Hodnost matice

Nechť
$$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$$
je matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak řádky matice A můžeme chápat jako uspořádané n-tice prvků z T, a tedy jako prvky vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$. Řádky matice A potom generují jistý podprostor ve vektorovém prostoru $(T^n, +, \cdot)$. Dimenze tohoto podprostoru generovaného řádky matice A se nazývá **řádková hodnost** matice A. Podobně sloupce matice A lze chápat jako uspořádané m-tice prvků z T, a tedy jako prvky vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$. Dimenze podprostoru vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$ generovaného sloupci matice A se pak nazývá **sloupcová hodnost** matice A. V dalším textu této kapitoly ale ukážeme, že obě tyto dimenze jsou si rovny, čímž obdržíme pojem hodnosti matice A.

Buď znovu $A = (a_{ij})$ matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Potom každá z následujících modifikací matice A se nazývá **elementární řádková úprava** matice A:

(i) vynásobení i-tého řádku matice A prvkem r pro některá $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $r \in T$, $r \neq 0$,

(ii) přičtení k i-tému řádku matice A j-tého řádku matice A vynásobeného prvkem r pro některá $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, a $r \in T$.

K elementárním řádkovým úpravám matice A bývá někdy též počítána výměna i-tého a j-tého řádku matice A pro některá $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$. Tuto úpravu lze ale získat složením několika úprav typu (i) a (ii): nejprve se j-tý řádek přičte k i-tému, pak se i-tý řádek odečte od j-tého, potom se znovu j-tý řádek přičte k i-tému a nakonec se j-tý řádek vynásobí prvkem -1.

Zaměníme-li všude v předchozím odstavci slovo “řádek” slovem “sloupec” a číslo m číslem n, dostaneme podobně definici toho, co jsou **elementární sloupcové úpravy** matice A.

Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou dvě matice téhož typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ takové, že matice B vznikla z matice A konečnou posloupností elementárních řádkových úprav. Pak píšeme $A \sim B$ a říkáme, že matice A a B jsou **řádkově ekvivalentní**. Poněvadž ke každé elementární řádkové úpravě existuje elementární úprava, který je k ní inverzní v tom smyslu, že převede upravenou matici zpět do původního tvaru, je relace $\sim$ symetrická a celkem je to ekvivalence na množině všech matic typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Analogickou úvahu je možno vést i pro elementární sloupcové úpravy matic.

Tvrzení. Elementárními řádkovými úpravami dané matice $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ se nemění podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ generovaný řádky matice A. Nemění se tak ani řádková hodnost matice A.

Důkaz. Podle příslušného tvrzení z kapitoly o podprostorech vektorových prostorů je podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ generovaný řádky matice A roven množině všech lineárních kombinací těchto řádků. Je ale evidentní, že množina všech lineárních kombinací řádků matice A se nezmění provedením kterékoliv elementární řádkové úpravy matice A.

Tvrzení. Elementárními řádkovými úpravami dané matice $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ se nemění sloupcová hodnost matice A.

Poznámka. Může se ale změnit podprostor vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$ generovaný sloupci matice A.

Lemma. Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice téhož typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, přičemž matice B vznikla z matice A provedením několika elementárních řádkových úprav. Označme $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ jednotlivé sloupce matice A a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ jednotlivé sloupce matice B. Nechť $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou libovolné indexy splňující $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. Potom sloupce $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}$ matice A jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé sloupce $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \ldots, \mathbf{b}_{j_k}$ matice B.

Důkaz. Tvrzení tohoto lemmatu stačí dokázat v případě, kdy matice B vznikla z matice A provedením jedné elementární řádkové úpravy typu (i) nebo (ii). K tomu účelu je třeba ověřit, že pak pro libovolné prvky $s_1, s_2, \ldots, s_k \in T$ je rovnost

$$s_1 \cdot \mathbf{a}_{j_1} + s_2 \cdot \mathbf{a}_{j_2} + \cdots + s_k \cdot \mathbf{a}_{j_k} = \mathbf{0}$$

