Matice lineárních zobrazení

Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí n a m nad tělesem $(T,+,\cdot)$, nechť posloupnosti vektorů $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_n \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_m \in \mathbf{W}$ tvoří báze těchto vektorových prostorů a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi těmito prostory. Nechť pro každé $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ jsou prvky $a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj} \in T$ souřadnice vektoru $f(\mathbf{g}_j)$ v bázi $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_m$, takže platí $f(\mathbf{g}_j) = a_{1j}\cdot\mathbf{h}_1 + a_{2j}\cdot\mathbf{h}_2 + \cdots + a_{mj}\cdot\mathbf{h}_m$. Pak matice $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$ typu m/n nad $(T,+,\cdot)$ se nazývá **matice lineárního zobrazení** f **v bázích** $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_m$. Zavedeme-li podobně jako dříve též označení $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \ldots & \mathbf{g}_n\end{pmatrix}$ a $\underline{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \ldots, & \mathbf{h}_m\end{pmatrix}$ pro zmíněné báze prostorů $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ a k tomu ještě označení $f(\underline{\mathbf{g}}) = \begin{pmatrix}f(\mathbf{g}_1) & f(\mathbf{g}_2) & \ldots & f(\mathbf{g}_n)\end{pmatrix}$ pro posloupnost obrazů vektorů báze $\underline{\mathbf{g}}$ při lineárním zobrazení f, pak právě uvedená definice matice $A = (a_{ij})$ lineárního zobrazení f v bázích $\underline{\mathbf{g}}$ a $\underline{\mathbf{h}}$ znamená, že platí rovnost

$$f(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot A,$$

vzpomeneme-li si znovu na násobení matic nad vektorovým prostorem $(\mathbf{W},+,\cdot)$ maticemi nad tělesem $(T,+,\cdot)$.

Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T,+,\cdot)$, nechť dále posloupnost vektorů $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_n \in \mathbf{V}$ tvoří bázi tohoto vektorového prostoru a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární transformace tohoto vektorového prostoru. Nechť nyní pro každé $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ jsou prvky a_{1j}, $a_{2j},\ldots,a_{nj} \in T$ souřadnice vektoru $f(\mathbf{g}_j)$ v bázi $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_n$, takže platí $f(\mathbf{g}_j) = a_{1j}\cdot\mathbf{g}_1 + a_{2j}\cdot\mathbf{g}_2 + \cdots + a_{nj}\cdot\mathbf{g}_n$. Pak čtvercová matice $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,n}$ řádu n nad $(T,+,\cdot)$ se nazývá **matice lineární transformace** f **v bázi** $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_n$. Zavedeme-li obdobně jako výše označení $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \ldots & \mathbf{g}_n\end{pmatrix}$ a $f(\underline{\mathbf{g}}) = \begin{pmatrix}f(\mathbf{g}_1) & f(\mathbf{g}_2) & \ldots & f(\mathbf{g}_n)\end{pmatrix}$, pak právě uvedená definice matice $A = (a_{ij})$ lineární transformace f v bázi $\underline{\mathbf{g}}$ podobně jako výše znamená, že tentokrát platí rovnost

$$f(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{g}} \cdot A,$$

opět s využitím násobení matic nyní nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ maticemi nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Věta. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť posloupnosti $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ tvoří báze těchto vektorových prostorů. Pak přiřazení, v němž každému lineárnímu zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ odpovídá jeho matice A v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$, je vzájemně jednoznačnou korespondencí mezi všemi lineárními zobrazeními $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ a všemi maticemi $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(T, +, \cdot)$.

Důkaz. Mají-li dvě lineární zobrazení $f, g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ stejnou matici v uvedených bázích, pak to znamená, že $f(\mathbf{g}_1) = g(\mathbf{g}_1)$, $f(\mathbf{g}_2) = g(\mathbf{g}_2)$, $\ldots$, $f(\mathbf{g}_n) = g(\mathbf{g}_n)$. Podle poslední věty z minulé kapitoly pak ale f a g jsou jedno a to stejné lineární zobrazení. Je tedy zmíněné přiřazení prosté.

Vezměme dále libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(T, +, \cdot)$, a uvažme vektory $\mathbf{z}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{h}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + a_{mj} \cdot \mathbf{h}_m$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak podle poslední věty z minulé kapitoly existuje lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ takové, že $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{z}_2$, $\ldots$, $f(\mathbf{g}_n) = \mathbf{z}_n$. Maticí tohoto lineárního zobrazení ve zmíněných bázích je ovšem matice A. Je tedy popsaná korespondence opravdu vzájemně jednoznačná.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí n a m nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi těmito prostory a nechť $A = (a_{ij})$ je matice tohoto lineárního zobrazení v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ zmíněných vektorových prostorů.

