

# 8. AFINNÍ PODPROSTORY A AFINNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

# Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme takový pojem podprostoru, který by např. v  $\mathbb{R}^3$  zahrňoval **všechny** přímky a roviny, tj. nejen ty procházející počátkem.

Zavedeme tedy definici pojmu **afinního podprostoru** nebo též **lineární variety** a pojmu **afinního zobrazení**.

Těžištěm kapitoly bude klasifikace vzájemné polohy lineárních variet ve vektorovém prostoru.

V celé kapitole  $K$  označuje pevné těleso,  $V$  označuje nějaký pevný, ale jinak libovolný, vektorový prostor nad tělesem  $K$ ,  $m, n$  jsou přirozená čísla

# Obsah přednášky

## Obsah

<b>8</b>	<b>Afinní podprostory</b>	<b>4</b>
8.1	Body a vektory . . . . .	4
8.2	Afinní podprostory . . . . .	8
8.3	Průnik a spojení afinních podprostorů	25
8.4	Vzájemná poloha afinních podprostorů	39
8.5	Afinní zobrazení . . . . .	47

# Body a vektory I

## 8 Afinní podprostory a afinní zobrazení

### 8.1 Body a vektory

Na vektory se díváme jako na orientované úsečky s počátkem v bodě 0. Celý prostor chápeme jako *homogenní*, t.j. všechny body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v něm žádný privilegovaný bod za počátek.

# Body a vektory II

*Afinním prostorem* nad tělesem  $K$  rozumíme vektorový prostor  $V$  nad tímto tělesem (prvky sa z vektorů staly opět body a počátek, t. j. nulový vektor, ztratil svoje výsadní postavení – stal se z něho bod jako každý jiný).

Přesněji:

# Body a vektory III

**Afinním prostorem  $\mathcal{A}$  se zaměřením  $V$**  rozumíme množinu  $P$  spolu se zobrazením  $+ : P \times V \rightarrow P$  daným  $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$  tak, že platí.

1.  $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$  pro všechny body  $\mathbf{p} \in P$
2.  $\mathbf{p} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  pro všechny vektory  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \mathbf{p} \in P$
3. pro každé dva body  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P$  existuje právě jeden vektor  $\mathbf{v} \in V$  takový, že  $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \mathbf{q}$ .  
Značíme jej  $\vec{p\mathbf{q}}$  nebo  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ .

# Body a vektory IV

Běžně budeme užívat značení  $p \in \mathcal{A}$  místo  $p \in P$ , tj. nebudeme rozlišovat mezi afinním prostorem a jeho nosnou množinou.

Uvědomme si, že mezi vektory z  $V$  a body z  $P$  existuje vzájemně jednoznačná korespondence, můžeme tedy bez újmy na obecnosti ztotožnit  $V$  s  $P$ .

# Afinní podprostory I

## 8.2 Afinní podprostory

Písmeny  $p, q, r$  budeme (i s indexy) značit výlučně body,  $u, v, w$  označují zase výlučně vektory,  $x, y, z$  mohou podle potřeby označovat body i vektory.

Rovněž se dohodneme, že rozdíl dvou bodů budeme chápat jako vektor a součet bodu a vektoru jako bod.



# Afinní podprostory II

Nechť  $p, q \in V$ ,  $p \neq q$ . **Přímkou** procházející nebo též určenou body  $p, q$  rozumíme množinu  $\ell(p, q)$ , kterou dostaneme tak, že do bodu  $p$  umístíme všechny možné skalární násobky vektoru  $q - p$ .

Typický bod přímky  $\ell(p, q)$  má tedy tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q},$$

kde  $t \in K$ , tj.

$$\ell(p, q) = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q}; s, t \in K \ \& \ s + t = 1\} \subseteq V.$$

