Vektorové prostory

V rovině nebo v prostoru si vektory představujeme jako orientované úsečky, tedy jako úsečky, jejichž jeden krajní bod je považován za počáteční a druhý krajní bod za koncový. Vektor pak znázorňujeme jako šipku vedoucí z počátečního do koncového bodu této úsečky. Ovšem ne každé dvě různé orientované úsečky považujeme za různé vektory. Kterékoliv dvě rovnoběžné, stejně dlouhé a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor. Říká se též, že v tom případě jde jen o dvě různá umístění téhož vektoru.

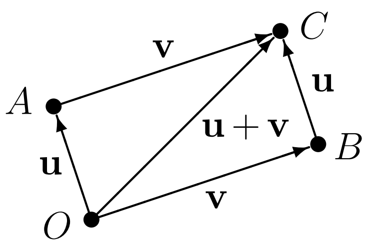
Zvolíme-li pevně nějaký bod O v rovině či v prostoru, pak můžeme každý vektor jednoznačně reprezentovat tím jeho umístěním, které má počáteční bod právě v bodě O. Při této reprezentaci pak vektory vzájemně jednoznačně odpovídají bodům v rovině či v prostoru – každý vektor odpovídá koncovému bodu svého umístění majícího počátek v bodě O. Podotkněme, že sám bod O při této korespondenci odpovídá vektoru nulové délky, jemuž říkáme nulový vektor.

Zvolíme-li v rovině, resp. v prostoru kromě počátku O ještě dvě, resp. tři souřadné osy, tedy navzájem kolmé přímky procházející bodem O, a na každé z nich umístíme nenulový vektor stejné jednotkové délky s počátkem v bodě O, dostaneme pravoúhlý souřadnicový souřadnicový systém v rovině, resp. v prostoru. Pak body roviny či prostoru jsou jednoznačně určeny dvojicemi či trojicemi svých souřadnic v tomto souřadnicovém systému, což znamená, že vzájemně jednoznačně odpovídají uspořádaným dvojicím či trojicím reálných čísel. Podobně vektory v rovině či v prostoru jsou pak při svém umístění s počátkem v bodě O jednoznačně určeny souřadnicemi svých koncových bodů, a tedy rovněž vzájemně jednoznačně odpovídají uspořádaným dvojicím či trojicím reálných čísel.

Při pevném souřadnicovém systému tedy můžme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou $\mathbb{R}^2$ všech uspořádaných dvojic reálných čísel a množinu všech vektorů v prostoru s množinou $\mathbb{R}^3$ všech uspořádaných trojic reálných čísel. Zobecníme dále tuto představu vektorů v dvourozměrném nebo trojrozměrném prostoru na libovolný n-rozměrný prostor, kde n je jakékoliv přirozené číslo. Body tohoto n-rozměrného prostoru pak obdobným způsobem, tedy skrze zvolený souřadnicový systém, vzájemně jednoznačně odpovídají uspořádaným n-ticím reálných čísel. Množinu všech vektorů v tomto n-rozměrném prostoru pak ovšem reprezentujeme analogicky jako množinu $\mathbb{R}^n$ všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Podrobněji to vypadá následovně.