splněna právě tehdy, když je splňena rovnost

$$s_1 \cdot \mathbf{b}_{j_1} + s_2 \cdot \mathbf{b}_{j_2} + \cdots + s_k \cdot \mathbf{b}_{j_k} = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{0}$ je nulový sloupec o m složkách. Vznikla-li matice B z matice A provedením jedné elementární řádkové úpravy typu (i), je tento fakt očividný. Vznikla-li matice B z matice A použitím jedné elementární řádkové úpravy typu (ii), je to obdobně zjevné. Spočívala-li totiž tato elementární řádková úprava v přičtení k i-tému řádku matice A ℓ-tého řádku matice A vynásobeného prvkem r pro některá $i, \ell \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq \ell$, a $r \in T$, pak rozdíl v uvedených dvou rovnostech se projeví pouze na i-té pozici zmíněných sloupců, kde pro matici A vznikne rovnost $s_1 \cdot a_{ij_1} + s_2 \cdot a_{ij_2} + \cdots + s_k \cdot a_{ij_k} = 0$, zatímco pro matici B vznikne rovnost $s_1 \cdot (a_{ij_1} + r \cdot a_{\ell j_1}) + s_2 \cdot (a_{ij_2} + r \cdot a_{\ell j_2}) + \cdots + s_k \cdot (a_{ij_k} + r \cdot a_{\ell j_k}) = 0$. Uvědomíme-li si přitom ale, že současně na ℓ-té pozici zmíněných sloupců v obou maticích A i B se objeví rovnost $s_1 \cdot a_{\ell j_1} + s_2 \cdot a_{\ell j_2} + \cdots + s_k \cdot a_{\ell j_k} = 0$, vidíme, že obě výše uvedené soustavy rovností pro vybrané sloupce matic A a B jsou navzájem ekvivalentní, což bylo třeba ověřit.

Důkaz posledního tvrzení. Nechť $B = (b_{ij})$ je matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ vzniklá z matice A provedením konečné posloupnosti elementárních řádkových úprav. V předchozím lemmatu jsme viděli, že elementární řádkové úpravy matice A nemají vliv na lineární závislost či nezávislost vybraných posloupností sloupců této matice. Sloupcová hodnost matice A je ovšem definována jako dimenze podprostoru v $(T^m, +, \cdot)$ generovaného sloupci matice A, a tedy jako počet vektorů báze tohoto podprostoru. Podle jednoho z tvrzení předchozí kapitoly lze takovou bázi $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}$ vybrat ze sloupců $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice A. Po provedení zmíněné posloupnosti elementárních řádkových úprav pak podle předchozího lemmatu v nové matici B zůstanou odpovídající sloupce $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \ldots, \mathbf{b}_{j_k}$ lineárně nezávislé a generují tudíž v $(T^m, +, \cdot)$ podprostor stejné dimenze. Jiná lineárně nezávislá posloupnost mající více sloupců přitom podle zmíněného lemmatu mezi sloupci $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ matice B vzniknout nemohla. Obě matice A i B tedy mají stejnou sloupcovou hodnost.

Buď opět $A = (a_{ij})$ matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Řekneme, že matice A je ve **schodovitém tvaru**, jsou-li v ní shora dolů nejprve nenulové řádky, pokud matice takové řádky obsahuje, a až za nimi jsou nulové řádky, má-li matice takové, a jestliže dále každý nenulový řádek matice A (s případnou výjimkou prvního řádku) začíná zleva několika nulami, přičemž každý další nenulový řádek má těchto nul vlevo více než řádek jemu předcházející. První nenulový prvek zleva v každém nenulovém řádku matice A se nazývá **hlavní prvek** tohoto řádku. Je tedy tuto druhou podmínku možno zformulovat také tak, že hlavní prvek každého dalšího nenulového řádku matice A se nachází na vzdálenější pozici odleva než hlavní prvek řádku jemu předcházejícího. Je jasné, že pak nenulové řádky matice A ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé (žádný z nich není možno získat jako lineární kombinaci ostatních řádků). Je tedy počet nenulových řádků matice A ve schodovitém tvaru roven řádkové hodnosti této matice.

Řekneme dále, že matice $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je v **Gauss-Jordanově tvaru**, je-li ve schodovitém tvaru, je-li přitom hlavní prvek každého nenulového řádku roven 1, a je-li navíc každý hlavní prvek jediným nenulovým prvkem ve sloupci, ve kterém leží (tedy každý hlavní prvek má ve svém sloupci nejen pod sebou, ale i nad sebou samé nuly).