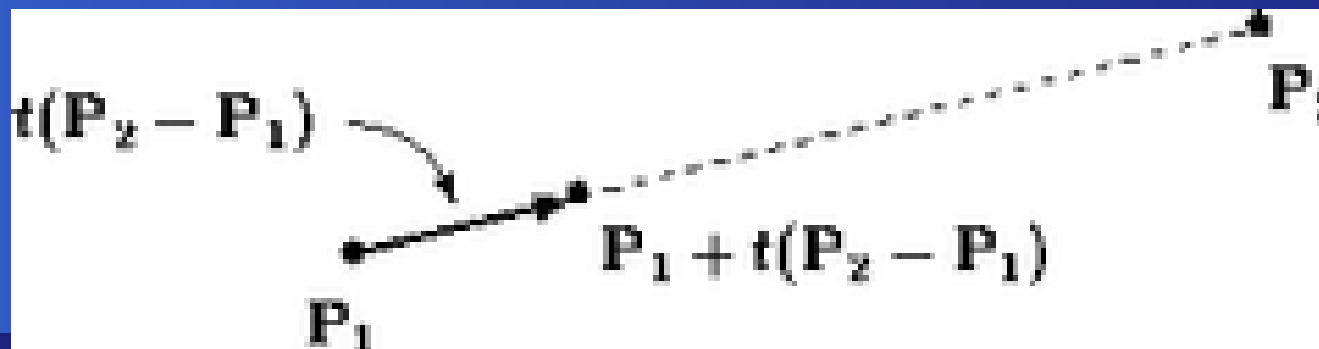
# Afinní podprostory III

Tento výraz má smysl i pro  $p = q$ , tehdy však nejde o přímku ale o jednobodovou množinu  $\ell(p, p) = \{p\}$ .

Z uvedeného tvaru ihned vidíme, že

$$\ell(p, q) = \ell(q, p)$$

pro libovolné  $p, q \in V$ .



# Afinní podprostory IV

Podmnožinu  $M$  vektorového prostoru  $V$  nazýváme jeho **afinním podprostorem** nebo též **lineární varietou** ve  $V$ , pokud  $M \neq \emptyset$  a pro všechna  $p, q \in M$  platí  $\ell(p, q) \subseteq M$ .

Lineární kombinaci, t. j. výraz tvaru

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \dots + t_n\mathbf{p}_n = \sum_{i=0}^n t_i\mathbf{p}_i,$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in V$ ,  $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$ , nazýváme **afinní kombinací** bodů  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ , pokud platí  $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$ .

# Afinní podprostory $V$

Afinní kombinací bodů budeme chápat jako bod; jiné lineární kombinace bodů než afinní se v našich úvahách nevyskytují.

Každá afinní kombinace je neprázdná, t. j. obsahuje alespoň jeden člen.

**Tvrzení 8.2.1** *Pro libovolnou neprázdnou množinu  $M \subseteq V$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

# Afinní podprostory VI

- (i)  $M$  je afinní podprostor ve  $V$ ;
- (ii) pro libovolné  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M, s \in K$  platí
$$s\mathbf{p} + (1 - s)\mathbf{q} \in M;$$
- (iii) pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a libovolné  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in M, t_0, t_1, \dots, t_n \in K$  takové, že

$$t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1, \text{ platí}$$

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \dots + t_n\mathbf{p}_n \in M.$$

# Afinní podprostory VII

**Věta 8.2.2** *Nechť  $M \subseteq V$ . Potom  $M$  je afinní podprostor ve  $V$  právě tehdy, když existuje bod  $\mathbf{p} \in V$  a lineární podprostor  $S \subseteq V$  tak, že*

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u}; \mathbf{u} \in S\}.$$

*V tomto případě pro všechny  $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in M, \mathbf{u} \in S$  platí*

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} \in S, \quad \mathbf{q} + \mathbf{u} \in M, \quad M = \mathbf{q} + S,$$
$$S = \{\mathbf{x} - \mathbf{q}; \mathbf{x} \in M\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

# Afinní podprostory VIII

**Důsledek 8.2.3** *Každý lineární podprostor  $S$  vektorového prostoru  $V$  je jeho afinním podprostorem. Afinní podprostor  $M$  vektorového prostoru  $V$  je jeho lineárním podprostorem právě tehdy, když  $0 \in M$ .*

**Zaměřením** nebo též **směrovým podprostorem** afinního podprostoru  $M \subseteq V$  nazýváme lineární podprostor

$$\text{Dir}M = \{\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\} \subseteq V.$$

# Afinní podprostory IX

$\text{Dir}M$  je jediný lineární podprostor ve  $V$  takový, že  $M = \mathbf{p} + \text{Dir}M$  pro nějaké (pro každé)  $\mathbf{p} \in M$ .  
Pro každé  $\mathbf{p} \in M$  platí

$$\text{Dir}M = \{\mathbf{x} - \mathbf{p}; \mathbf{x} \in M\}.$$

Zejména je tedy každý afinní podprostor afinním prostorem ve smyslu odstavce 1.