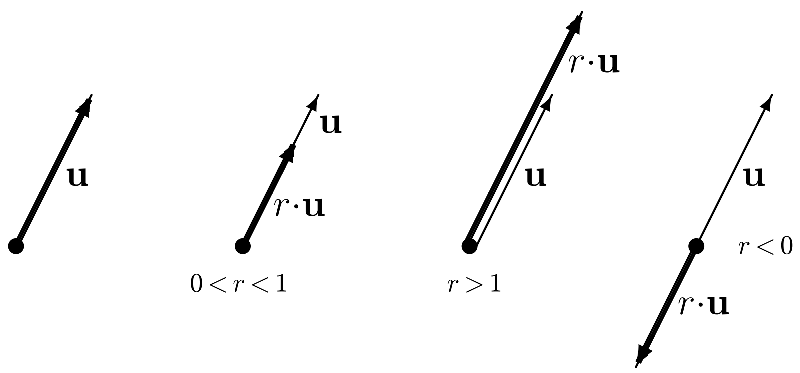
Vezměme libovolnou orientovanou úsečku v n-rozměrném prostoru zadanou svými dvěma krajními body $A, B \in \mathbb{R}^n$, tedy n-ticemi reálných čísel $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$. Pak tyto dva body, vzaté jako počáteční a koncový bod dané úsečky určují vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tak, že $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $\ldots$, $u_n = b_n - a_n$. Pak ovšem můžeme také stručně psát $B = A + \mathbf{u}$, chápeme-li tento součet po jednotlivých složkách. Tentýž vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je ovšem taktéž určen kteroukoliv jinou rovnoběžnou souhlasně orientovanou a stejně dlouhou úsečkou v n-rozměrném prostoru. To znamená, že tento vektor je rovněž určen kterýmikoliv jinými dvěma body $C, D \in \mathbb{R}^n$, tedy jinými dvěma n-ticemi reálných čísel $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$, $D = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$, bereme-li tyto dva body jako počáteční a koncový bod orientované úsečky, pokud pro tyto body platí $u_1 = d_1 - c_1$, $u_2 = d_2 - c_2$, $\ldots$, $u_n = d_n - c_n$, takže pak můžeme podobně psát $D = C + \mathbf{u}$. Samotný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je pak ovšem také n-ticí reálných čísel, a je tedy též prvkem množiny $\mathbb{R}^n$.

Vektory můžeme dále sčítat pomocí vektorového rovnoběžníku. Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dva vektory umístěné v počátku $O = [0, 0, \ldots, 0]$ n-rozměrného prostoru, pak pro koncové body A a B těchto vektorů máme $A = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ a $B = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$. Umístíme-li ovšem vektor $\mathbf{v}$ takovým způsobem, aby jeho počátek byl v bodě A, potom pro koncový bod C tohoto jeho umístění dostáváme $C = [u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ \ldots,\ u_n + v_n]$. Jinak řečeno, je-li $A = O + \mathbf{u}$ a $C = A + \mathbf{v}$, pak samozřejmě vychází $C = O + \mathbf{u} + \mathbf{v}$, což určuje bod C tak, jak bylo výše uvedeno. Je tedy C koncovým bodem součtu vektorů $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ \ldots,\ u_n + v_n)$ umístěného v počátku O n-rozměrného prostoru. To je znázorněno již zmíněným vektorovým rovnoběžníkem:



Kromě toho, je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektor v n-rozměrném prostoru a jsou-li A a B počáteční a koncový bod orientované úsečky, která je umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak opačně orientovaná úsečka, tedy úsečka s počátečním bodem B a s koncovým bodem A je umístěním opačného vektoru $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$. Úsečka nulové délky odpovídá nulovému vektoru $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$. Takto tedy kartézská mocnina $\mathbb{R}^n$, chápaná jako množina všech vektorů v n-rozměrném prostoru, spolu s právě popsanou operací sčítání vektorů $+$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{R}^n, +)$.

Vedle toho máme ještě možnost každý vektor $\mathbf{u}$ z n-rozměrného prostoru násobit libovolným reálným číslem r. V této souvislosti se čísla $r \in \mathbb{R}$ nazývají skaláry. Násobek $r \cdot \mathbf{u}$ nenulového vektoru $\mathbf{u}$ skalárem r je potom vektor rovnoběžný s vektorem $\mathbf{u}$, jeho délka je $|r|$-násobkem délky vektoru $\mathbf{u}$, a je-li přitom $r > 0$, je tento vektor orientován souhlasně s vektorem $\mathbf{u}$, zatímco je-li $r < 0$, je tento vektor orientován opačně oproti vektoru $\mathbf{u}$. Je-li $r = 0$, pak $r{\cdot}\mathbf{u}$ je nulový vektor $\mathbf{o}$. Názorně to vypadá takto:



Je-li tedy $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektor v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ a je-li $r \in \mathbb{R}$ libovolné reálné číslo, pak násobek vektoru $\mathbf{u}$ skalárem r je vektor $r{\cdot}\mathbf{u} = (r{\cdot}u_1, r{\cdot}u_2, \ldots, r{\cdot}u_n)$ z prostoru $\mathbb{R}^n$. Tímto způsobem je zavedena tzv. vnější operace $\cdot$ skalárního násobku přiřazující každému číslu $r \in \mathbb{R}$ a každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ násobek $r{\cdot}\mathbf{u}$ vektoru $\mathbf{u}$ skalárem r. Tato vnější operace skalárního násobku má pak řadu příznivých vlastností. Tyto vlastnosti jsou v obecnějším kontextu podrobně vypsány dále. Máme-li nyní na zřeteli celou takto vzniklou strukturu na množině $\mathbb{R}^n$, mluvíme o vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel.