Nechť $\mathbf{u}$ je libovolný vektor z $\mathbf{V}$, nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou souřadnice vektoru $f(\mathbf{u})$ v bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$. Pak platí

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Označme jako na začátku $\underline{\mathbf{g}} = \big(\mathbf{g}_1 \;\; \mathbf{g}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{g}_n\big)$, $\underline{\mathbf{h}} = \big(\mathbf{h}_1 \;\; \mathbf{h}_2 \;\; \ldots, \;\; \mathbf{h}_m\big)$ a $f(\underline{\mathbf{g}}) = \big(f(\mathbf{g}_1) \;\; f(\mathbf{g}_2) \;\; \ldots \;\; f(\mathbf{g}_n)\big)$. Dále označme $\mathbf{x} = \big(x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\big)^\top$, $\mathbf{y} = \big(y_1 \;\; y_2 \;\; \ldots \;\; y_m\big)^\top$. Pak zase můžeme psát $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{x}$ a $f(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{y}$. Poněvadž f je lineární zobrazení, z první z těchto dvou rovností plyne, že $f(\mathbf{u}) = f(\underline{\mathbf{g}}) \cdot \mathbf{x}$. Současně, jak bylo řečeno výše, podle definice matice $A = (a_{ij})$ lineárního zobrazení f v bázích $\underline{\mathbf{g}}$ a $\underline{\mathbf{h}}$ máme rovnost $f(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot A$. Dosazením do předchozí rovnosti opět s využitím asociativity příslušného násobení matic dostáváme, že

$$f(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot A \cdot \mathbf{x}.$$

To znamená, že $A \cdot \mathbf{x}$ jsou souřadnice vektoru $f(\mathbf{u})$ v bázi $\underline{\mathbf{h}}$. Ovšem také $\mathbf{y}$ jsou souřadnice vektoru $f(\mathbf{u})$ v téže bázi $\underline{\mathbf{h}}$. Vzhledem k jednoznačnosti souřadnic vektoru v dané bázi odtud vyplývá rovnost $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}$, kterou jsme měli ověřit.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$ jsou báze těchto vektorových prostorů. Nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení vektorových prostorů, nechť $A = (a_{ij})$ je matice zobrazení f v bázích $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ a nechť $B = (b_{hi})$ je matice zobrazení g v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$. Potom matice $B \cdot A$ je maticí složeného zobrazení $g \circ f : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ v bázích $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$.

Důkaz. Užijme opět zavedeného značení $\underline{\mathbf{f}} = \big(\mathbf{f}_1 \;\; \mathbf{f}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{f}_n\big)$,

$\underline{\mathbf{g}} = \big(\mathbf{g}_1 \;\; \mathbf{g}_2 \;\; \dots \;\; \mathbf{g}_m\big)$, $\underline{\mathbf{h}} = \big(\mathbf{h}_1 \;\; \mathbf{h}_2 \;\; \dots, \;\; \mathbf{h}_k\big)$ a také $f(\underline{\mathbf{f}}) = \big(f(\mathbf{f}_1) \;\; f(\mathbf{f}_2) \;\; \dots \;\; f(\mathbf{f}_n)\big)$, $g(\underline{\mathbf{g}}) = \big(g(\mathbf{g}_1) \;\; g(\mathbf{g}_2) \;\; \dots \;\; g(\mathbf{g}_m)\big)$. K tomu položme $g(f(\underline{\mathbf{f}})) = (g \circ f)(\underline{\mathbf{f}})$, kde $(g \circ f)(\underline{\mathbf{f}})$ má analogický význam jako $f(\underline{\mathbf{f}})$, takže pak obdobně předchozímu značení můžeme psát též $g(f(\underline{\mathbf{f}})) = \big(g(f(\mathbf{f}_1)) \;\; g(f(\mathbf{f}_2)) \;\; \dots \;\; g(f(\mathbf{f}_n))\big)$. Nyní zase podle definic matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{hi})$ lineárních zobrazení f a g v příslušných bázích máme rovnosti $f(\underline{\mathbf{f}}) = \underline{\mathbf{g}} \cdot A$ a $g(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot B$. Poněvadž g je lineární zobrazení, jeho aplikací na jednotlivé vektory v posloupnosti $f(\underline{\mathbf{f}})$ pak z první z uvedených rovností obdržíme, že $g(f(\underline{\mathbf{f}})) = g(\underline{\mathbf{g}}) \cdot A$. Dosazením druhé z předchozích dvou rovností do této poslední rovnosti s opětovným využitím asociativity příslušného násobení matic takto dostáváme, že

$$g(f(\underline{\mathbf{f}})) = \underline{\mathbf{h}} \cdot B \cdot A.$$

To ale právě znamená, že matice $B \cdot A$ je maticí složeného lineárního zobrazení $g \circ f$ v bázích $\underline{\mathbf{f}}$ a $\underline{\mathbf{h}}$, což bylo třeba ověřit.

Důsledek. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad tělesem $(T, +, \cdot)$, nechť $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m$ jsou báze těchto prostorů, nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je izomorfismus těchto prostorů a nechť A je matice izomorfismu f v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m$. Pak platí $n = m$, A je čtvercová regulární matice řádu $n = m$ a matice A^{-1} k ní inverzní je maticí inverzního izomorfismu $f^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ v bázích $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$.