# Afinní podprostory $X$

Pro libovolnou uspořádanou  $(n + 1)$ -tici bodů  $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ , vektorového prostoru  $V$ , případně pro jeho konečnou podmnožinu  $\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\} \neq \emptyset$ , označme

$$\ell(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n) = \{t_0\mathbf{p}_0 + \dots + t_n\mathbf{p}_n; t_0, \dots, t_n \in K \ \& \ t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

množinu všech afinních kombinací bodů  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ .

# Afinní podprostory XI

Z právě dokázaného tvrzení vyplývá, že  $\ell(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$  je nejmenší afinní podprostor ve  $V$ , který obsahuje všechny body  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ ; nazýváme ho **afinní obal** bodů nebo i afinní podprostor **generovaný** body  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ .

Pro každou neprázdnou množinu  $X \subseteq V$  můžeme definovat její **afinní obal**  $\ell(\overline{X})$ , nazývaný též afinní podprostor **generovaný** množinou  $X$ , jako množinu všech (konečných) afinních kombinací bodů z  $X$ .

# Afinní podprostory XII

Opět platí, že  $\ell(X)$  je nejmenší afinní podprostor ve  $V$  tak, že  $X \subseteq \ell(X)$ .

**Tvrzení 8.2.4** *Nechť  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$ . Potom*

$$\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \mathbf{p}_0 + [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0],$$

$$\text{Dir}\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0].$$

# Afinní podprostory XIII

*Dimenzí* nebo též *rozměrem* afinního podprostoru  $M \subseteq V$ , píšeme  $\dim M$ , nazýváme dimenzi jeho zameření, tedy

$$\dim M = \dim \text{Dir} M.$$

Body  $p_0, p_1, \dots, p_n$  vektorového prostoru  $V$  nazýváme **afinně nezávislé**, pokud vektory  $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$  jsou lineárně nezávislé.

# Afinní podprostory XIV

Z následujícího očividného tvrzení vyplývá, že body  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$  jsou afinně nezávislé právě tehdy, když pro nějaké (pro každé)  $0 \leq k \leq n$  vektory  $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$ , kde  $0 \leq j \leq n$  a  $j \neq k$ , jsou lineárně nezávislé.

**Tvrzení 8.2.5** *Body  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$  jsou afinně nezávislé právě tehdy, když*

$$\dim \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = n.$$

# Afinní podprostory XV

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve  $V$  jsou právě všechny body  $p \in V$  (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve  $V$ ). Tyto afinní podprostory nazýváme též **triviální**.

Jednorozměrné afinní podprostory ve  $V$  nazýváme **přímkami**. Každá přímka má skutečně tvar  $\ell(p, q)$  pro nějaké afinně nezávislé (t. j. různé) body  $p, q \in V$ .

Dvojrzměrné afinní podprostory ve  $V$  nazýváme **rovinami**.

# Afinní podprostory XVI

Samotný prostor  $V$  je svým *nevlastním* afinním podprostorem.

Pokud  $\dim V = n$ , tak  $(n - 1)$ -rozměrné afinní podprostory ve  $V$  nazýváme *nadrovinami*.

Pojmy „bod“, „přímka“ a „rovina“ jsou absolutní v tom smyslu, že závisí jen na dimenzi příslušného afinního podprostoru.

Pojem nadroviny je relativní, protože závisí na vztahu dimenzí afinního podprostoru a celého prostoru.

# Afinní podprostory XVII

Pokud  $\dim V = 1$  (t. j. pokud samotné  $V$  je přímka), tak každý bod ve  $V$  je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

V trojrozměrném prostoru  $V$  pojmy roviny a nadroviny splývají.

V čtyřrozměrném prostoru jsou nadrovinami trojrozměrné podprostory; atd.

V 0-rozměrném (t. j. jednobodovém) prostoru  $V$  nejsou přímky, roviny ani nadroviny.