Postoupíme-li v procesu zobecňování a abstrakce ještě dále a vezmeme-li místo reálných čísel jakékoliv těleso a místo jeho n-té kartézské mocniny jakoukoliv komutativní grupu, která bude svázána s daným tělesem vnější operací skalárního násobku mající analogické vlastnosti jako doposud, dostaneme následující obecný pojem vektorového prostoru.

Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a buď $(\mathbf{V}, +)$ komutativní grupa. Nechť je dále dáno zobrazení

$$\cdot : T \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

přiřazující každému prvku $s \in T$ a každému prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ prvek $s{\cdot}\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ takovým způsobem, že pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned}
&s \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s{\cdot}\mathbf{u} + s{\cdot}\mathbf{v},\\
&(s + t) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} + t{\cdot}\mathbf{u},\\
&(s \cdot t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot (t \cdot \mathbf{u}),\\
&1{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Pak trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se nazývá **vektorový prostor nad tělesem** $(T, +, \cdot)$.

Prvky množiny $\mathbf{V}$ se nazývají **vektory** a prvky množiny T se nazývají **skaláry**. Neutrální prvek grupy $(\mathbf{V}, +)$ se značí symbolem $\mathbf{o}$ a nazývá se **nulový vektor**. Opačný prvek k vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ v grupě $(\mathbf{V}, +)$ se značí symbolem $-\mathbf{u}$ a nazývá se **opačný vektor** k vektoru $\mathbf{u}$. Vektor $s{\cdot}\mathbf{u}$, kde $s \in T$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, se nazývá **skalární násobek** vektoru $\mathbf{u}$ prvkem s.

Symbolem $+$ jsou ve struktuře vektorového prostoru označeny dvě binární operace, totiž sčítání $+ : T \times T \rightarrow T$ v tělese $(T, +, \cdot)$ a sčítání $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ v komutativní grupě $(\mathbf{V}, +)$. Podobně symbolem $\cdot$ je označena jednak binární operace násobení $\cdot : T \times T \rightarrow T$ v tělese $(T, +, \cdot)$ a také vnější operace skalárního násobku $\cdot : T \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, která je pak uváděna v rámci trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Je třeba mít tuto okolnost na zřeteli, i když nebude moci dojít k nedorozumění, poněvadž z kontextu bude vždy jasné, o kterou operaci právě jde.

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ budeme opět synbolem $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ značit vektor $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$. Pak z vlastností operací ve struktuře vektorového prostoru uvedených až doposud plynou jako důsledky také následující vlastnosti.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned}
&s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v},\\
&(s - t) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u},\\
&s \cdot (-\mathbf{u}) = (-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u}),\\
&s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff s = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}.
\end{aligned}$$

Důkaz. Ježto $(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{o}$ a $s{\cdot}\mathbf{v} - s{\cdot}\mathbf{v} = s{\cdot}\mathbf{v} + (-s{\cdot}\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, dostáváme odtud $s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v})) + s{\cdot}\mathbf{v} - s{\cdot}\mathbf{v} = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) - s{\cdot}\mathbf{v} = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v}$.

Dále poněvadž $(-t) + t = 0$ a $t{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = t{\cdot}\mathbf{u} + (-t{\cdot}\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, dostáváme podobně $(s - t) \cdot \mathbf{u} = (s + (-t)) \cdot \mathbf{u} + t{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = (s + (-t) + t) \cdot \mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u}$.

