \to T$ platí $f = f(\mathbf{g}_1) \cdot g_1 + f(\mathbf{g}_2) \cdot g_2 + \dots + f(\mathbf{g}_n) \cdot g_n$, neboť lineární formy na obou stranách této rovnosti dávají tytéž hodnoty na všech vektorch báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, a tedy jsou si rovny. Je tedy každá lineární forma $f : \mathbf{V} \to T$ lineární kombinací uvedených lineárních forem $g_1, g_2, \dots, g_n$. Tvoří tedy lineární formy $g_1, g_2, \dots, g_n$ opravdu bázi duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ a libovolná lineární forma $f : \mathbf{V} \to T$ má v této bázi souřadnice $(f(\mathbf{g}_1), f(\mathbf{g}_2), \dots, f(\mathbf{g}_n))$. Tuto bázi $g_1, g_2, \dots, g_n$ duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ nazýváme **duální bází k bázi** $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Používáme pro ni též značení $\underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{pmatrix}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$ jsou dvě báze tohoto vektorového prostoru a nechť $g_1, g_2, \dots, g_n$ a $h_1, h_2, \dots, h_n$ jsou báze duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ duální k předchozím dvěma bázím. Nechť A je matice přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ k bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$. Potom transponovaná matice $A^\top$ je maticí přechodu od duální báze $h_1, h_2, \dots, h_n$ k duální bázi $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Důkaz. Označme jako dosud $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \dots & \mathbf{g}_n \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \dots & \mathbf{h}_n \end{pmatrix}$ a $\underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{pmatrix}$, $\underline{h} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix}$. Fakt, že matice A je maticí přechodu od báze $\underline{\mathbf{g}}$ k bázi $\underline{\mathbf{h}}$, říká, že platí rovnost $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{g}} \cdot A$. To znamená, že ve sloupcích matice A leží souřadnice vektorů báze $\underline{\mathbf{h}}$ vzhledem k bázi $\underline{\mathbf{g}}$. Abychom dokázali, že transponovaná matice $A^\top$ je maticí přechodu od duální báze $\underline{h}$ k duální bázi $\underline{g}$, postačí, ukážeme-li, že platí rovnost $\underline{g}^\top = A \cdot \underline{h}^\top$, čili ověříme-li, že v řádcích matice A leží souřadnice vektorů duální báze $\underline{g}$ vzhledem k duální bázi $\underline{h}$. K tomu účelu ovšem stačí určit hodnoty $g_i(\mathbf{h}_j)$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$. Pak pro každé

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\mathbf{h}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{g}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{g}_2 + \dots + a_{nj} \cdot \mathbf{g}_n$, takže potom podle výše uvedené definice lineárních forem $g_1, g_2, \dots, g_n$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vychází $g_i(\mathbf{h}_j) = a_{ij}$. Podle úvah předcházejících tomuto tvrzení má tedy lineární forma g_i vzhledem k duální bázi $\underline{h} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix}$ souřadnice $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, které skutečně tvoří i-tý řádek matice A. To platí pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a tím je ověřena potřebná rovnost $\underline{g}^\top = A \cdot \underline{h}^\top$.

Druhý duál vektorového prostoru

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, je možné uvažovat k němu duální vektorový prostor $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$, kde $\mathbf{V}^*$ je množina $\mathcal{L}(\mathbf{V}, T)$ všech lineárních forem na $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. To je opět nenulový vektorový prostor téže konečné dimenze n. Lze tedy tento postup opakovat, takže k vektorovému prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ je možné dále uvažovat zase duální vektorový prostor $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$, kde $\mathbf{V}^{**}$ je množina $\mathcal{L}(\mathbf{V}^*, T)$ všech lineárních forem na $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$. Tento poslední vektorový prostor $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$ se nazývá **druhý duál** prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Viděli jsme, že vektorový prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je izomorfní prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$, a analogicky tento prostor je pak zase izomorfní prostoru $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$. Celkem je tedy vektorový prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ izomorfní svému druhému duálu $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$. Ukážeme, že tady je možno definovat kanonické, tedy na volbě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nezávislé zobrazení množiny $\mathbf{V}$ na množinu $\mathbf{V}^{**}$, které je izomorfismem prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a jeho druhého duálu $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$.

Věta. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak zobrazení $\Psi_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**}$ dané pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a pro každou lineární formu $f : \mathbf{V} \to T$ předpisem

$$\Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{u})(f) = f(\mathbf{u})$$

je izomorfismem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ na jeho druhý duál $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$.

Důkaz. Pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ je jeho obraz $\Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{u})$ definovaný uvedeným předpisem očividně lineární formou na duálním prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$, čili $\Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{u})$ je prvkem množiny $\mathbf{V}^{**}$. Je tedy zobrazení $\Psi_{\mathbf{V}}$ korektně definováno a rovněž tak přímočaře se ověří, že $\Psi_{\mathbf{V}}$ je navíc lineární zobrazení prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do prostoru $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$.

Ukážeme dále, že zobrazení $\Psi_{\mathbf{V}}$ je prosté. Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ dva vektory takové, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, pak existuje lineární forma $f : \mathbf{V} \to T$ taková, že $f(\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{v})$. Skutečně pak totiž $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, takže vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ lze doplnit $n-1$ dalšími vektory $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1} \in \mathbf{V}$ na bázi vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak lze potřebnou lineární formu $f : \mathbf{V} \to T$ zadat podmínkami $f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 1$ a $f(\mathbf{w}_1) = \cdots = f(\mathbf{w}_{n-1}) = 0$. Potom $f(\mathbf{u}) = 1 + f(\mathbf{v})$, takže $f(\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{v})$. Pak ovšem pro tuto lineární formu f platí $\Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{u})(f) = f(\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{v}) = \Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})(f)$, takže $\Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) \neq \Psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})$. Je tedy zobrazení $\Psi_{\mathbf{V}}$ prosté, a poněvadž jde přitom o lineární zobrazení dvou vektorových prostorů téže dimenze n, je $\Psi_{\mathbf{V}}$ izomorfismem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ na jeho druhý duál $(\mathbf{V}^{**}, +, \cdot)$.