# Průnik a spojení AP I

## 8.3 Průnik a spojení afinních podprostorů

**Tvrzení 8.3.1** *Necht'  $M, N \subseteq V$  jsou afinní podprostory. Potom  $M \cap N$  je afinní podprostor ve  $V$  právě tehdy, když  $M \cap N \neq \emptyset$ . V tomto případě*

$$\text{Dir}(M \cap N) = \text{Dir}M \cap \text{Dir}N.$$

Neprázdnost průniku  $M \cap N$  můžeme zaručit za předpokladu, že lineární prostor  $\text{Dir}M + \text{Dir}N$  je dostatečně velký

# Průnik a spojení AP II

**Tvrzení 8.3.2** *Necht'  $M, N \subseteq V$  jsou afinní podprostory. Potom*

$$\text{Dir}M + \text{Dir}N = V \Rightarrow M \cap N \neq \emptyset.$$

**Spojením** afinních podprostorů  $M, N \subseteq V$ , píšeme  $M \sqcup N$ , nazýváme afinní obal jejich sjednocení. Tedy

$$M \sqcup N = \ell(M \cup N).$$

# Průnik a spojení AP III

Zřejmě  $M \sqcup N$  je nejmenší afinní podprostor ve  $V$ , který obsahuje  $M$  i  $N$ , a pro lineární podprostory  $S, T \subseteq V$  platí  $S \sqcup T = S + T$ .

# Průnik a spojení AP IV

**Tvrzení 8.3.3** *Necht'  $M, N \subseteq V$  jsou afinní podprostory.*

*(a) Pokud  $M \cap N \neq \emptyset$ , tak*

$$\text{Dir}(M \sqcup N) = \text{Dir}M + \text{Dir}N,$$

$$M \sqcup N = M + \text{Dir}N = N + \text{Dir}M.$$

*(b) Pokud  $M \cap N = \emptyset$ , tak pro  $\mathbf{p} \in M, \mathbf{q} \in N$  platí*

$$\text{Dir}(M \sqcup N) = [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \text{Dir}M + \text{Dir}N,$$

$$M \sqcup N = M + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \text{Dir}N) = \\ N + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \text{Dir}M).$$

# Průnik a spojení AP V

**Poznámka** Obě rovnosti z (b) jsou splněné i za předpokladu  $M \cap N \neq \emptyset$ .

V tomto případě však pro libovolné  $\mathbf{r} \in M \cap N$  platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \in \text{Dir}M + \text{Dir}N,$$

takže vektor  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$  můžeme vynechat.

# Průnik a spojení AP VI

**Důsledek 8.3.4** *Necht'  $M, N \subseteq V$  jsou konečně rozměrné afinní podprostory. Potom*

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N - \dim(M \cap N), & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N - \dim(\text{Dir} M \cap \text{Dir} N) + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

# Průnik a spojení AP VII

**Příklad 8.3.5** *Ve vektorovém prostoru  $V$  uvažujme konečně rozměrné afinní podprostory*

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m], \quad N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n].$$

*Potom*

$$M \sqcup N = \begin{cases} \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

# Průnik a spojení AP VIII

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$



# Průnik a spojení AP IX

Pokud předpokládáme, že jak vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  tak vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  jsou lineárně nezávislé, pak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n - k, & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n - k + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde  $k = \dim([\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \cap [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n])$ .

# Průnik a spojení AP X

**Příklad 8.3.6** V sloupcovém prostoru  $\mathbb{R}^4$  jsou dané vektory  $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$ ,  $\mathbf{y} = (0, -3, 1, -1)^T$ ,  $\mathbf{z} = (1, 1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{u} = (0, -2, 4, 3)^T$ ,  $\mathbf{v} = (2, 6, 2, 5)^T$ ,  $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^T$  a blíže neurčené body  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ .

Potom  $S = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ ,  $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$  jsou lineární podprostory a  $M = \mathbf{p} + S$ ,  $N = \mathbf{q} + T$  jsou afinní podprostory v  $\mathbb{R}^4$ .

Najdeme dimenze lineárních podprostorů  $S + T$ ,  $S \cap T$  a afinních podprostorů  $M \cap N$ ,  $M \sqcup N$  v závislosti na  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ .

# Průnik a spojení AP XI

Lineární podprostor  $S + T$  je generovaný sloupci blokové matice

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right),$$

přičemž sloupce levého bloku generují lineární podprostor  $S$  a sloupce pravého bloku lineární podprostor  $T$ .

# Průnik a spojení AP XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s následující blokovou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ve stupňovitém tvaru, jejíž řádky mají vedoucí prvky ve sloupcích 1, 2, 3 a 6.