Poněvadž podle předchozího $s{\cdot}\mathbf{u} + s \cdot (-\mathbf{u}) = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je vektor $s \cdot (-\mathbf{u})$ opačným vektorem k vektoru $s{\cdot}\mathbf{u}$, takže máme $s \cdot (-\mathbf{u}) = -(s{\cdot}\mathbf{u})$. Podobně poněvadž $s{\cdot}\mathbf{u} + (-s) \cdot \mathbf{u} = (s + (-s)) \cdot \mathbf{u} = (s - s) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je vektor $(-s) \cdot \mathbf{u}$ opačným vektorem k vektoru $s{\cdot}\mathbf{u}$, takže máme také $(-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u})$.

Je-li $s = 0$, pak podle předchozích poznatků máme $0{\cdot}\mathbf{u} = (0 - 0) \cdot \mathbf{u} = 0{\cdot}\mathbf{u} - 0{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak podobně $s{\cdot}\mathbf{o} = s \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{o}) = s \cdot \mathbf{o} - s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$. Je-li naopak $s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$ a je-li přitom $s \neq 0$, pak $\mathbf{u} = 1{\cdot}\mathbf{u} = (s^{-1} \cdot s) \cdot \mathbf{u} = s^{-1} \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = s^{-1} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ podle posledního zjištění, takže pak $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Důsledek. Ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ platí

$$(-1){\cdot}\mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

Důkaz. Z vlastností operací v předchozím tvrzení a v definici vektorového prostoru plyne, že $(-1){\cdot}\mathbf{u} = -(1{\cdot}\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť n je přirozené číslo. Pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_1, s_2, \dots, s_n \in T\}$ spolu s operací sčítání $+$ definovanou po složkách předpisem $(s_1, s_2, \dots, s_n) + (t_1, t_2, \dots, t_n) = (s_1 + t_1,\ s_2 + t_2,\ \dots,\ s_n + t_n)$ a s vnější operací skalárního násobku $\cdot$ definovanou podobně předpisem $s \cdot (t_1, t_2, \dots, t_n) = (s \cdot t_1, s \cdot t_2, \dots, s \cdot t_n)$ tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Speciální případ, kdy tělesem $(T, +, \cdot)$ bylo těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel, byl rozebrán v úvodu této kapitoly.

Uvažme množinu $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ všech zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Na této množině definujme operaci sčítání $+$ pro libovolná $f, g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) \big((f + g)(x) = f(x) + g(x)\big)$$

a dále definujme vnější operaci skalárního násobku $\cdot$ pro libovolná $r \in \mathbb{R}$ a $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) \big((r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)\big).$$

Pak $\big(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, +, \cdot\big)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel.

Polynomy

Jiný příklad vektorového prostoru je tvořen polynomy nad daným tělesem.

Polynomy například s reálnými koeficienty si představujeme jako výrazy tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty. Je ovšem možné si dále představovat, že takový polynom má rovněž koeficienty $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ u mocnin $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots$ a že všechny tyto další koeficienty jsou rovny nule. Můžeme tedy tento polynom vnímat jako směrem doleva nekonečný výraz

$$\cdots + a_{n+2}x^{n+2} + a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

v němž je ale $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$, takže takový polynom má jen konečný počet nenulových koficientů. Budeme nadále používat tuto konvenci, aniž to budeme znovu připomínat. Dva polynomy považujeme za stejné, mají-li koeficienty u všech mocnin proměnné x stejné.

Tuto představu můžeme dále zobecnit tak, že místo reálných čísel budeme brát koeficienty z nějakého obecného pevně daného tělesa $(T, +, \cdot)$, případně ještě obecněji z daného komutativního okruhu $(R, +, \cdot)$. Množinu všech polynomů nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$ označujeme symbolem $R[x]$.

Vzpomeneme-li si, jakým způsobem se polynomy s reálnými koeficienty sečítají a násobí, pak přímočarým zobecněním příslušných vzorců na případ polynomů s koeficienty z obecného komutativního okruhu $(R, +, \cdot)$ dostáváme následující definici sečítání a násobení v rámci množiny $R[x]$ všech polynomů nad tímto okruhem $(R, +, \cdot)$. Tyto operace, aniž by hrozilo nebezpečí záměny, budeme rovněž značit symboly $+, \cdot$.