Tvrzení. Každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ lze převést konečnou posloupností elementárních řádkových úprav na matici ve schodovitém tvaru, případně až na matici v Gauss-Jordanově tvaru.

Důkaz. Při hledání schodovitého tvaru postupujeme indukcí vzhledem k počtu nenulových řádků matice A. Je-li A nulová matice, je již ve schodovitém tvaru. Je-li matice A nenulová, vybereme první nenulový sloupec zleva. Případným přehozením řádků docílíme toho, aby v tomto sloupci byl první prvek shora nenulový. Potom odečítáním vhodných násobků prvního řádku od následujících řádků dosáhneme toho, že v tomto prvním nenulovém sloupci budou pod prvním nenulovým prvkem shora již samé nuly. Byl-li zmíněný nenulový sloupec posledním sloupcem matice, je takto získaná matice již ve schodovitém tvaru. V opačném případě, odmyslíme-li si nyní z takto vzniklé matice její první řádek, dostaneme matici, která bude mít méně nenulových řádků (nulové řádky se uvedenými úpravami nezměnily). Podle indukčního předpokladu lze tedy tuto zmenšenou matici převést elementárními řádkovými úpravami na schodovitý tvar (nulové sloupce vlevo, kterých bude více než v celé matici, se přitom nezmění). Takže pak i původní matici A lze takto převést na schodovitý tvar.

Abychom od schodovitého tvaru přešli ke Gauss-Jordanovu tvaru, je-li daná matice nenulová, je třeba zprvu každý nenulový řádek vynásobit inverzním prvkem k hlavnímu prvku ležícímu v tomto řádku. Poté odečítáním vhodných násobků daného nenulového řádku od řádků ležících nad ním docílíme toho, že ve sloupci nad hlavním prvkem tohoto řádku budou samé nuly. To se provede pro každý nenulový řádek matice vyjma prvního.

Důsledek. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $B = (b_{ij})$ je matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ vzniklá převedením matice A konečným počtem elementárních řádkových úprav podle předchozího tvrzení na matici v Gauss-Jordanově tvaru. Nechť $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou indexy všech těch sloupců matice B splňující $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, v nichž leží hlavní prvky všech nenulových řádků matice B. Potom sloupce $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}$ matice A tvoří bázi podprostoru vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$ generovaného sloupci matice A.

Důkaz. Je evidentní, že sloupce $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \ldots, \mathbf{b}_{j_k}$ matice B v Gauss-Jordanově tvaru jsou lineárně nezávislé a že každý jiný sloupec matice B je lineární kombinací těch sloupců v této posloupnosti, které mu předcházejí. Takže sloupce $\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \ldots, \mathbf{b}_{j_k}$ tvoří bázi podprostoru vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$ generovaného sloupci matice B. Podle lemmatu použitého k důkazu předminulého tvrzení pak totéž platí pro sloupce $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}$ vzhledem k matici A.

Důsledek. Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ platí, že její řádková hodnost je rovna její sloupcové hodnosti.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení lze matici A elementárními řádkovými úpravami převést na Gauss-Jordanův tvar. Nechť k je počet nenulových řádků v tomto tvaru. Potom je možné přehazováním sloupců přemístit sloupce obsahující hlavní prvky doleva, takže vlevo nahoře vznikne jednotková matice E_k. Je dále jasné, že pak je možno odčítáním vhodných násobků prvních k sloupců od zbývajících sloupců všechny tyto následující sloupce učinit nulovými sloupci. Takto použitím nejprve elementárních řádkových a poté i sloupcových úprav přejde matice A do tvaru, kdy na hlavní diagonále bude prvních k prvků rovných 1 a všechny ostatní prvky matice budou rovny 0. Matice tohoto tvaru má ovšem řádkovou i sloupcovou hodnost rovnu k. Poněvadž už víme, že elementární řádkové úpravy nemění řádkovou ani sloupcovou hodnost matice, a totéž ovšem platí i pro elementární sloupcové úpravy, je taktéž řádková i sloupcová hodnost výchozí matice A rovna k.

Nyní jsme tedy v situaci, kdy můžeme pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ definovat **hodnost** matice A jako společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti matice A.