# Průnik a spojení AP XIII

Vidíme, že vektory  $x, y, z$  tvoří bázi  $S$  a vektory  $x, y, z, w$  bázi  $S + T$ . Doupravením pravého bloku na řádkově ekvivalentní stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se můžeme přesvědčit, že i vektory  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi  $T$ .

# Průnik a spojení AP XIV

Celkem  $\dim S = \dim T = 3$ ,  $\dim(S + T) = 4$ .

Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplývá  $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$ .

Tedy  $S + T = \mathbb{R}^4$ . Odtud pak  $M \cap N \neq \emptyset$ .

Proto  $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$ . Odtud  $\dim(M \sqcup N) = \dim(S + T) = 4$ .

# Vzájemná poloha AP I

## 8.4 **Vzájemná poloha afinních podprostorů**

Polohu netriviálních vlastních afinních podprostorů (lineárních variet)  $M, N \subseteq V$  budeme klasifikovat na základě dvou kritérií:

# Vzájemná poloha AP II

(A) Pokud platí  $\text{Dir}M \subseteq \text{Dir}N \vee \text{Dir}N \subseteq \text{Dir}M$ , říkáme, že  $M, N$  jsou **rovnoběžné** a píšeme  $M \parallel N$ .

V opačném případě, t. j. pokud platí  $\text{Dir}M \not\subseteq \text{Dir}N \ \& \ \text{Dir}N \not\subseteq \text{Dir}M$ , říkáme, že  $M, N$  **nejsou rovnoběžné**, a píšeme  $M \not\parallel N$ .



# Vzájemná poloha AP III

(B) Pokud platí  $M \cap N \neq \emptyset$ , říkáme, že  $M, N$  **se protínají**.

V opačném případě, t. j. pokud  $M \cap N = \emptyset$ , říkáme, že  $M, N$  **se neprotínají**, neboli, že jsou **disjunktní**.

# Vzájemná poloha AP IV

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

(1)  $M \parallel N$  &  $M \cap N \neq \emptyset$ , tj.  $M, N$  jsou rovnoběžné a protínají se.

V tomto případě platí

$$\text{Dir}M \subseteq \text{Dir}N \Leftrightarrow M \subseteq N \text{ a}$$

$$\text{Dir}N \subseteq \text{Dir}M \Leftrightarrow N \subseteq M.$$

Tedy  $M \subseteq N$  nebo  $N \subseteq M$ . Říkáme, že jedna z lineárních variet  $M, N$  je **podvarietou** druhé, neboli, že  $M, N$  jsou ve vztahu **inkluze**.

# Vzájemná poloha AP V

- (2)  $M \parallel N \ \& \ M \cap N = \emptyset$ , tj.  $M, N$  jsou rovnoběžné a neprotínají se.  
Tento případ nazýváme vztahem ***pravé rovnoběžnosti***.

# Vzájemná poloha AP VI

(3)  $M \not\parallel N$  &  $M \cap N \neq \emptyset$ , tj.  $M, N$  nejsou rovnoběžné a protínají se.

Říkáme, že  $M, N$  jsou *různoběžné*.

# Vzájemná poloha AP VII

(4)  $M \not\parallel N$  &  $M \cap N = \emptyset$ , tj.  $M, N$  nejsou rovnoběžné a neprotínají se.

V tomto případě ještě rozlišujeme dvě další možnosti:

(4a) Ak  $\text{Dir}M \cap \text{Dir}N = \{0\}$ , říkáme, že  $M, N$  jsou **mimoběžné**.

(4b) Pokud  $\text{Dir}M \cap \text{Dir}N \neq \{0\}$ , říkáme, že  $M, N$  jsou **částečně rovnoběžné**.

# Vzájemná poloha AP VIII

**Tvrzení 8.4.1** *Necht'  $M, N \subseteq V$  jsou částečně rovnoběžné lineární variety. Potom  $\dim M \geq 2$ ,  $\dim N \geq 2$  a  $\dim V \geq 4$ .*

Na druhé straně v libovolném vektorovém prostoru  $V$  dimenze  $\geq 4$  není těžké najít příklady částečně rovnoběžných lineárních variet. Např.

$$M = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \quad N = \mathbf{e}_4 + [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$$

jsou částečně rovnoběžné roviny v  $K^4$ .

# Afinní zobrazení I

## 8.5 Afinní zobrazení

Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tímž tělesem  $K$ .