Buď $(R, +, \cdot)$ libovolný komutativní okruh. Pak pro kterékoliv dva polynomy

$$\begin{aligned} f &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad \text{a} \\ g &= b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

z $R[x]$ definujeme součet $f+g$ těchto polynomů jakožto polynom

$$f+g = (a_k+b_k)x^k + (a_{k-1}+b_{k-1})x^{k-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0,$$

kde $k = \max\{m, n\}$. Dále definujeme součin $f \cdot g$ těchto polynomů jakožto polynom

$$f \cdot g = c_\ell x^\ell + c_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

kde $\ell = m + n$ a pro jednotlivé koeficienty $c_0, c_1, c_2, \ldots$ máme $c_0 = a_0{\cdot}b_0$, $c_1 = a_0{\cdot}b_1 + a_1{\cdot}b_0$, $c_2 = a_0{\cdot}b_2 + a_1{\cdot}b_1 + a_2{\cdot}b_0$, ..., takže pro každý index $j \in \{0, 1, 2, \ldots, \ell\}$ je splněno

$$c_j = a_0{\cdot}b_j + a_1{\cdot}b_{j-1} + \cdots + a_{j-1}{\cdot}b_1 + a_j{\cdot}b_0,$$

čili pro každé $j \in \{0, 1, 2, \ldots, \ell\}$ je $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i{\cdot}b_{j-i}$.

Poznamenejme, že s takto definovanými operacemi pak platí:

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ komutativní okruh. Potom rovněž $(R[x], +, \cdot)$ je komutativní okruh.

Důkaz. Ověření všech vlastností komutativního okruhu pro $(R[x], +, \cdot)$ je rutinní záležitostí.

Je-li $(R, +, \cdot)$ komutativní okruh, pak okruh $(R[x], +, \cdot)$ se nazývá **okruh polynomů nad okruhem** $(R, +, \cdot)$.

Potom polynomy z $R[x]$ tvaru

$$\cdots + a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

v nichž $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$, se nazývají **konstantní polynomy**. Takový konstantní polynom pak lze ztotožnit s prvkem a_0 okruhu $(R, +, \cdot)$. Tímto způsobem je potom komutativní okruh $(R, +, \cdot)$ vnořen do okruhu polynomů $(R[x], +, \cdot)$.

Nechť nyní $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť $T[x]$ je množina všech polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak s výše definovanými operacemi $+$ a $\cdot$ na množině $T[x]$ máme podle předchozího tvrzení komutativní okruh $(T[x], +, \cdot)$, nazývaný okruh polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Zúžíme-li nyní druhou z těchto operací, tedy operaci $\cdot$ tak, že ji ponecháme definovanou pouze pro ty dvojice polynomů $f, g \in T[x]$, kde f je konstantní polynom, a tedy $f = s$ pro jistý prvek $s \in T$, dostaneme tak vnější operaci skalárního násobku přiřazující každému prvku $s \in T$ a každému polynomu $g \in T[x]$ polynom $s{\cdot}g \in T[x]$. Podrobněji, je-li

$$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

pak polynom $s{\cdot}g$ je dán předpisem

$$s{\cdot}g = sb_m x^m + sb_{m-1}x^{m-1} + \cdots + sb_1 x + sb_0.$$

Je jasné, že tímto způsobem z množiny $T[x]$ všech polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$ vzniká vektorový prostor $(T[x], +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Matice nad vektorovým prostorem

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť m, n jsou přirozená čísla. Definujeme, co je matice typu m/n nad tímto vektorovým prostorem. Zcela v analogii s dřívější definicí matic nad okruhy či tělesy taková matice $\varGamma$ vznikne, když libovolných $m{\cdot}n$ prvků z $\mathbf{V}$ naskládáme do obdélníkového schematu o m řádcích a n sloupcích. Označíme-li pro každá $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$ vektor z $\mathbf{V}$ ležící v i-tém řádku a v j-tém sloupci matice $\varGamma$ jako $\mathbf{g}_{ij}$, pak matici $\varGamma$ můžeme zapsat v obvyklém tvaru

$$\varGamma \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \cdots & \mathbf{g}_{1n} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \cdots & \mathbf{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{g}_{m1} & \mathbf{g}_{m2} & \cdots & \mathbf{g}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Stručněji se tato matice zapisuje zase ve tvaru

$$\varGamma \;=\; (\mathbf{g}_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$$