Důkaz. Izomorfní vektorové prostory musí mít stejnou dimenzi, takže $n = m$ a matice A je čtvercová. Nechť dále B je matice inverzního izomorfismu f^{-1} v bázích $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$. Pak podle předchozího tvrzení je matice $A \cdot B$ maticí složeného zobrazení $f \circ f^{-1}$, jímž je ale identické zobrazení $id_{\mathbf{W}}$. Maticí této identické transformace prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ v bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m$ je ovšem jednotková matice E_m. Odtud plyne, že $A \cdot B = E_m$, takže A je regulární matice a $B = A^{-1}$.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze tohoto prostoru. Již dříve jsme definovali, co znamená, že čtvercová matice A řádu n nad $(T, +, \cdot)$ je maticí přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$. Připomeňme, že to nastává, pokud pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že v j-tém sloupci matice A jsou uloženy souřadnice vektoru $\mathbf{g}_j$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$. Nyní je na místě si všimnout, že A je takovou maticí přechodu právě tehdy, když A je maticí identického zobrazení $id_{\mathbf{V}}$ prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do něj samotného vzhledem k bázím $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ (v tomto pořadí). Tehdy totiž také pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že v j-tém sloupci matice A jsou obsaženy souřadnice vektoru $\mathbf{g}_j$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$.

Věnujme se nyní otázce, jak se změní matice daného lineárního zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory konečných dimenzí, přejdeme-li k jiným bázím těchto vektorových prostorů.

Kvůli přehlednosti budeme ve formulacích následujících poznatků používat už jen stručná značení bází příslušných vektorových prostorů konečných dimenzí. Bude-li tedy $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n a bude-li posloupnost vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ některou bází tohoto prostoru, kterou jsme už také zapisovali ve tvaru $\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix}$, budeme nadále pro tuto bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ užívat už jen krátké označení $\underline{\mathbf{f}}$.

Důsledek. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\underline{\mathbf{f}}$ a $\underline{\mathbf{g}}$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nechť $\underline{\mathbf{h}}$ a $\underline{\mathbf{k}}$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Nechť P je matice přechodu od báze $\underline{\mathbf{f}}$ k bázi $\underline{\mathbf{g}}$ a nechť Q je matice přechodu od báze $\underline{\mathbf{h}}$ k bázi $\underline{\mathbf{k}}$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi uvedenými prostory, nechť A je matice zobrazení f v bázích $\underline{\mathbf{f}}$ a $\underline{\mathbf{h}}$ a nechť B je matice zobrazení f v bázích $\underline{\mathbf{g}}$ a $\underline{\mathbf{k}}$. Pak platí $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Důkaz. Poněvadž $f \circ id_{\mathbf{V}} = id_{\mathbf{W}} \circ f$ je totéž zobrazení f a poněvadž podle výše uvedeného tvrzení o matici složeného lineárního zobrazení a podle komentáře předcházejícího tomuto důsledku je $A \cdot P$ maticí zobrazení $f \circ id_{\mathbf{V}}$ a $Q \cdot B$ je maticí zobrazení $id_{\mathbf{W}} \circ f$, obojí v bázích $\underline{\mathbf{g}}$ a $\underline{\mathbf{h}}$, plyne odtud, že $A \cdot P = Q \cdot B$, takže $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Jiný důkaz. Podle definic matic přechodů P a Q mezi zmíněnými bázemi daných vektorových prostorů máme rovnosti $\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{f}} \cdot P$ a $\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{h}} \cdot Q$. Ze druhé z těchto rovností vynásobením maticí Q^{-1} zprava plyne též rovnost $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{k}} \cdot Q^{-1}$. Podle definic matic A a B lineárního zobrazení f v uvedených bázích daných prostorů máme dále rovnosti $f(\underline{\mathbf{f}}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot A$ a $f(\underline{\mathbf{g}}) = \underline{\mathbf{k}} \cdot B$. Poněvadž f je lineární zobrazení, z předchozích rovností pak ale vyplývá rovněž, že

$$f(\underline{\mathbf{g}}) = f(\underline{\mathbf{f}} \cdot P) = f(\underline{\mathbf{f}}) \cdot P = \underline{\mathbf{h}} \cdot A \cdot P = \underline{\mathbf{k}} \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P.$$

To ovšem znamená, že matice $Q^{-1} \cdot A \cdot P$ je maticí zobrazení f v bázích $\underline{\mathbf{g}}$ a $\underline{\mathbf{k}}$. Z jednoznačnosti takové matice potom plyne, že $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Půjde-li dále jen o lineární transformaci jednoho vektorového prostoru konečné dimenze a o její matice ve dvou bázích tohoto prostoru, pak se formulace posledního důsledku zjednoduší:

Důsledek. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $(T, +, \cdot)$, nechť $\underline{\mathbf{f}}$ a $\underline{\mathbf{g}}$ jsou dvě báze tohoto prostoru a nechť P je matice přechodu od báze $\underline{\mathbf{f}}$ k bázi $\underline{\mathbf{g}}$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární transformace prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, nechť A je matice transformace f v bázi $\underline{\mathbf{f}}$ a nechť B je matice transformace f v bázi $\underline{\mathbf{g}}$. Pak platí $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.