Říkáme, že  $f: V \rightarrow U$  je **afinní zobrazení**, pokud pro libovolné body  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$  a skalár  $s \in K$  platí

$$f(s\mathbf{p} + (1 - s)\mathbf{q}) = sf(\mathbf{p}) + (1 - s)f(\mathbf{q}).$$

# Afinní zobrazení II

**Tvrzení 8.5.1** *Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ . Potom zobrazení  $f: V \rightarrow U$  je afinní právě tehdy, když pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , všechny body  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in V$  a skaláry  $t_0, \dots, t_n \in K$  takové, že  $t_0 + \dots + t_n = 1$ , platí*

$$f(t_0\mathbf{p}_0 + \dots + t_n\mathbf{p}_n) = t_0f(\mathbf{p}_0) + \dots + t_nf(\mathbf{p}_n).$$



# Afinní zobrazení III

**Posunutím** neboli **translací** vektorového prostoru  $V$  o vektor  $\mathbf{u} \in V$  nazýváme zobrazení  $V \rightarrow V$  dané předpisem  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$ .

Zřejmě kompozicí posunutí o vektor  $\mathbf{u} \in V$  a posunutí o vektor  $\mathbf{v} \in V$  je posunutí o vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Každé posunutí je bijektivní zobrazení; inverzní zobrazení k posunutí o vektor  $\mathbf{u}$  je posunutí o opačný vektor  $-\mathbf{u}$ .

# Afinní zobrazení IV

**Věta 8.5.2** *Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ . Potom zobrazení  $f : V \rightarrow U$  je afinní právě tehdy, když existuje vektor  $\mathbf{u} \in U$  a lineární zobrazení  $\varphi : V \rightarrow U$  takové, že pro každé  $\mathbf{x} \in V$  platí*

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}.$$

# Afinní zobrazení $V$

**Důsledek 8.5.3** *Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ . Potom*

- (a) *Libovolná translace prostoru  $V$  je afinní zobrazení;*
- (b) *libovolné lineární zobrazení  $\varphi : V \rightarrow U$  je afinní;*
- (c) *afinní zobrazení  $f : V \rightarrow U$  je lineární právě tehdy, když  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .*

# Afinní zobrazení VI

Zřejmě vektor  $\mathbf{u} \in U$  a lineární zobrazení  $\varphi$  jsou podmínkou věty určeny jednoznačně. Zobrazení  $\varphi = f - f(0)$  nazýváme **lineární částí** a vektor  $\mathbf{u} = f(0)$  **absolutním členem** afinního zobrazení  $f$ .

Píšeme též  $f = \varphi + \mathbf{u}$ .

Afinní zobrazení jsou zevšeobecněním funkcí  $f : K \rightarrow K$  tvaru  $f(x) = ax + b$ , kde  $a, b \in K$ , které (v případě  $K = \mathbb{R}$ ) v matematické analýze nazýváme lineárními.

# Afinní zobrazení VII

**Tvrzení 8.5.4** *Nechť  $U, V, W$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$  a  $g : W \rightarrow V, f : V \rightarrow U$  jsou afinní zobrazení. Potom i jejich kompozice  $f \circ g : W \rightarrow U$  je afinní zobrazení.*

$$(f \circ g)(\mathbf{z}) = \varphi(\psi(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (\varphi \circ \psi)(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}.$$

Pro lineární zobrazení  $\psi : W \rightarrow V, \varphi : V \rightarrow U$  a vektory  $\mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U$  platí

$$(\varphi + \mathbf{u}) \circ (\psi + \mathbf{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}).$$

# Afinní zobrazení VIII

**Tvrzení 8.5.5** *Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ ,  $f : V \rightarrow U$  je afinní zobrazení a  $M \subseteq V$ ,  $N \subseteq U$  jsou afinní podprostory. Potom  $f(M)$  je afinní podprostor v  $U$  a  $f^{-1}(N)$  je afinní podprostor ve  $V$  nebo prázdná množina.*

Protože každé posunutí je bijekce, afinní zobrazení  $f = \varphi + \mathbf{u} : V \rightarrow U$  s lineární částí  $\varphi$  je injektivní právě tehdy, když  $\varphi$  je injektivní. Podobně,  $f$  je surjektivní právě tehdy, když  $\varphi$  je surjektivní.