anebo jen ve tvaru $\varGamma = (\mathbf{g}_{ij})$ s udáním, že jde o matici typu m/n nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Pro matice nad vektorovými prostory je možno obdobně jako pro matice nad okruhy definovat operaci sčítání matic. Buď opět $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolné dvě matice $\varGamma = (\mathbf{g}_{ij})$ a $\varTheta = (\mathbf{h}_{ij})$ téhož typu m/n nad tímto vektorovým prostorem definujeme jejich **součet** $\mathit{\Gamma} + \mathit{\Theta}$ jako matici $\mathit{\Pi} = (\mathbf{p}_{ij})$ typu m/n, kde pro každá $i \in \{1, \dots, m\}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$ je $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{h}_{ij}$. To znamená, že lze psát, že $\mathit{\Gamma} + \mathit{\Theta} = (\mathbf{g}_{ij} + \mathbf{h}_{ij})$.

Dále pro libovolnou matici $\mathit{\Gamma} = (\mathbf{g}_{ij})$ typu m/n nad zmíněným vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a pro libovolný prvek s z tělěsa $(T, +, \cdot)$ definujeme **skalární násobek** $s{\cdot}\mathit{\Gamma}$ matice $\mathit{\Gamma}$ prvkem s jako matici $\mathit{\Upsilon} = (\mathbf{u}_{ij})$ typu m/n, kde pro každá $i \in \{1, \dots, m\}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$ je $\mathbf{u}_{ij} = s{\cdot}\mathbf{g}_{ij}$. Takže lze psát, že $s{\cdot}\mathit{\Gamma} = (s{\cdot}\mathbf{g}_{ij})$.

Navíc můžeme k dané matici $\mathit{\Gamma} = (\mathbf{g}_{ij})$ nad zmíněným vektorovým prostorem uvažovat k ní **opačnou** matici $-\mathit{\Gamma} = (-\mathbf{g}_{ij})$. Z dříve uvedených vlastností vektorových prostorů pak plyne, že tuto opačnou matici lze pořídit jako skalární násobek matice $\mathit{\Gamma}$ prvkem -1 tělěsa $(T, +, \cdot)$, takže máme $-\mathit{\Gamma} = (-1){\cdot}\mathit{\Gamma}$. Pak ovšem platí $\mathit{\Gamma} + (-\mathit{\Gamma}) = \mathit{\Omega}$, kde $\mathit{\Omega}$ je nulová matice nad daným vektorovým prostorem, jejíž všechny prvky jsou rovny nulovému vektoru $\mathbf{o}$.

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, pak označíme-li symbolem $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{V})$ množinu všech matic typu m/n nad tímto vektorovým prostorem, vidíme, že výše zavedené sčítání takových matic je binární operací na množině $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{V})$. Dále výše zavedené skalární násobení těchto matic prvky tělesa $(T, +, \cdot)$ je vnější operací, tedy zobrazením kartézského součinu $T \times \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{V})$ do množiny $\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{V})$. Z vlastností vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je pak zřejmý následující fakt.

Tvrzení. $(\mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{V}), +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Nechť opět $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Rozšíříme nyní vnější operaci skalárního násobení vektoru skalárem v tomto vektorovém prostoru na operaci součinu dvou matic vhodných typů, z nichž první bude obyčejná matice nad tělesem $(T, +, \cdot)$, zatímco druhá bude matice nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Takže pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(T, +, \cdot)$ a pro libovolnou matici $\mathit{\Gamma} = (\mathbf{g}_{jk})$ typu n/p nad $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ definujeme jejich **součin** $A \cdot \mathit{\Gamma}$ jako matici $\mathit{\Theta} = (\mathbf{h}_{ik})$ typu m/p nad $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde pro každá $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ klademe

$$\mathbf{h}_{ik} = a_{i1} \cdot \mathbf{g}_{1k} + a_{i2} \cdot \mathbf{g}_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot \mathbf{g}_{nk}.$$

Rozdíl oproti obyčejnému násobení dvou matic nad tělesem $(T, +, \cdot)$ tedy spočívá v tom, že zde je operace součtu v $(T, +, \cdot)$ nahrazena operací součtu ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a operace součinu v $(T, +, \cdot)$ je nahrazena vnější operací skalárního násobku ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Podobně přímočaře jako pro obvyklé násobení matic se ukáže, že i toto násobení matic je asociativní v následujícím smyslu:

Tvrzení. Pro libovolnou matici A typu m/n, pro libovolnou matici B typu n/p, obě nad tělesem $(T, +, \cdot)$, a pro libovolnou matici $\mathit{\Gamma}$ typu p/q nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tímto tělesem platí

$$A \cdot (B \cdot \mathit{\Gamma}) = (A \cdot B) \cdot \mathit{\Gamma}.$$

Obdobně toto násobení matic je distributivní vůči sčítání:

Tvrzení. Pro libovolnou matici A typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a pro libovolné matice $\mathit{\Gamma}$ a $\mathit{\Theta}$, obě typu n/p nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tímto tělesem, platí

$$A \cdot (\mathit{\Gamma} + \mathit{\Theta}) = A{\cdot}\mathit{\Gamma} + A{\cdot}\mathit{\Theta}.$$

Pro libovolné matice A a B, obě typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, a pro libovolnou matici $\mathit{\Gamma}$ typu n/p nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tímto tělesem platí

$$(A + B) \cdot \mathit{\Gamma} = A{\cdot}\mathit{\Gamma} + B{\cdot}\mathit{\Gamma}.$$

Kvůli pozdějšímu použití z notačních důvodů definujeme rovněž součin matice nad vektorovým prostorem a matice nad příslušným tělesem skalárů v tomto uvedeném pořadí. Nechť tedy znovu $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pro pro libovolnou matici $\varDelta = (\mathbf{f}_{ij})$ typu m/n nad $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a pro libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/p nad $(T, +, \cdot)$ definujeme **součin** $\varDelta \cdot B$ jako matici $\varPi = (\mathbf{p}_{ik})$ typu m/p nad $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde pro každá $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ klademe

$$\mathbf{p}_{ik} = b_{1k} \cdot \mathbf{f}_{i1} + b_{2k} \cdot \mathbf{f}_{i2} + \cdots + b_{nk} \cdot \mathbf{f}_{in}.$$

Pro uvedení tohoto násobení do souvislosti s násobením matic definovaným výše je na místě ještě doplnit, že analogicky jako pro matice nad okruhy či tělesy, také pro matice nad vektorovými prostory lze definovat pojem transponované matice. Budeme přitom pro tyto transponované matice užívat stejného označení jako pro transponované matice k maticím nad okruhy či tělesy. Pak z předchozích dvou definic součinů matic plynou následující rovnosti. Poznamenejme, že v nich vystupují tytéž matice $\varGamma$, $\varDelta$ a A, B jako ve zmíněných definicích.

$$(A \cdot \varGamma)^\top = \varGamma^\top \cdot A^\top, \qquad (\varDelta \cdot B)^\top = B^\top \cdot \varDelta^\top.$$

Rovněž pro násobení matic zavedené ve druhé definici platí analogie předchozího tvrzení o asociativitě tohoto násobení:

Tvrzení. Pro libovolnou matici $\varGamma$ typu m/n nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$, pro libovolnou matici A typu n/p nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a pro libovolnou matici B typu p/q nad tělesem $(T, +, \cdot)$ platí

$$\varGamma \cdot (A \cdot B) = (\varGamma \cdot A) \cdot B.$$

Důkaz. Stačí, když dokážeme rovnost

$$(\varGamma \cdot (A \cdot B))^\top = ((\varGamma \cdot A) \cdot B)^\top.$$

S využitím druhého z předchozích vztahů s transponovanými maticemi a s použitím asociativity násobení matic zavedeného v první definici ovšem vychází

$$(\varGamma \cdot (A \cdot B))^\top = (A \cdot B)^\top \cdot \varGamma^\top = (B^\top \cdot A^\top) \cdot \varGamma^\top = \\ = B^\top \cdot (A^\top \cdot \varGamma^\top) = B^\top \cdot (\varGamma \cdot A)^\top = ((\varGamma \cdot A) \cdot B)^\top.$$

Obdobně lze ukázat, že i toto druhé násobení matic je z obou stran distributivní vůči sčítání matic.