# Afinní zobrazení IX

**Věta 8.5.6** *Nechť  $f : V \rightarrow U$  je afinní zobrazení, přičemž  $V$  je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom pro libovolné  $y \in \text{Im} f$  platí*

$$\dim V = \dim f^{-1}(y) + \dim \text{Im} f.$$

**Afinní transformací** vektorového prostoru  $V$  nazýváme libovolné afinní zobrazení  $f : V \rightarrow V$ .

# Afinní zobrazení X

**Důsledek 8.5.7** *Nechť  $f : V \rightarrow V$  je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru  $V$ . Potom  $f$  je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.*

**Tvrzení 8.5.8** *Nechť  $f : V \rightarrow U$  je afinní zobrazení s lineární částí  $\varphi$  a  $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ . Potom  $f$  je bijektivní právě tehdy, když  $\varphi$  je bijektivní.*

*V tomto případě i inverzní zobrazení  $f^{-1} : U \rightarrow V$  je afinní a platí  $f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\mathbf{u})$ .*

*Tedy  $f^{-1}$  je kompozicí lineárního zobrazení  $\varphi^{-1}$  a posunutí o vektor  $-\varphi^{-1}(\mathbf{u})$ .*



# Afinní zobrazení XI

Nechť  $U, V$  jsou konečně rozměrné vektorové prostory a  $\alpha, \beta$  jsou báze v  $U$  resp. ve  $V$ .

**Rozšířenou maticí** afinního zobrazení  $f : V \rightarrow U$  s lineární částí  $\varphi$  a absolutním členem  $\mathbf{u}$  vzhledem na báze  $\beta, \alpha$  nazýváme blokovou matici

$$(f)_{\alpha, \beta} = ((\varphi)_{\alpha, \beta} \mid (\mathbf{u})_{\alpha}).$$

# Afinní zobrazení XII

Pokud  $\dim U = m$ ,  $\dim V = n$ ,  $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$  je matice lineárního zobrazení  $\varphi$  v bazích  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ,  $\alpha$  a  $\mathbf{a} = (\mathbf{u})_{\alpha}$  je vektor souřadnic vektoru  $\mathbf{u}$  v bázi  $\alpha$ , tak rozšířenou maticí afinního zobrazení  $f$  v bazích  $\beta, \alpha$  je bloková matice

$$(f)_{\alpha, \beta} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\alpha}, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\alpha} \mid (\mathbf{u})_{\alpha}) = (\mathbf{A} \mid \mathbf{a}).$$

# Afinní zobrazení XIII

Souřadnice bodu  $\mathbf{x} \in V$  v bázi  $\beta$  a souřadnice jeho obrazu  $f(\mathbf{x}) \in U$  v bázi  $\alpha$  jsou tak spojené rovností

$$(f(\mathbf{x}))_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_{\beta} + (\mathbf{u})_{\alpha} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\beta} + \mathbf{a}.$$

Je-li  $f$  lineární zobrazení, t. j. pokud  $f = \varphi$  a  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , nemá význam rozšiřovat matici  $(\varphi)_{\alpha,\beta}$  o nulový sloupec.

# Afinní zobrazení XIV

**Tvrzení 8.5.9** *Necht'  $U, V, W$  jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem  $K$  a  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou nějaké báze prostorů  $U, V$ , resp.  $W$ .*

- (a) *Jsou-li  $g : W \rightarrow V, f : V \rightarrow U$  afinní zobrazení, které mají v příslušných bazích rozšířené matice  $(g)_{\beta, \gamma} = (\mathbf{B} \mid \mathbf{b}), (f)_{\alpha, \beta} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{a})$ , tak jejich kompozice  $f \circ g : W \rightarrow U$  má v bazích  $\gamma, \alpha$  rozšířenou matici*

$$(f \circ g)_{\alpha, \gamma} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}).$$

# Afinní zobrazení XV

(b) *Je-li  $f : V \rightarrow U$  afinní bijekce s rozšířenou maticí  $(f)_{\alpha,\beta} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{a})$  v bazích  $\beta, \alpha$ , tak k ní inverzní zobrazení je afinní bijekce  $f^{-1} : U \rightarrow V$ , která má v bazích  $\alpha, \beta$  rozšířenou matici*

$$(f^{-1})_{\beta,\alpha} = (\mathbf{A}^{-1} \mid -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}).$$